Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Teleskopsummen*

(a) Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} + \frac{2}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{3}{k}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen einen Induktionsbeweis durch:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es gilt $\sum_{k=1}^{1}(a_{k+1} - a_k) = a_{1+1} - a_1$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &\overset{\text{IH}}{=} a_{n+1} - a_1 + a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+2} - a_1.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Mit Hilfe des ersten Aufgabenteils folgen

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1} - 1 = -\frac{n}{n+1}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} + \frac{2}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{3}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe H 2. *Mehr Teleskopsummen*

Verwenden Sie zum Lösen dieser Aufgabe die Aussage aus Aufgabe **H 1 (a)**.

(a) Sei $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(1-q)\sum_{k=1}^{n} q^k = q - q^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Berechnen Sie damit $\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$(1-q)\sum_{k=1}^{n} q^k = -\sum_{k=1}^{n} q^k(q-1) = -\sum_{k=1}^{n}\left(q^{k+1}-q^k\right) \overset{\text{H1 (a)}}{=} -(q^{n+1}-q) = q - q^{n+1}$$

und somit folgt die Behauptung. Damit bekommen wir (für $q = \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k + 1 &= 2\left(1-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k + 1\\ &= 2\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right) + 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{2047}{1024}.\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen zuerst die Behauptung aus dem Hinweis. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

und somit folgt die Behauptung. Damit können wir die angebene Summe als eine Teleskopsumme darstellen und erhalten

$$\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{99}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \overset{\text{H1 (a)}}{=} \sqrt{100}-\sqrt{1} = 9.$$

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Teilbarkeit*

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})}$ ohne Rest durch 7 teilbar; das heißt es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})} = 7k$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $1 + a^2 + a^4 = (1+a^2+a)(1+a^2-a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Wir zeigen zuerst den Hinweis. Sei also $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$(1 + a^2 + a)(1 + a^2 - a) = (1 + a^2) - a^2 = 1 + a^4 + 2a^2 - a^2 = 1 + a^2 + a^4.$$

Nun zeigen wir die eigentliche Aussage mittels vollständiger Induktion.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist

$$1 + 2^{(2^1)} + 2^{(2^{1+1})} = 1 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21 = 7 \cdot 3.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})} = 7k.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: Wir setzen $a := 2^{(2^n)}$ und beobachten, dass dann gilt

$$a^2 = 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} = 2^{(2^n + 2^n)} = 2^{(2^n \cdot 2)} = 2^{(2^{n+1})}$$

und genauso

$$a^4 = 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} = 2^{(2^n + 2^n + 2^n + 2^n)} = 2^{(2^n \cdot 2 \cdot)} = 2^{(2^{n+2})}.$$

Der Hinweis und die Induktionshypothese liefern dann

$$\begin{aligned} 1 + 2^{(2^{n+1})} + 2^{(2^{n+2})} &= 1 + a^2 + a^4 = (1 + a + a^2)(1 + a^2 + a) \\ &= (1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})})(1 + a^2 + a) \overset{\text{IH}}{=} 7 \cdot k(1 + a^2 + a) = 7 \cdot \tilde{k} \end{aligned}$$

für $\tilde{k} := k(1 + a^2 + a) \in \mathbb{N}_0$. Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Sei $a_k \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $0 < a_k < 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\prod_{k=1}^{n}(1 - a_k) \geqq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist $\prod_{k=1}^{1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{1+1}}{a_1}$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \overset{\text{IH}}{=} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_{n+2}}{a_1}.$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist $\prod_{k=1}^{1}(1 - a_k) = 1 - a_1 = 1 - \sum_{k=1}^{1} a_k$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - a_k) \geqq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 - a_k) = (1 - a_{n+1}) \prod_{k=1}^{n}(1 - a_k) \overset{a_{n+1}<1\,\&\,\text{IH}}{\geqq} (1 - a_{n+1}) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{n+1} + a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{a_k>0}{\geqq} 1 - \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 5. *Polynome*

(a) Berechnen Sie $(2X+1)^3$, $(X-3)^4$ und $(X-1)^5$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.

Lösungshinweise hierzu: Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt:

$$(2X+1)^3 = (2X)^3 + \binom{3}{1}(2X)^2 1 + \binom{3}{2}(2X)1^2 + 1^3 = 8X^3 + 12X^2 + 6X + 1.$$

$$\begin{aligned}(X-3)^4 &= X^4 + \binom{4}{1}X^3(-3) + \binom{4}{2}X^2(-3)^2 + \binom{4}{3}X(-3)^3 + (-3)^4 \\ &= X^4 - 12X^3 + 54X^2 - 108X + 81.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X-1)^5 &= X^5 + \binom{5}{1}X^4(-1) + \binom{5}{2}X^3(-1)^2 + \binom{5}{3}X^2(-1)^3 + \binom{5}{4}X(-1)^4 + (-1)^5 \\ &= X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X - 1.\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $(16 - 32X + 24X^2 - 8X^3 + X^4)(X^2+1)$.

Lösungshinweise hierzu: Nach dem Satz vom Nullprodukt genügt es, die beiden Faktoren getrennt zu untersuchen.

Der erste Faktor lässt sich mit dem Binomischen Lehrsatz schreiben als

$$16 - 32X + 24X^2 - 8X^3 + X^4 = (X-2)^4.$$

Wir erhalten also 2 als einzige die Nullstellen des ersten Faktors.

Der verbleibende Faktor X^2+1 besitzt hingegen keine reelle Nullstelle:
In der Tat gilt für $x \in \mathbb{R}$ stets $x^2 \geqq 0$ und somit $x^2 + 1 \geqq 1 > 0$.

Somit ist 2 die einzige reele Nullstelle von $(X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 32X + 16)(X^2+1)$.

(c) Zeigen Sie, dass alle reellen Nullstellen von $X^9 + 10X^5 + 17X^2 + 2$ negativ sind.

Lösungshinweise hierzu: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqq 0$ gilt die Ungleichung

$$\underbrace{x^9}_{\geqq 0} + \underbrace{10x^5}_{\geqq 0} + \underbrace{17x^2}_{\geqq 0} + 2 \geqq 2 > 0.$$

Somit muss jede reelle Nullstelle des Polynoms negativ sein.

(d) Zeigen Sie, dass $2X^{2020} + 5X^2 - 10X + 11$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Lösungshinweise hierzu: Für $x \in \mathbb{R}$ liefert quadratisches Ergänzen die Ungleichung

$$2x^{2020} + 5x^2 - 10x + 11 = \underbrace{2x^{2020}}_{\geqq 0} + \underbrace{5(x-1)^2}_{\geqq 0} + 6 \geqq 6 > 0.$$

Somit besitzt $2X^{2020} + 5X^2 - 10X + 11$ keine reellen Nullstellen.

Aufgabe H 6. *Ungleichungen, Beträge*

(a) Bestimmen Sie jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.

(i) $2|x-1| < x^2 - 1$ **(ii)** $3|x^2-3| < x|x+\sqrt{3}|$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und bezeichne $\max\{x,y\}$ das Maximum der Zahlen x und y. Analog bezeichne $\min\{x,y\}$ das Minimum der Zahlen x und y. Zeigen Sie:

$$\max\{x,y\} = \tfrac{1}{2}\big(x+y+|x-y|\big) \quad \text{und} \quad \min\{x,y\} = \tfrac{1}{2}\big(x+y-|x-y|\big).$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) (i) Für $x=1$ ist die Ungleichung nicht erfüllt. Es bleiben noch die folgenden zwei Fälle zu betrachten:

1. Fall: $x > 1$: In diesem Fall ist $|x-1| = (x-1) > 0$ und daher

$$2|x-1| < x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \iff 2 < x+1 \iff 1 < x.$$

2. Fall: $x < 1$: In diesem Fall ist $|x-1| = (1-x) > 0$ und daher

$$2|x-1| < x^2 - 1 = -(x+1)(1-x) \iff 2 < -x-1 \iff x < -3.$$

Insgesamt ist die Ungleichung also erfüllt für alle $x \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty) = \mathbb{R} \setminus [-3,1]$.

(ii) Es ist $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}||x+\sqrt{3}|$. Daher ist die Ungleichung für $x = -\sqrt{3}$ nicht erfüllt. Für $x \neq -\sqrt{3}$ ist die Ungleichung äquivalent zu $3|x-\sqrt{3}| < x$. Wir betrachten nun wieder zwei Fälle:

1. Fall: $x \leqq \sqrt{3}$: In diesem Fall lautet die Ungleichung

$$3(\sqrt{3}-x) < x \iff 3\sqrt{3} < 4x \iff \frac{3\sqrt{3}}{4} < x.$$

2. Fall $x > \sqrt{3}$: In diesem Fall lautet die Ungleichung

$$3(x-\sqrt{3}) < x \iff 2x < 3\sqrt{3} \iff x < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Insgesamt ist die Ungleichung also erfüllt für alle $x \in (\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen die Aussagen, indem wir zwei Fälle betrachten.

1. Fall: $x \leqq y$: In diesem Fall gilt

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+(y-x)) = \frac{1}{2}(2y) = y = \max\{x,y\}$$

und

$$\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(y-x)) = \frac{1}{2}(2x) = x = \min\{x,y\}.$$

2. Fall: $x > y$: In diesem Fall gilt

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+(x-y)) = \frac{1}{2}(2x) = x = \max\{x,y\}$$

und

$$\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = \frac{1}{2}(2y) = y = \min\{x,y\}.$$

Dies liefert die Behauptung.

Aufgabe H 7. *Abbildungen*

(a) Konstruieren Sie eine Abbildung $f_1 : [0,1] \to [0,1]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b) Konstruieren Sie eine Abbildung $f_2 : [0,1] \to [0,1]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(c) $h \colon \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \frac{\overline{z}}{\overline{z}+\mathrm{i}}$

(d) $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \colon k \mapsto 2|k| - \max\{0, \min\{1,k\}\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Abbildung $f_1 : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto \frac{1}{2}x$ ist injektiv aber nicht surjektiv. In der Tat ist $f_1(x) = \frac{1}{2}x < 1$ für alle $x \in [0,1]$ und damit ist f_1 nicht surjektiv. Nun zeigen wir, dass f_1 injektiv ist. Seien dazu $x, y \in [0,1]$ mit $f_1(x) = f_1(y)$ beliebig. Dann gilt also $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y$ und somit $x = y$.

(b) Die Abbildung $f_2 : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto 2|x - \frac{1}{2}|$ ist surjektiv aber nicht injektiv. In der Tat ist $f_2(0) = 1 = f_2(1)$ und damit ist f_2 nicht injektiv. Nun zeigen wir, dass f_2 surjektiv ist. Sei dazu $y \in [0,1]$ beliebig. Dann gilt für $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \in [0,1]$ auch $f(x) = 2|\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = |y| = y$.

(c) Es gibt kein $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ mit $1 = h(z) = \frac{\overline{z}}{\overline{z}+\mathrm{i}}$. Denn sonst wäre $\overline{z} = \overline{z} + \mathrm{i}$ und somit $0 = \mathrm{i}$, ein Widerspruch. Daher ist die Abbildung h nicht surjektiv und damit auch nicht bijektiv.

Wir zeigen nun, dass h injektiv ist. Seien dazu $z, v \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ mit $h(z) = h(v)$ beliebig. Dann können wir folgern

$$\frac{\overline{z}}{\overline{z}+\mathrm{i}} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}+\mathrm{i}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{z}(\overline{v}+\mathrm{i}) = \overline{v}(\overline{z}+\mathrm{i}) \quad \Longrightarrow \quad \overline{z}\mathrm{i} = \overline{v}\mathrm{i} \quad \Longrightarrow \quad z = v.$$

Somit ist h injektiv.

(d) Wir zeigen, dass g bijektiv ist und beobachten zuerst, dass sich auch wie folgt beschreiben lässt:

$$g(k) = 2|k| - \max\{0, \min\{1,k\}\} = 2k - \max\{0,1\} = 2k - 1 \quad \text{für alle} \quad k \geqq 1$$

und

$$g(k) = 2|k| - \max\{0, \min\{1,k\}\} = -2k - \max\{0,k\} = -2k \quad \text{für alle} \quad k \leqq 0.$$

Zur Surjektivität: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wir betrachten zwei Fälle:

1. Fall: n ist gerade, also $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt offenbar $-k \in \mathbb{Z}$, $-k \leqq 0$ und $g(-k) = -2(-k) = 2k = n$.

2. Fall: n ist ungerade, also $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten $k + 1 \in \mathbb{Z}$, $k + 1 \geqq 1$ und $g(k+1) = 2(k+1) - 1 = 2k + 1 = n$.

Insgesamt gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $g(k) = n$ und da $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig war, folgt die Surjektivität.

Zur Injektivität: Seien $j, k \in \mathbb{Z}$ mit $g(k) = g(j)$ beliebig. Wir betrachten wieder zwei Fälle:

1. Fall: $g(k) = g(j)$ ist ungerade: Dann muss auch $j, k \geqq 1$ gelten, denn sonst führt dies zu einen Widerspruch zur Definition von g. Insbesondere können wir dann folgern

$$g(k) = g(j) \quad \Longrightarrow \quad 2k - 1 = 2j - 1 \quad \Longrightarrow k = j.$$

2. Fall: $g(k) = g(j)$ ist gerade: Dann muss auch $j, k \leqq 0$ gelten, denn sonst führt dies wieder ebenfalls zu einem Widerspruch zur Definition von g. Insbesondere können wir folgern

$$g(k) = g(j) \implies -2k = -2j \implies k = j.$$

Insgesamt folgt also $k = j$ und somit die Injektivität von g.

Aufgabe H 8. *Mengen*

Gegeben seien die Mengen

$$M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max\{|x|,|y|\} \leqq 2\right\}, \quad M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |xy| \leqq 1\right\}$$

und

$$M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > \cos(\pi x)\right\}.$$

Skizzieren Sie Mengen M_1, M_2, $M_1 \setminus M_2$ und $(\mathbb{R}^2 \setminus M_3) \cap M_1$.

Lösungshinweise hierzu:

- Zu M_1: Man beobachtet zuerst, dass $\max\{|x|,|y|\} \leqq 2$ genau dann gilt, wenn $|x| \leqq 2$ und $|y| \leqq 2$. Damit lässt sich M_1 darstellen als

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [-2,2] \text{ und } y \in [-2,2]\right\}.$$

- Zu M_2: Für $0 \neq x \in M_2$ sieht man, dass

$$|xy| \leqq 1 \iff |y| \leqq \frac{1}{|x|} \iff y \leqq \frac{1}{|x|} \text{ und } y \geqq -\frac{1}{|x|}.$$

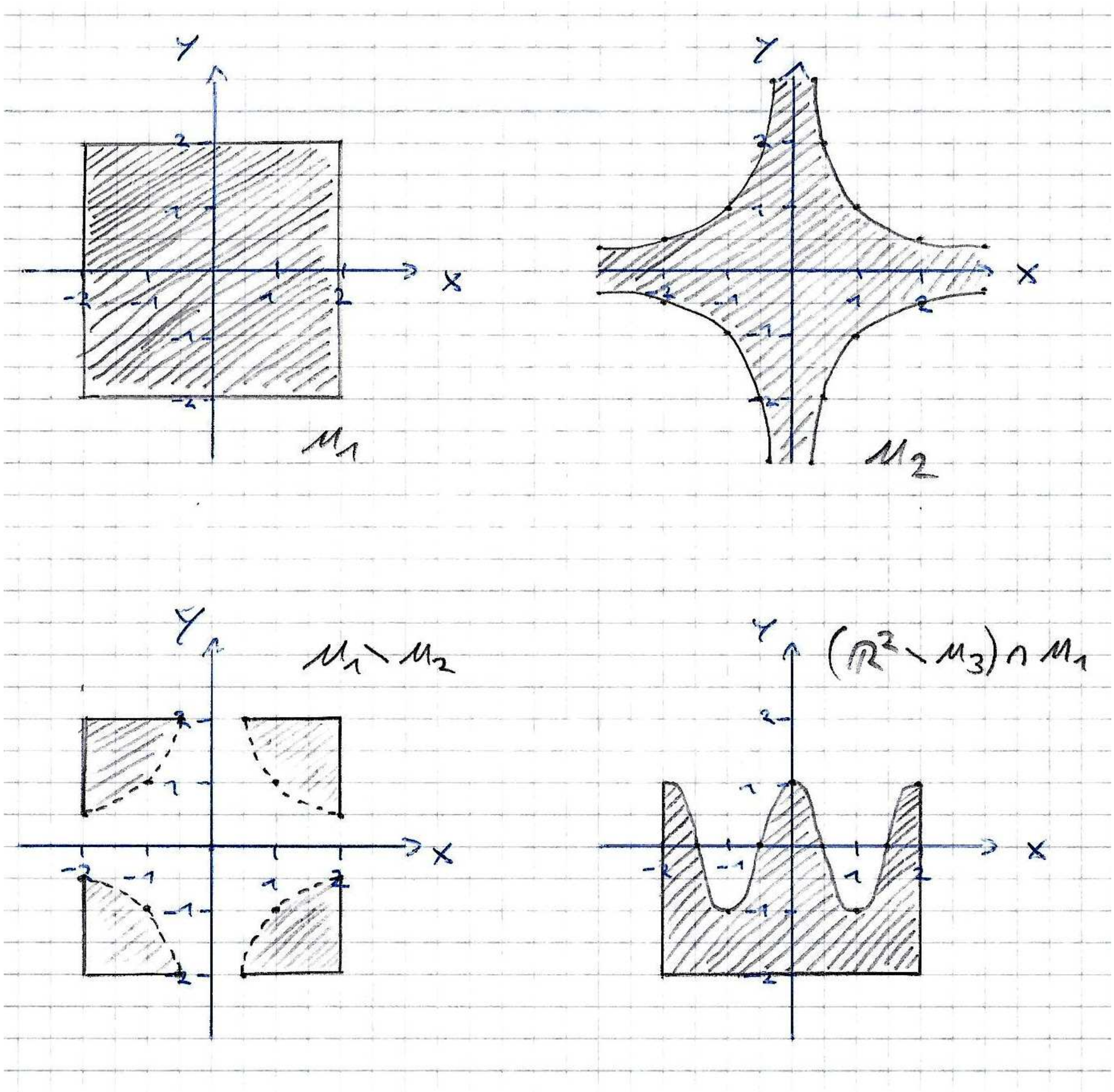
  Damit lässt sich M_2 ausdrücken als

$$M_2 = \{0\} \cup \left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqq f(x)\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq g(x)\right\}\right)$$

  mit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{|x|}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{|x|}$. Hierbei ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqq f(x)\right\}$ die Menge aller (x,y) unter (und auf) dem Graphen der Funktion f und $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq g(x)\right\}$ ist die Menge aller (x,y) über (und auf) dem Graphen der Funktion g.

- Zu M_3: Dies ist gerade die Menge aller $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ über dem Graphen der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(\pi x)$.

Damit ergeben sich die folgenden Skizzen. Bei allen skizzierten Mengen bis auf $M_1 \setminus M_2$ gehört der Rand dazu. Bei dieser Menge gibt es Teile vom Rand, die nicht zur Menge gehören. Diese sind durch gestrichelte Linien markiert.



Hinweise zum Skizzieren von Mengen:

- Ihre Skizze sollte immer beschriftete Achsen und eine nachvollziehbare Achsenskalierung besitzen.
- Sie sollten immer klarstellen, ob der Rand zu der skizzierten Menge dazugehört oder nicht. Falls der Rand nicht vollständig zur Menge gehört, empfiehlt es sich, die dazugehörigen Teile mit durchgezogenen Linien zu zeichnen und die nicht dazugehörigen Teile mit gestrichelten Linien zu zeichnen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 9. *Untervektorräume*

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V und sei $f : V \to V$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $f(ax+by) = af(x)+bf(y)$ für alle $x, y \in V$ und alle $a, b \in \mathbb{K}$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von V Untervektorräume sind:

(a) $U_1 \cap U_2 = \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$

(b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$

(c) $\{f(x) \mid x \in V\}$

(d) $\{x \in V \mid f(x) = 0\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Per Definition ist $U_1 \cap U_2$ eine Teilmenge von V und weiter gilt:

- Seien $u, v \in U_1 \cap U_2$ beliebig. Dann gelten $u, v \in U_1$ und $u, v \in U_2$. Da sowohl U_1 als auch U_2 UVR sind, folgt $u+v \in U_1$ und $u+v \in U_2$, also $u+v \in U_1 \cap U_2$.
- Seien $u \in U_1 \cap U_2$ und $s \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann ist also $u \in U_1$ und $u \in U_2$. Da U_1 und U_2 UVR sind folgt daraus $su \in U_1$ und $su \in U_2$. Dies liefert $su \in U_1 \cap U_2$.
- Da U_1 und U_2 UVR sind, gilt $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$ und daher $0 \in U_1 \cap U_2$.

(b) Da V ein Vektorraum ist, ist $u_1 + u_2 \in V$ für alle $u_1 \in U_1 \subseteqq V$ und $u_2 \in U_2 \subseteqq V$ und somit ist $U_1 + U_2 \subseteqq V$. Weiter gilt:

- Seien $u, v \in U_1 + U_2$ beliebig. Dann gelten $u = u_1 + u_2$ und $v = v_1 + v_2$ für $u_1, v_1 \in U_1$ und $u_2, v_2 \in U_2$. Da U_1, U_2 UVR sind, folgen nun $u_1 + v_1 \in U_1$ und $u_2 + v_2 \in U_2$. Dies liefert dann $u+v = u_1+u_2+v_1+v_2 = (u_1+v_1)+(u_2+v_2) \in U_1 + U_2$.
- Seien $u \in U_1 + U_2$ und $s \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt $u = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$. Da U_1, U_2 UVR sind, folgen nun $su_1 \in U_1$ und $su_2 \in U_2$. Dies liefert dann $su = s(u_1 + u_2) = (su_1) + (su_2) \in U_1 + U_2$.
- Da U_1 und U_2 UVR sind, gilt $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$ und daher $0 = 0+0 \in U_1+U_2$.

(c) f bilded ab nach V und somit ist $U := \{f(x) \mid x \in V\}$ eine Teilmenge von V. Weiter gilt:

- Seien $u, v \in U$ beliebig. Dann gibt es $x, y \in V$ mit $u = f(x)$ und $v = f(y)$. Weiter folgt mit der Eigenschaft von f und weil V ein Vektorraum ist, dass $u+v = 1 \cdot f(x) + 1 \cdot f(y) = f(1 \cdot x + 1 \cdot y) = f(x+y) \in U$ gilt.
- Seien $u \in U$ und $s \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $u = f(x)$. Weiter folgt mit der Eigenschaft von f, dass $su = sf(x) = sf(x) + 0 \cdot f(x) = f(sx + 0 \cdot x) = f(sx) \in U$.
- Mit der Eigenschaft von f folgt $f(0) = f(1\cdot 0+1\cdot 0) = 1\cdot f(0)+1\cdot f(0) = 2f(0)$, also $0 = f(0)$. Insbesondere gilt also $0 \in U$.

(d) Per Definition ist $U := \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ eine Teilmenge von V und weiter gilt:

- Seien $u, v \in U$ beliebig. Dann gelten $f(u) = 0$ und $f(v) = 0$. Mit der Eigenschaft von f folgt dann $f(u+v) = f(1\cdot u+1\cdot v) = 1\cdot f(u)+1\cdot f(v) = 0$, also $u+v \in U$.
- Seien $u \in U$ und $s \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt $f(u) = 0$. Mit der Eigenschaft von f folgt dann $f(su) = f(su + 0 \cdot u) = sf(u) + 0f(u) = sf(u) = 0$, also $su \in U$.
- Wie in (c) gesehen ist $f(0) = 0$ und daher $0 \in U$.

Aufgabe H 10. *Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum*

Wir definieren die Abbildung $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\langle x\,|\,y\rangle := \sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot y_k$ analog zu dem Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass diese Abbildung für alle $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ und alle $s \in \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) $\langle x\,|\,y\rangle = \overline{\langle y\,|\,x\rangle}$ **(b)** $\langle x\,|\,x\rangle \geqq 0$ und $\langle x\,|\,x\rangle = 0 \iff x = 0$

(c) $\langle x+y\,|\,z\rangle = \langle x\,|\,z\rangle + \langle y\,|\,z\rangle$ **(d)** $\langle x\,|\,sy\rangle = s\,\langle x\,|\,y\rangle$ und $\langle sx\,|\,y\rangle = \overline{s}\,\langle x\,|\,y\rangle$.

Lösungshinweise hierzu: Seien $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ und $s \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gelten:

(a) $\langle x\,|\,y\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot y_k = \overline{\sum_{k=1}^n x_k\cdot\overline{y_k}} = \overline{\langle y\,|\,x\rangle}$.

(b) $\langle x\,|\,x\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot x_k = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \geqq 0$.
Außerdem ist $\langle 0\,|\,0\rangle = \sum_{k=1}^n |0|^2 = 0$ und $0 = \langle x\,|\,x\rangle = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$ impliziert $x_k = 0$ für alle k, also $x = 0$.

(c) $\langle x+y\,|\,z\rangle = \sum_{k=1}^n (\overline{x_k+y_k})\cdot z_k = \sum_{k=1}^n (\overline{x_k}+\overline{y_k})\cdot z_k = \sum_{k=1}^n (\overline{x_k}\cdot z_k + \overline{y_k}\cdot z_k) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot z_k + \sum_{k=1}^n \overline{y_k}\cdot z_k = \langle x\,|\,z\rangle + \langle y\,|\,z\rangle$.

(d) $\langle x\,|\,sy\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot sy_k = s\sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot y_k = s\,\langle x\,|\,y\rangle$ und $\langle sx\,|\,y\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{sx_k}\cdot y_k = \overline{s}\sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot y_k = \overline{s}\,\langle x\,|\,y\rangle$.

Aufgabe H 11. *Lineare Unabhängigkeit und Basen*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^5$.

$$v_1 = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-2\\4\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix}\alpha\\6\\2\\-4\\0\end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^5$ so, dass v_1, v_2, v_3, v_4, w eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist.

Lösungshinweise hierzu: Da alle Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 als letzten Eintrag eine 0 besitzen, wählen wir z.B. $w := (0,0,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^5$ damit v_1, v_2, v_3, v_4, w ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$ sein kann. Da $\mathbb{R}^5$ die Dimension 5, reicht es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3, v_4, w linear unabhängig sind (Satz 2.7.16.) damit die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bilden.
Dazu prüfen wir, ob es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 w = 0$ und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ ist. Wir stellen also das folgende lineare Gleichungssystem auf und lösen es.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcll}
(-2)\lambda_1 & + & (-2)\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & + & 1\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 & \text{(I)}\\
(-6)\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 & \text{(II)}\\
(-2)\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 1\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 & \text{(III)}\\
4\lambda_1 & + & 1\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & (-2)\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 & \text{(IV)}\\
0\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & + & 1\lambda_5 & = & 0 & \text{(V)}
\end{array}$$

Aus Gleichung (V) folgt $\lambda_5 = 0$.
Aus Gleichung (III) folgt $\lambda_4 = 2\lambda_1$.
Einsetzen in Gleichung (IV) gibt $4\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0$.
Beides in (I) einsetzen ergibt $-2\lambda_1 - 2\cdot 0 + 4\lambda_3 + 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = 0$.

Einsetzen in (II) ergibt $\lambda_1 = 0$ und dann mit (III) auch $\lambda_4 = 0$.
Damit muss $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ gelten und v_1, v_2, v_3, v_4, w sind linear unabhängig.

(b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{L}\,(v_2 + v_3, v_1 + 2v_4)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir definieren $b_1 := v_2+v_3, b_2 := v_1+2v_4$, da diese Vektoren per Definition ein Erzeugendensystem von $\mathrm{L}\,(v_2 + v_3, v_1 + 2v_4)$ sind. Weiter bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathrm{L}\,(v_2 + v_3, v_1 + 2v_4)$, da sie linear unabhängig sind:
Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_2 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_1 v_3 + 2\lambda_2$ beliebig. Dann folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, weil die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ nach dem ersten Aufgabenteil linear unabhängig sind.
Eine andere Basis b_1', b_2' für $\mathrm{L}\,(v_2 + v_3, v_1 + 2v_4) = \mathrm{L}\,(b_1, b_2)$ erhält man beispielsweise auf folgende Weise:

(i) Indem man mindestens einen der Basisvektoren um einen Skalarfaktor aus $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ändert, etwa $b_1' := -b_1$, $b_2' := 3b_2$.

(ii) Indem man zu einem der Basisvektoren b_j eine Linearkombination der anderen Basisvektoren hinzuaddiert, etwa $b_1' := b_1 + 3b_2$, $b_2' := b_2$.

(iii) Indem wir die Menge $\mathrm{L}\,(v_2 + v_3, v_1 + 2v_4)$ genauer beschreiben, um neue Erzeugendensysteme zu finden.

$$\mathrm{L}\,(b_1, b_2) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda - 6\mu \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine weitere Basis ist also z.B. $b_1' := (0, 1, 0, 0, 0)$, $b_2' := (2, 0, 0, 1, 0)$, da diese Vektoren linear unabhängig sind und nach obiger Umformung ein Erzeugendensystem bilden.

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_3, v_4, v_5 linear unabhängig sind.

Lösungshinweise hierzu: Wie in Teil (a) wählen wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_4 + \lambda_3 v_5 = 0$ und lösen das dazugehörige lineare Gleichungssytem.

$$\begin{array}{rcrcrcll} 4\lambda_1 & + & 1\lambda_2 & + & \alpha\lambda_3 & = & 0 & \text{(I)} \\ 3\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 & \text{(II)} \\ 0\lambda_1 & + & 1\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & \text{(III)} \\ 0\lambda_1 & + & (-2)\lambda_2 & + & (-4)\lambda_3 & = & 0 & \text{(IV)} \end{array}$$

Aus Gleichung (II) folgt $\lambda_1 = -2\lambda_3$.
Aus Gleichung (III) (oder (IV)) folgt $\lambda_2 = -2\lambda_3$. Zusammen also $\lambda_1 = \lambda_2 = -2\lambda_3$.
Einsetzen in (I) liefert $(-10 + \alpha)\lambda_3 = 0$.
Damit v_3, v_4, v_5 linear unabhängig sind, müssen wir aus dieser letzten Gleichung $\lambda_3 = 0$ folgern können, denn dies liefert dann auch $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Diese Folgerung ist möglich genau dann, wenn $-10 + \alpha \neq 0$ gilt.
Insgesamt sind damit also v_3, v_4, v_5 linear unabhängig für alle $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{10\}$.

(d) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_1, v_2, v_5 linear abhängig sind.

Lösungshinweise hierzu: Wie in Teil (a) und (c) wählen wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_5 = 0$ und lösen das dazugehörige lineare Gleichungssytem.

$$\begin{array}{rcrcrcll}
(-2)\lambda_1 & + & (-2)\lambda_2 & + & \alpha\lambda_3 & = & 0 & \text{(I)} \\
(-6)\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 & \text{(II)} \\
(-2)\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & \text{(III)} \\
4\lambda_1 & + & 1\lambda_2 & + & (-4)\lambda_3 & = & 0 & \text{(IV)}
\end{array}$$

Aus Gleichung (II) (oder (III)) folgt $\lambda_1 = \lambda_3$.
Einsetzen in (IV) liefert $\lambda_2 = 0$.
Zusammen mit (I) erhalten wir $(-2+\alpha)\lambda_3 = 0$.
Damit v_1, v_2, v_5 linear abhängig sind, dürfen wir aus dieser letzten Gleichung nicht $\lambda_3 = 0$ folgern können, denn sonst wäre auch $\lambda_1 = 0$. Es muss also $\alpha = 2$ sein.
Insgesamt sind also v_1, v_2, v_5 linear abhängig nur für $\alpha = 2$.

Aufgabe H 12. *Links- und Rechtsinverse*

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g\colon B \to A$ heißt *Links-* bzw. *Rechtsinverse* von f, wenn $g \circ f = \mathrm{id}_A$ bzw. $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Wenn f eine Linksinverse besitzt, dann ist f injektiv,

(b) Wenn f eine Rechtsinverse besitzt, dann ist f surjektiv.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen eine Links- und/oder Rechtsinverse besitzen

(c) $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ **(d)** $k\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\colon x \mapsto \cos(x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $g\colon B \to A$ eine Linksinverse von f. Für alle $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gilt dann die Gleichung
$$x = \underset{A}{\mathrm{id}}(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = \underset{A}{\mathrm{id}}(y) = y.$$
Somit ist f injektiv.

(b) Sei $g\colon B \to A$ eine Rechtsinverse von f und sei $y \in B$ beliebig. Dann erfüllt $x := g(y) \in A$ die Gleichung
$$y = \underset{B}{\mathrm{id}}(y) = f(g(y)) = f(x).$$
Da $y \in B$ beliebig war, ist f damit surjektiv.

(c) Die Abbildung h besitzt eine Linksinverse aber keine Rechtsinverse.

Eine Linksinverse von h ist etwa durch
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ 17 & \text{sonst} \end{cases}$$
gegeben, denn für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt
$$g(h(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x = \underset{\mathbb{R}^+}{\mathrm{id}}(x).$$

Eine Rechtsinverse von h kann nach Teil **(b)** nicht existieren, da h nicht surjektiv ist. In der Tat gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ stets $h(x) = x^2 > 0$, weswegen der Wert $-1 \in \mathbb{R}$ von h nicht angenommen wird.

(d) Die Abbildung k besitzt eine Rechtsinverse aber keine Linksinverse.

Eine Rechtsinverse von k ist etwa durch $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \arccos x$ gegeben. In der Tat gilt für $x \in [-1,1]$ stets

$$k(g(x)) = k(\arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = x = \operatorname*{id}_{[-1,1]}(x).$$

Wegen $\cos(0) = 1 = \cos(2\pi)$ ist k nicht injektiv. Nach Teil **(a)** kann damit keine Linksinverse von k existieren.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Skalarprodukt und Vektorprodukt*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

(a) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x \times y) \times z = \langle x \,|\, z\rangle\, y - \langle y \,|\, z\rangle\, x$.

Lösungshinweise hierzu: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix}x_2y_3 - x_3y_2\\x_3y_1 - x_1y_3\\x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}(x_3y_1 - x_1y_3)z_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)z_2\\(x_1y_2 - x_2y_1)z_1 - (x_2y_3 - x_3y_2)z_3\\(x_2y_3 - x_3y_2)z_2 - (x_3y_1 - x_1y_3)z_1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}(x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (y_2z_2 + y_3z_3)x_1\\(x_1z_1 + x_3z_3)y_2 - (y_1z_1 + y_3z_3)x_2\\(x_1z_1 + x_2z_2)y_3 - (y_1z_1 + y_2z_2)x_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir addieren in jeder Komponente 0 in Form von $x_iz_iy_i - y_iz_ix_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Verteilt man dies auf die beiden Klammern, so steht in der ersten Klammer jeweils $\langle x \,|\, z\rangle$, in der zweiten Klammer jeweils $\langle y \,|\, z\rangle$. Aufspaltung liefert dann:

$$(x \times y) \times z = \langle x \,|\, z\rangle\, y - \langle y \,|\, z\rangle\, x.$$

(b) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle x \times y \,|\, z\rangle = \langle y \times z \,|\, x\rangle = \langle z \times x \,|\, y\rangle$.

Lösungshinweise hierzu: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix}x_2y_3 - x_3y_2\\x_3y_1 - x_1y_3\\x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \right\rangle \\
&= z_1x_2y_3 - z_1x_3y_2 + z_2x_3y_1 - z_2x_1y_3 + z_3x_1y_2 - z_3x_2y_1 \\
&= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 \\
&= \left\langle \begin{pmatrix}y_2z_3 - y_3z_2\\y_3z_1 - y_1z_3\\y_1z_2 - y_2z_1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich $\langle x \times y \,|\, z\rangle = \langle z \times x \,|\, y\rangle$.

(c) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Seien $x, y, u \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y \\
\stackrel{\text{(a)}}{=}\; &\langle x \,|\, z\rangle\, y - \langle y \,|\, z\rangle\, x + \langle y \,|\, x\rangle\, z - \langle z \,|\, x\rangle\, y + \langle z \,|\, y\rangle\, x - \langle x \,|\, y\rangle\, z \\
=\; &(\langle z \,|\, y\rangle - \langle y \,|\, z\rangle)x + (\langle x \,|\, z\rangle - \langle z \,|\, x\rangle)y + (\langle y \,|\, x\rangle - \langle x \,|\, y\rangle)z \\
=\; &0\,,
\end{aligned}$$

da das Skalarprodukt kommutativ ist.

(d) Für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle x \times y \,|\, u \times v\rangle = \langle x \,|\, u\rangle \langle y \,|\, v\rangle - \langle x \,|\, v\rangle \langle y \,|\, u\rangle$.

Lösungshinweise hierzu: Seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Beachte nach 2.10.3 gilt $x \times y = -y \times x$. Also ist

$$\begin{aligned} \langle x \times y \,|\, u \times v \rangle &\overset{\textbf{(b)}}{=} \langle y \times (u \times v) \,|\, x \rangle &&= -\langle x \,|\, (u \times v) \times y \rangle \\ &\overset{\textbf{(a)}}{=} -\langle x \,|\, \langle u \,|\, y \rangle v - \langle v \,|\, y \rangle u \rangle &&= -\langle u \,|\, y \rangle \langle x \,|\, v \rangle + \langle v \,|\, y \rangle \langle x \,|\, u \rangle \\ &= \langle x \,|\, u \rangle \langle y \,|\, v \rangle - \langle x \,|\, v \rangle \langle y \,|\, u \rangle \ , \end{aligned}$$

da das Skalarprodukt kommutativ ist.

Aufgabe H 14. *Ebene, Hessesche Normalform, Flächenberechnung*

Gegeben seien $A = (1, 1, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^3$, $B = (0, -1, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ und die Ebene E, die den Ursprung, sowie A und B enthält. Es sei g die Gerade durch den Ursprung, die senkrecht zur Ebene E verläuft.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E.

Lösungshinweise hierzu: In Parameterdarstellung erhalten wir

$$E : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

Der Normalenvektor ist senkrecht zu den beiden Stützvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also $n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es ist $\left\langle n \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$. Wir erhalten daher zwei mögliche Hessesche Normalformen

$$E : \frac{2}{\sqrt{6}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_3 = 0$$

und

$$H : -\frac{2}{\sqrt{6}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x_3 = 0 \ .$$

(b) Bestimmen Sie einen Punkt $C = (c_1, c_2, c_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ mit $c_1 > 0$ auf der Geraden g so, dass das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C den Flächeninhalt $\sqrt{\frac{63}{2}}$ hat.

Lösungshinweise hierzu: Die Gerade g durch den Ursprung und senkrecht zu E lautet:

$$g : \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Der Flächeninhalt F des Dreiecks ergibt sich als

$$F = \frac{1}{2} |(B - A) \times (C - A)| = \frac{1}{2} | \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ -\lambda - 1 \\ -\lambda - 1 \end{pmatrix} | = \frac{1}{2} | \begin{pmatrix} 2\lambda + 2 \\ -\lambda - 1 \\ 5\lambda - 1 \end{pmatrix} | \ .$$

Dies liefert die Gleichung

$$\sqrt{\frac{63}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 + 8\lambda + 4 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 25\lambda^2 - 10\lambda + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{30\lambda^2 + 6}$$

Quadrieren führt auf $126 = 30\lambda^2 + 6$, also $\lambda = \pm 2$.
Somit ergibt sich $C = (4, -2, -2)^\intercal$.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene H, die A, B und $D = (4, -2, -2)^\intercal$ enthält.

Lösungshinweise hierzu: In Parameterdarstellung erhalten wir

$$H : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$

Der Normalenvektor ist senkrecht zu den beiden Stützvektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Also $n = \frac{1}{\sqrt{126}} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Es ist $\left\langle n \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{12}{\sqrt{126}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$. Wir erhalten daher die Hessesche Normalform

$$H : \frac{6}{\sqrt{126}}x_1 - \frac{3}{\sqrt{126}}x_2 + \frac{9}{\sqrt{126}}x_3 = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

(d) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen E und H.

Lösungshinweise hierzu: Als Winkel zwischen Ebenen ist der Winkel zwischen deren Normalenvektoren definiert. Der Normalenvektor von H ist $n_H = \frac{1}{\sqrt{126}} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$, der Normalenvektor von E ist $n_E = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es folgt daher $\cos(\alpha) = \frac{\langle n_H \,|\, n_E \rangle}{|n_H| \cdot |n_E|} = \frac{\sqrt{21}}{21}$.

Aufgabe H 15. *Untere Dreiecksmatrizen*

Eine Matrix $A = (a_{j\ell})_{1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq \ell \leqq n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls $a_{j\ell} = 0$ gilt für alle $j, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j < \ell$.

(a) Seien $A = (a_{j\ell})_{1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq \ell \leqq n}, B = (b_{j\ell})_{1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq \ell \leqq n}$ untere Dreiecksmatrizen und $\alpha \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann αA, $A + B$ und AB ebenfalls untere Dreiecksmatrizen sind.

(b) Sei $A = (a_{j\ell})_{1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq \ell \leqq n}$ mit $A = A^\intercal$ gegeben. Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix $B = (b_{j\ell})_{1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq \ell \leqq n}$, für welche $A = B + B^\intercal$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- Sei $(c_{j\ell})_{1\leqq j\leqq n,1\leqq \ell\leqq n} := \alpha A$ und seien $j,\ell \in \{1,\dots,n\}$ mit $j<\ell$ beliebig. Dann gilt
$$c_{j\ell} = \alpha a_{j\ell} = 0,$$
da A eine untere Dreiecksmatrix ist. Somit ist αA ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix.
- Sei $(c_{j\ell})_{1\leqq j\leqq n,1\leqq \ell\leqq n} := A+B$ und seien $j,\ell \in \{1,\dots,n\}$ mit $j<\ell$ beliebig. Dann gilt
$$c_{j\ell} = a_{j\ell} + b_{j\ell} = 0,$$
da A und B untere Dreiecksmatrizen sind. Somit ist $A+B$ ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix.
- Sei $(c_{j\ell})_{1\leqq j\leqq n,1\leqq \ell\leqq n} := AB$ und seien $j,\ell \in \{1,\dots,n\}$ mit $j<\ell$ beliebig. Dann gilt
$$c_{j\ell} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{k\ell} = \sum_{k=1}^{j} a_{jk}\underbrace{b_{k\ell}}_{=0} + \sum_{k=j+1}^{n} \underbrace{a_{jk}}_{=0} b_{kl} = 0,$$
da A und B untere Dreiecksmatrizen sind. Somit ist AB ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix.

(b) Nach Voraussetzung gilt
$$a_{j\ell} = (A^\intercal)_{j\ell} = a_{\ell j} \quad \text{für alle} \quad j,\ell \in \{1,\dots,n\}.$$
Wir definieren nun die Matrix $B = (b_{j\ell})_{1\leqq j\leqq n,1\leqq \ell\leqq n}$ durch
$$b_{j\ell} := \begin{cases} 0 & \text{falls } j<\ell \\ a_{j\ell} & \text{falls } j>\ell \\ \frac{a_{j\ell}}{2} & \text{falls } j=\ell. \end{cases}$$
Dann ist B schon mal per Definition eine untere Dreiecksmatrix. Nun setzen wir $(c_{j\ell})_{1\leqq j\leqq n,1\leqq \ell\leqq n} := B + B^\intercal$ und betrachten drei Fälle.

Fall 1: $j=\ell$: In diesem Fall gilt
$$c_{j\ell} = c_{jj} = b_{jj} + b_{jj} = \frac{a_{jj}}{2} + \frac{a_{jj}}{2} = a_{j\ell}.$$
Fall 2: $j<\ell$: In diesem Fall gilt
$$c_{j\ell} = b_{j\ell} + b_{\ell j} = 0 + a_{\ell j} = a_{\ell j} = a_{j\ell}.$$
Fall 3: $j>\ell$: In diesem Fall gilt
$$c_{j\ell} = b_{j\ell} + b_{\ell j} = a_{j\ell} + 0 = a_{j\ell}.$$
Zusammen liefert dies $A = B + B^\intercal$ und somit die Behauptung.

Aufgabe H 16. *Unipotente untere Dreiecksmatrizen und lineare Gleichungssysteme*

Sei $\mathcal{UD}^n$ die Menge aller unterer Dreiecksmatrizen $A = (a_{j\ell})_{1\leqq j\leqq n,1\leqq \ell\leqq n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $a_{jj}=1$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über $n\in\mathbb{N}$, dass
$$\left\{x\in\mathbb{K}^n \,\middle|\, Ax=b\right\} = \left\{x\in\mathbb{K}^n \,\middle|\, x_1 = b_1 \text{ und } x_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j \text{ für alle } 2 \leqq k \leqq n\right\}$$
für alle $A\in\mathcal{UD}^n$ und $b\in\mathbb{K}^n$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

IA Wir zeigen die Aussage für $n=1$: Für $n=1$ ist $\mathcal{UD}^n = \{1\}$ und daher

$$\left\{x \in \mathbb{K}^1 \,\middle|\, Ax = b\right\} = \left\{x \in \mathbb{K} \,\middle|\, x = b\right\} = \{b\}$$

für alle $A \in \mathcal{UD}^1$ und alle $b \in \mathbb{K}^1$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. es gilt

$$\left\{x \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, Ax = b\right\} = \left\{x \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, x_1 = b_1 \text{ und } x_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j \text{ für alle } 2 \leqq k \leqq n\right\}$$

für alle $A \in \mathcal{UD}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$ gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: Seien $A \in \mathcal{UD}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{K}^{n+1}$ beliebig. Wir haben die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ zu bestimmen. Da A eine Unipotente untere Dreiecksmatrix ist, lässt sich dieses LGS auch darstellen als

$$\left(\frac{\tilde{b}}{b_{n+1}}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \tilde{a} & 1 \end{array}\right)\left(\frac{\tilde{x}}{x_{n+1}}\right) = \left(\frac{\tilde{A}\tilde{x}}{x_{n+1} + \tilde{a}\tilde{x}}\right)$$

mit

$$\tilde{a} = (a_{n+1,\ell})_{1 \leqq \ell \leqq n} \in \mathbb{K}^{1\times n}, \quad \tilde{x} = (x_\ell)_{1 \leqq \ell \leqq n} \in \mathbb{K}^n, \quad \tilde{b} = (b_\ell)_{1 \leqq \ell \leqq n} \in \mathbb{K}^n$$

und

$$\tilde{A} = (a_{j\ell})_{1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq \ell \leqq n} \in \mathcal{UD}^n.$$

Damit lässt sich die gesuchte Lösungsmenge (etwas klobig) darstellen als

$$\begin{aligned}&\left\{x \in \mathbb{K}^{n+1} \,\middle|\, Ax = b\right\} \\ &\qquad = \left\{\left(\frac{\tilde{x}}{x_{n+1}}\right) \in \mathbb{K}^{n+1} \,\middle|\, x_{n+1} = b_{n+1} - \tilde{a}\tilde{x} \text{ und } \tilde{x} \in \left\{\tilde{x} \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Wir können nun beobachten, dass $x_{n+1} = b_{n+1} - \tilde{a}\tilde{x} = b_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j}x_j$ gilt und zusätzlich die Induktionshypothese anwenden auf $\left\{\tilde{x} \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}\right\}$. Dies liefert dann die gewünschte Darstellung und da sowohl $A \in \mathcal{UD}^{n+1}$ als auch $b \in \mathbb{K}^{n+1}$ beliebig waren, folgt die Behauptung.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 17. *Lineares Gleichungssystem*

Gegeben sei
$$
\left\{\begin{array}{rcr}
x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 11x_5 &=& 60 \\
-4x_1 - 7x_2 + 19x_3 - 22x_4 - 62x_5 &=& -304 \\
-2x_1 + 2x_3 - 4x_4 - 10x_5 &=& -56 \\
x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &=& 28 \\
2x_1 + 6x_2 - 19x_3 + 16x_4 + 46x_5 &=& 204
\end{array}\right.
$$
Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix und lösen Sie das LGS mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Gibt es eine Lösung des Gleichungssystems, in der alle Variablen den gleichen Wert (d.h. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$) annehmen?

Lösungshinweise hierzu: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 60 \\
-4 & -7 & 19 & -22 & -62 & -304 \\
-2 & 0 & 2 & -4 & -10 & -56 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & 28 \\
2 & 6 & -19 & 16 & 46 & 204
\end{array}\right].
$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus liefert:

$$
\begin{array}{r}
\\
Z_2 + 4\,Z_1 : \\
Z_3 + 2\,Z_1 : \\
\\
Z_5 - 2\,Z_1 :
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 60 \\
0 & -3 & 11 & -6 & -18 & -64 \\
0 & 2 & -2 & 4 & 12 & 64 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & 28 \\
0 & 4 & -15 & 8 & 24 & 84
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
Z_2 \leftrightarrow Z_4 : \\
\\
Z_2 \leftrightarrow Z_4 : \\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 60 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & 28 \\
0 & 2 & -2 & 4 & 12 & 64 \\
0 & -3 & 11 & -6 & -18 & -64 \\
0 & 4 & -15 & 8 & 24 & 84
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
Z_3 - 2\,Z_2 : \\
Z_4 + 3\,Z_2 : \\
Z_5 - 4\,Z_2 :
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 60 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & 28 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & -7 & 0 & 0 & -28
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\frac{1}{2}\,Z_3 : \\
\\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 60 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & 28 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & -7 & 0 & 0 & -28
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ Z_4 - 5\,Z_3 : \\ Z_5 + 7\,Z_3 : \\
Z_1 + 2\,Z_3 : \\ Z_2 + 2\,Z_3 : \\ \\ \\ \\
Z_1 - 1\,Z_2 : \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 60 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & 28 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & 0 & 4 & 11 & 68 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 36 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 32 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 36 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] .
\end{array}
$$

Eine spezielle Lösung von S ist damit

$$
\begin{pmatrix} 32 \\ 36 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .
$$

Die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c}
1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] .
$$

Eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist folglich nach Satz 3.7.6

$$
B\colon \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .
$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ 36 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} .
$$

Gibt es $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 32 \\ 36 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix} ?$$

Ja, $a = \lambda = \mu = 4$.

Alternativ: Für $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ ergibt sich $\left\{ \begin{array}{rcr} 15x_1 & = & 60 \\ -76x_1 & = & -304 \\ -14x_1 & = & -56 \\ 7x_1 & = & 28 \\ 51x_1 & = & 204 \end{array} \right.$.

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $x_1 = 4 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Aufgabe H 18. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*

Gegeben seien die linearen Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} x+3y & y & -2x \end{pmatrix}^\intercal$, $\mathrm{id}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto x$ und $\mathrm{id}_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto x$. Wir benutzen die Standardbasis E_2 und eine weitere Basis $B\colon b_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$, $b_2 := \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$ von $\mathbb{R}^2$, sowie die Standardbasis E_3 und eine weitere Basis $C\colon c_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{E_2}$, ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B$, ${}_{E_3}(\mathrm{id}_3)_C$, ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ und ${}_C\alpha_B$.

Lösungshinweise hierzu: Wir bilden die Basiselemente von E_2 unter α ab und stellen diese als Linearkombination der Basiselemente von E_3 dar:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_3$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \ .$$

Die beschreibende Marix lautet daher ${}_{E_3}\alpha_{E_2} = \left({}_{E_3}(\alpha(b_1)) \;\middle|\; {}_{E_3}(\alpha(b_2)) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir bilden die Basiselemente von B unter id_2 ab und stellen diese als Linearkombination der Basiselemente von E_2 dar:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \alpha(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2 \ .$$

Die beschreibende Marix lautet daher ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B = \left({}_{E_2}(b_1) \;\middle|\; {}_{E_2}(b_2) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ebenso erhält man ${}_{E_3}(\mathrm{id}_3)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
(für ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ muss man sich überlegen, wie man die Standardbasisvektoren als Linearkombinationen von c_1, c_2, c_3 darstellen kann).
Um ${}_C\alpha_B$ zu bestimmen, bilden wir die Basiselemente von B unter α ab und stellen diese als Linearkombination der Basiselemente von C dar:

$$\begin{aligned} b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \alpha(b_1) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 5 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 + (-4) \cdot c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \alpha(b_2) &= \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-5) \cdot c_1 + (-3) \cdot c_2 + \frac{1}{2} \cdot c_3 \,. \end{aligned}$$

Die beschreibende Marix lautet daher

$${}_C\alpha_B = \left({}_C\alpha(b_1)) \;\middle|\; {}_C\alpha(b_2)) \;\middle|\; {}_C\alpha(b_3)) \right) = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -3 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} {}_C\alpha_B &= {}_C(\mathrm{id}_3 \circ \alpha \circ \mathrm{id}_2)_B \\ &= {}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3} \cdot {}_{E_3}\alpha_{E_2} \cdot {}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -3 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe H 19. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Bild, Kern*
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a + d = 0 \right\}$. Die Basis $B\colon B_1, B_2, B_3$ von V ist gegeben durch die Matrizen $B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Wir verwenden $S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in V$ zur Definition der Abbildung $\varphi\colon V \to V\colon A \mapsto SA - AS$.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist und bestimmen Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$.

Lösungshinweise hierzu: Für $X, Y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(X+Y) &= S(X+Y) - (X+Y)S \\ &= SX + SY - XS - YS = SX - XS + SY - YS \\ &= \varphi(X) + \varphi(Y) \end{aligned}$$

und

$$\varphi(\lambda X) = S(\lambda X) - (\lambda X)S = \lambda(SX) - \lambda(XS) = \lambda(SX - XS) = \lambda\varphi(X) \,.$$

Also ist φ linear.

Wir bilden die Basiselemente unter φ ab:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\-4&-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\4&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\-6&0\end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}4&4\\-4&-4\end{pmatrix} &= 0\cdot B_1+4\cdot B_2+4\cdot B_3\ ,\\ \begin{pmatrix}2&4\\4&-2\end{pmatrix} &= 4\cdot B_1+0\cdot B_2+2\cdot B_3\ ,\\ \begin{pmatrix}0&-2\\-6&0\end{pmatrix} &= -4\cdot B_1+2\cdot B_2+0\cdot B_3\ .\end{aligned}$$

Die beschreibende Marix lautet daher

$${}_B\varphi_B = \left({}_B(\varphi(b_1)) \;\middle|\; {}_B(\varphi(b_2)) \;\middle|\; {}_B(\varphi(b_3))\right) = \begin{pmatrix}0&4&-4\\4&0&2\\4&2&0\end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$ sowie eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$.
Hinweis: $\mathrm{Bild}\,(\varphi)=\{A\in V \mid {}_BA\in \mathrm{Bild}\,(\alpha)\}$, $\mathrm{Kern}\,(\varphi)=\{A\in V \mid {}_BA\in \mathrm{Kern}\,(\alpha)\}$ mit $\alpha\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon v\mapsto {}_B\varphi_B\cdot v$.

Lösungshinweise hierzu: Es ist $\mathrm{Bild}\,(\alpha)=\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}\right)$.

Da einerseits

$$\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$$

und andererseits die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, ist $\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\alpha)$.

Somit besteht eine mögliche Basis von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$ aus den Matrizen $M:=4B_2+4B_3=\begin{pmatrix}4&4\\-4&-4\end{pmatrix}$ und $N:=4B_1+2B_3=\begin{pmatrix}2&4\\4&-2\end{pmatrix}$; es gilt ja ${}_BM=\left(\begin{smallmatrix}0\\4\\4\end{smallmatrix}\right)$ und ${}_BN=\left(\begin{smallmatrix}4\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$.

$\mathrm{Kern}\,(\alpha)$ ist der Lösungsraum des homogenen LGS ${}_B\varphi_B\cdot x=0$.

Der Gauß–Algorithmus liefert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{Z_1 \leftrightarrow Z_3 \\ Z_2 \leftrightarrow Z_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{4} Z_2 \\ \frac{1}{2}(Z_3 - Z_1)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{Z_2 + Z_3}{\overset{\frac{1}{4}(Z_1 - 2Z_2)}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

Der Lösungsraum ist also $\mathcal{L} = \{\lambda(-\frac{1}{2}, 1, 1)^\intercal | \lambda \in \mathbb{R}\}$ und daher ist $\operatorname{Kern}(\alpha)$ eindimensional mit Basis $(-\frac{1}{2}, 1, 1)^\intercal$. Für $\operatorname{Kern}(\varphi)$ ergibt sich daher die mögliche Basis $-\frac{1}{2}B_1 + B_2 + B_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Alternativ:

Es ist $\operatorname{Kern}(\varphi) = \{A \in V : \varphi(A) = 0\}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \iff d = -a$.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= SA - AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c + 3b & 4b - 2a \\ -6a - 4c & -3b - c \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Also gilt

$$A \in \operatorname{Kern}(\varphi) \iff \varphi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c + 3b & 4b - 2a \\ -6a - 4c & -3b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dies liefert das homogene LGS:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{Z_1 \leftrightarrow Z_2 \\ Z_4 - Z_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{Z_3 + 6Z_1}{\overset{-\frac{1}{2} Z_1}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{Z_1 + \frac{2}{3} Z_2 \\ \frac{1}{3} Z_2 \\ Z_3 + 4Z_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

Der Lösungsraum ist also $\mathcal{L} = \{\lambda(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)^\intercal \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})^\intercal \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Jede Basis von $\operatorname{Kern}(\varphi)$ besteht also aus genau einem Vektor; und dieser muss ein nicht triviales Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ sein.

Da φ linear ist, ist $\operatorname{Bild}(\varphi)$ ein Untervektorraum von V. Nach der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{Bild}(\varphi) = \dim V - \dim \operatorname{Kern}(\varphi) = 3 - 1 = 2$. Da $\varphi(B_1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

und $\varphi(B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, bilden diese Matrizen eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$.

Alternative 2:

Es ist $\mathrm{Bild}\,(\varphi) = \{\varphi(A) | A \in V\}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \Leftrightarrow d = -a$.

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= SA - AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c+3b & 4b-2a \\ -6a-4c & -3b-c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Suche eine Basis. Sei $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}\,(\varphi)$.

- Fall 1: $u = 0$. Dann ist $c + 3b = 0$, also $c = -3b$.

Wir erhalten $X = \begin{pmatrix} 0 & 4b-2a \\ 3(4b-2a) & 0 \end{pmatrix}$

Subfall 1.1: $4b - 2a = 0$, dann ist $X = 0$ (und taugt nicht als Basiselement).

Subfall 1.2: $4b - 2a \neq 0$, dann ist $X = (4b - 2a) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Somit liegt die Matrix $X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$, erzeugt aber nicht ganz $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$, wie wir in Fall 2 sehen.

- Fall 2: $u \neq 0$. Dann ist $c + 3b = u$, also $c = u - 3b$.

Wir erhalten $X = \begin{pmatrix} u & 4b-2a \\ 3(4b-2a)-4u & -u \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + (4b-2a) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{X_1}$.

Jede Matrix $X \in \mathrm{Bild}\,(\varphi)$ lässt sich also als Linearkombination von
$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ und $X_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ darstellen.

Da diese Matrizen linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$.

Aufgabe H 20. *Gauß -Algorithmus*

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 3 & 7 \\ 6 & -4 & -1 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^4$ des reellen Gleichungssystems $Ax = b$, für $b \in B$, mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Lösungshinweise hierzu: Der Gauß–Algorithmus liefert:

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 3 & 7 & 0 \\ 6 & -4 & -1 & 11 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - 6Z_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ -\frac{1}{10} Z_2 \\ Z_3 - Z_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} Z_1 - Z_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist also nach Satz 3.7.6

$$B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist also

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Fall $b = \begin{pmatrix} 6 & -13 & 11 \end{pmatrix}^\intercal$.
Wir führen die selben Umformungen wie oben durch:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -13 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - 6Z_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -25 \\ -25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ -\frac{1}{10} Z_2 \\ Z_3 - Z_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} Z_1 - Z_2 \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die spezielle Lösung des Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 6 & -13 & 11 \end{pmatrix}^\intercal$ ist also $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Fall $b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}^\intercal$.
Wir erhalten:

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -8 & 3 & 7 & 1 \\ 6 & -4 & -1 & 11 & 8 \end{array}\right] \begin{matrix} \longrightarrow \\ Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - 6Z_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & -20 \end{array}\right].$$

Somit ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Regularität von Bandmatrizen*

Gegeben sei die folgende Matrix $A_r \in \mathbb{R}^{39\times 39}$:

$$A_r := \begin{pmatrix} 2+4!+r^2 & 2r & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2^5 & 2+5!+r^2 & -2r & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^6 & 2+6!+r^2 & 2r & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2^{40} & 2+40!+r^2 & 2r & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2^{41} & 2+41!+r^2 & -2r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{42} & 2+42!+r^2 \end{pmatrix}.$$

Gibt es Werte $r \in \mathbb{R}$, für welche diese Matrix A_r vollen Rang hat? Wenn ja, welche?

Hinweis: Zeigen Sie, falls nötig, zuerst $|(A_r x)_j| \geqq |a_{j,j}x_j| - \left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n a_{j,k}x_k\right|$ für geeignete $1 \leqq j \leqq 39$. (Veranschaulichen Sie sich gegebenenfalls die Situation mit expliziten Werten für x, beispielsweise für die Teilmatrix, welche aus den ersten 7 Zeilen und Spalten besteht.) Sie dürfen auch vergangene Präsenz- und Hausaufgaben verwenden!

Lösungshinweise hierzu: Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Angenommen, es existiert $x \in \operatorname{Kern}(A_r)$ (also $A_r x = 0$) mit $x \neq 0$. Dann existiert insbesondere $j \in \{1,2,...,39\}$ mit $x_j \neq 0$ und $|x_j| \geqq |x_k|$ für alle $1 \leqq k \leqq 39$. Wir nutzen den Hinweis:

$$0 = \left| a_{j,j}x_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n a_{j,k}x_k \right| \geqq |a_{j,j}x_j| - \left| \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n a_{j,k}x_k \right|$$

Hieraus folgt wegen $|x_j| > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\geqq |a_{j,j}| - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n |a_{j,j}| \underbrace{\frac{|x_k|}{|x_j|}}_{\leqq 1} \geqq 2 + (j+3)! + r^2 - 2^{j+3} - 2|r| - 1 = \\ &= (|r|-1)^2 + \left((j+3)! - 2^{j+3}\right) \overset{\text{P3(a)}}{>} 0 \qquad ↯ \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, das heißt die Annahme muss falsch gewesen sein. Insbesondere hat A_r für alle $r \in \mathbb{R}$ vollen Rang.

Hinweis: Dieses Prinzip der strikten (oder starken) Diagonaldominanz ($|a_{j,j}| > \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n |a_{j,k}| \,\forall j$) lässt sich, wie am Beweis unschwer zu erkennen, auf alle quadratischen Matrizen anwenden. Für Bandmatrizen - also Matrizen, die nur auf der Haupt- und einigen wenigen Nebendiagonalen Einträge ungleich 0 haben - ist es jedoch von besonderem Interesse, da es hier besonders einfach und schnell überprüft werden kann.

Aufgabe H 22. *Regularität und Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme*

Gegeben seien

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ \alpha & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 & -32 & \alpha+2 \end{pmatrix}, \qquad b_\beta := \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$. Für welche α ist A_α regulär?

(b) Wann ist das LGS $A_\alpha x = b_\beta$ lösbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen die (affine) Dimension $D_{\alpha,\beta}$ des affinen Unterraums $\mathcal{L}_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid A_\alpha x = b_\beta\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir entwickeln nach geeigneten Zeilen und Spalten:

$$\det(A_\alpha) \overset{\text{Z4}}{=} (-1)^{4+1}\alpha \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 0 \\ -28 & 0 & -32 & \alpha+2 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{S4}}{=} -\alpha \cdot (-1)^{4+4}(\alpha+2) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} = -\alpha\,(\alpha+2)\cdot(32 - 84 - 144) =$$

$$= 196\alpha(\alpha+2)$$

Folglich ist A_α für alle $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 0\}$ regulär.

(b) Sei $x = (x_1, ..., x_5)^\mathsf{T}$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- $\alpha = 0, \beta \neq 0$: In diesem Falle existiert keine Lösung! (Z4)
- $\alpha = 0, \beta = 0$: Für $\alpha = 0$ gilt $A_0 x = 0$ genau dann wenn $\tilde{x} := (x_2, ..., x_5)^\mathsf{T}$ die Gleichung $\widetilde{(A_0)}_{4,1}\tilde{x} = 0 \in \mathbb{R}^4$ für die $(4,1)$-Adjunkte $\widetilde{(A_0)}_{4,1}$ löst. Mit dem Lösungsweg in (a) sieht man, dass diese Determinante $-2 \cdot 196$ hat und damit regulär ist. Da folglich nur x_1 frei wählbar ist und alle anderen $x_i = 0$ sein müssen, gilt $\mathcal{L}_{0,0} = \mathrm{L}\left((1,0,0,0,0)^\mathsf{T}\right)$ und somit $D_{0,0} = 1$.
- $\alpha = -2$: Analog zum vorherigen Fall erhält man, dass $x = (x_1, ..., x_5)^T$ die Gleichung $A_{-2}x = b_\beta$ genau dann löst, wenn $\tilde{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ der Gleichung

  $$\widetilde{(A_{-2})}_{(5,5)}\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

  genügt - unabhängig von x_5 und β! (Man beachte hierbei, dass für $\alpha = -2$ die letzte Zeile ein Vielfaches der 3. Zeile ist und jene Zeile daher keinen Einfluss auf die Lösbarkeit oder die Eindeutigkeit der Lösung hat.)

  Entwickelt man die Determinante von von $(A_{-2})_{(5,5)}$ zuerst nach der 4. Zeile, erhält man

  $$(A_{-2})_{(5,5)} = (-1)^{4+1} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} = -392,$$

folglich existiert genau ein solches $\tilde{x}$. Hieraus ergibt sich mit Satz 3.5.4

$$\mathcal{L}_{-2,\beta} = \begin{pmatrix} \widetilde{(A_{-2})_{(5,5)}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

mithin also $D_{-2,\beta} = 1$.

- $\alpha \notin \{-2, 0\}$: $D_{\alpha,\beta} = 0$. (Direkte Konsequenz aus (a).)

(b) Alternativer Weg mittels Rangbestimmung: Wir berechnen mittels Gauß

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ \alpha & 6 & 4 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -28 & 0 & -32 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_4: \\ Z_3 - 7Z_1: \\ \\ Z_4 + 4Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -13 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 6Z_1 - Z_2: \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 0 & 14 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -13 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}Z_1 + Z_3: \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -13 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 13Z_1 + 14Z_3: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -294 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{14}Z_1 \leftrightarrow Z_4: \\ \frac{1}{882}\left(147Z_2+2Z_3\right): \\ -\frac{1}{294}Z_3: \\ Z_4 \leftrightarrow \frac{1}{14}Z_1: \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right].$$

Hier sehen wir:

- Für $\alpha \neq 0, -2$ dürfen wir ferner die erste Zeile durch α und die letzte durch $\alpha+2$ teilen und erhalten eine eindeutige Lösung, also $D_{\alpha,\beta} = 0$
- Für $\alpha = -2$ hat die Matrix Rang 4 und der Vektor auf der rechten Seite liegt im Bild der Spalten, was uns auf die affine Dimension 1 führt.
- Für $\alpha = \beta = 0$ müssen wir zusätzlich noch Zeilen und Spalten vertauschen, was schließlich auf
$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
führt. Auch diese Matrix hat Rang 4, womit der der Lösungsraum, der hier dem Kern entspricht, Dimension 1 hat.
- Für $\alpha = 0 \neq \beta$ erhalten wir
$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right],$$
was nicht lösbar ist.

Aufgabe H 23. *Lineare Abbildungen und Bijektivität*

Gegeben sei der Raum $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ mit der (Monom-)Basis $M\colon 1, X, X^2, X^3$. Abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung

$$F^\alpha\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}\colon p \mapsto p - \alpha p' - \alpha X^2 \cdot p'' + \frac{1}{6}\left(1+\alpha\right) X^3 \cdot p'''.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_M(F^\alpha)_M$.

(b) Bestimmen Sie $\det {}_M(F^\alpha)_M$ und geben Sie an, für welche α die Abbildung F^α bijektiv ist.

(c) Für welche $\alpha \in [-2, 2]$ hat die Differentialgleichung

$$F^\alpha(p) = -X^2 - 2X + 2$$

eine polynomiale Lösung (also eine Lösung in $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$) ?
Für welche α ist diese eindeutig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Bilder der Monombasis sind gegeben durch 1, $X-\alpha$, $X^2-2\alpha X-2\alpha X^2$ und $X^3-3\alpha X^2-6\alpha X^3+(1+\alpha)X^3$, folglich ergibt sich die Darstellungsmatrix

$$_M\left(F^\alpha\right)_M = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\alpha & -3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2-5\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Da $_M\left(F^\alpha\right)_M$ (obere) Dreiecksgestalt hat, können wir die Determinante direkt ablesen:

$$\det {_M\left(F^\alpha\right)_M} = (1-2\alpha)(2-5\alpha).$$

Folglich ist F^α für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\}$ bijektiv.

(c) Ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis B und $\beta : V \to V$ eine lineare Abbildung, so existiert für $b \in V$ genau dann eine eindeutige Lösung $x \in V$ mit $\beta(x) = b$, wenn das LGS $_B\beta_B y = {_Bb}$ eine eindeutige Lösung $y \in \mathbb{K}^n$ hat. In diesem Falle gilt $_Bx = y$. In unserem Falle gilt $_Bb = (0,2,-2,-1)^\intercal$, somit erhalten wir:

- Für $\alpha \in [-2,2] \setminus \{\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\}$ hat die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung in $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$. (Folgerung aus (b))
- Aus den letzten beiden Zeilen lässt sich folgern, dass für $\alpha = \frac{1}{2}$ keine Lösung existiert. ($-\frac{1}{2}x_4 = 0 \wedge -\frac{3}{2}x_4 = -1$ ist unlösbar.)
- Für $\alpha = \frac{2}{5}$ hingegen gilt:

$$_M\left(F^{2/5}\right)_M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Zeilen- und damit auch Spaltenrang 3.
Da ferner $\operatorname{Bild}\left({_M\left(F^{2/5}\right)_M}\right) \subseteqq \left\{(x_1,x_2,x_3,0)^\intercal \in \mathbb{R}^4\right\}$ gilt, sind infolge ihrer Dimensionen beide Räume identisch, insbesondere ist $-X^2-2X+2$ im Bild von $F^{2/5}$. Aufgrund der fehlenden Injektivität existieren somit unendlich viele Lösungen.

Aufgabe H 24. *Orthonormalbasen & Basiswechsel*

Gegeben sei die Basis $B : b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie eine ONB $F : f_1, f_2, f_3, f_4$ des $\mathbb{R}^4$, sodass $\operatorname{L}(b_1) = \operatorname{L}(f_1)$, $\operatorname{L}(b_1,b_2) = \operatorname{L}(f_1,f_2)$, $\operatorname{L}(b_1,b_2,b_3) = \operatorname{L}(f_1,f_2,f_3)$ und $\operatorname{L}(b_1,b_2,b_3,b_4) = \operatorname{L}(f_1,f_2,f_3,f_4)$ gelten.

(b) Sei E wie gehabt die Standardbasis. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $_E\mathrm{id}_B$, $_B\mathrm{id}_E$, $_F\mathrm{id}_E$ und berechnen Sie $_F\mathrm{id}_B$.

(c) Geben Sie ferner die Cofaktor-Matrizen von $_F\mathrm{id}_E$ und $_E\mathrm{id}_B$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir beginnen mit der Normierung von b_1:

$$f_1 := \frac{1}{|b_1|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Wir verfahren weiter wie in 4.5.10 beschrieben:

$$f_2^* := b_2 - \langle b_2 \,|\, f_1\rangle f_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$f_2 := \frac{1}{|f_2^*|} f_2^* = \frac{9}{\sqrt{4+64+4}} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$f_3^* := b_3 - \langle b_3 \,|\, f_1\rangle f_1 - \langle b_3 \,|\, f_2\rangle f_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{9}\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{18}\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = f_3$$

$$f_4^* := b_4 - \langle b_4 \,|\, f_1\rangle f_1 - \langle b_4 \,|\, f_2\rangle f_2 - \langle b_4 \,|\, f_3\rangle f_3 = \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{0}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f_4 := \frac{1}{|f_4^*|} f_4^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(b) Die erste Basiswechselmatrix lesen wir direkt ab:

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Für die zweite liefert Gaußelimination für $\left[\ {}_E\mathrm{id}_B \,\middle\|\, {}_E\mathrm{id}_E\ \right]$ $\left({}_E\mathrm{id}_E = E_4 = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$:

$$\begin{array}{r} \\ 2\cdot Z_2 - Z_1: \\ Z_3 - Z_1: \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2&0&1&-1&1&0&0&0\\ 0&2&-3&5&-1&2&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0&1&0\\ 0&0&-1&-1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+Z_3: \\ Z_2-5\cdot Z_3: \\ \\ Z_4+Z_3: \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&2&-3&0&4&2&-5&0\\ 0&0&0&1&-1&0&1&0\\ 0&0&-1&0&-1&0&1&1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+Z_4: \\ Z_2-3\cdot Z_4: \\ Z_3 \rightleftarrows Z_4: \\ Z_4 \rightleftarrows Z_3: \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2&0&0&0&-1&0&2&1\\ 0&2&0&0&7&2&-8&-3\\ 0&0&-1&0&-1&0&1&1\\ 0&0&0&1&-1&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\cdot Z_1: \\ \frac{1}{2}\cdot Z_2: \\ (-1)\cdot Z_3: \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&1&\frac{1}{2}\\ 0&1&0&0&\frac{7}{2}&1&-4&-\frac{3}{2}\\ 0&0&1&0&1&0&-1&-1\\ 0&0&0&1&-1&0&1&0 \end{array}\right],$$

was uns auf

$${}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1&0&2&1\\ 7&2&-8&-3\\ 2&0&-2&-2\\ -2&0&2&0 \end{pmatrix}$$

führt. Für ${}_F\mathrm{id}_E$ nutzen wir, dass die Spalten nach Konstruktion eine ONB bilden und schreiben den Bruch $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ als Vorfaktor, das heißt

$${}_F\mathrm{id}_E = \left({}_E\mathrm{id}_F\right)^{-1} = \left({}_E\mathrm{id}_F\right)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} f_1^{\mathsf{T}}\\ f_2^{\mathsf{T}}\\ f_3^{\mathsf{T}}\\ f_4^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}&\sqrt{2}&2\sqrt{2}&0\\ -1&4&-1&0\\ 0&0&0&-3\sqrt{2}\\ -3&0&3&0 \end{pmatrix}.$$

Mithin ergibt sich

$$\begin{aligned} {}_F\mathrm{id}_B &= {}_F\mathrm{id}_{EE}\mathrm{id}_B = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}&\sqrt{2}&2\sqrt{2}&0\\ -1&4&-1&0\\ 0&0&0&-3\sqrt{2}\\ -3&0&3&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&0&1&-1\\ 1&1&-1&2\\ 2&0&1&0\\ 0&0&-1&-1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 9\sqrt{2}&\sqrt{2}&3\sqrt{2}&0\\ 0&4&-6&9\\ 0&0&3\sqrt{2}&3\sqrt{2}\\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dass das Ergebnis obere Dreiecksgestalt hat, ist hier kein Zufall, sondern eine Folge der Konstruktion der Basis F: Es gilt $b_j \in \mathrm{L}(b_1, ..., b_j) = \mathrm{L}(f_1, ..., f_j)$ für $1 \leqq j \leqq 4$.

(c) Die Cofaktor-Matrizen lassen sich mit Satz 3.13.4 und (b) sehr einfach bestimmen. Gemäß 3.13.14 gilt nämlich für die Cofaktor-Matrix $\tilde{A}$ einer invertierbaren Matrix A:

$$A\tilde{A}^{\intercal} = \det(A)E_n \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \left(\det(A)A^{-1}\right)^{\intercal}.$$

Da die Spalten von ${}_F\mathrm{id}_E$ eine ONB bilden, müssen wir nur noch das Vorzeichen bestimmen: Es gelten $\det\left({}_F\mathrm{id}_E\right) = \pm 1$ und $\left({}_F\mathrm{id}_E\right)^{-1} = \left({}_F\mathrm{id}_E\right)^{\intercal}$. Für $\det\left({}_F\mathrm{id}_E\right)$ erhalten wir durch Entwicklung nach der letzten Spalte (man beachte die Linearität von $\det$ bezüglich jeder Spalte/Zeile!):

$$\begin{aligned}\det\left({}_F\mathrm{id}_E\right) &= \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^4 (-1)^{3+4} \cdot \left(-3\sqrt{2}\right) \det\left(\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \frac{1}{27 \cdot 2\sqrt{2}}\left(24\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - (-24\sqrt{2} - 3\sqrt{2})\right) = ... = 1\end{aligned}$$

und folglich

$$\widetilde{{}_F\mathrm{id}_E} = {}_F\mathrm{id}_E = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\sqrt{2} \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich durch Entwicklung nach der 2. Spalte für ${}_E\mathrm{id}_B$:

$$\begin{aligned}\widetilde{{}_E\mathrm{id}_B} &= \det({}_E\mathrm{id}_B)\left({}_B\mathrm{id}_E\right)^{\intercal} = \\ &= \underbrace{(-1)^{2+2} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right)}_{=2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{\intercal} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe H 25. *Drehungen in* $\mathbb{R}^2$

Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie die Zusatzbemerkung in Satz 4.6.12 (1), in dem Sie für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ den **orientierten** (das heißt in mathematisch positiver Richtung gemessenen) Winkel $\beta(v) \in [0, 2\pi)$ zwischen v und $A_\alpha v$ ausgehend von v bestimmen.
Hinweis: Für $v \neq 0$ ist die ONB B: $\frac{1}{|v|}v$, $\frac{1}{|v|}A_{\pi/2}v$ ein Rechtssystem.

(b) Nutzen Sie für $w \in \mathbb{C}$ die kartesischen Koordinaten $(\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w))$, um für festes $z := a + bi \neq 0$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}\colon w \mapsto zw$ in diesen kartesischen Koordinaten anzugeben. Kombinieren Sie diese Darstellung mit der Polarkoordinatenform und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $|v| = 1$. Wir bestimmen zuerst den von $A_\alpha v$ und $v = (x,y)^T$ eingeschlossenen Winkel $\tilde{\beta}(v)$. Es gilt

$$\langle v \,|\, Av\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix} \right\rangle = \cos(\alpha)x^2 + \cos(\alpha)y^2 \overset{x^2+y^2=1}{=} \cos(\alpha)$$

sowie

$$|Av| = \underbrace{\sqrt{(\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y)^2 + (\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y)^2}}_{\text{Binomische Formel}} = .$$
$$= \sqrt{(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))x^2 + (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))y^2} = |v|$$

Mithin gilt folglich für den von v und $A_\alpha v$ eingeschlossenen Winkel $\tilde{\beta}(v) \in [0,\pi]$ $\cos(\tilde{\beta}(v)) = \cos(\alpha)$ und somit

$$\tilde{\beta}(v) = \alpha,\ \alpha \leqq \pi; \qquad \tilde{\beta}(v) = 2\pi - \alpha,\ \alpha > \pi. \tag{*}$$

Nun nutzen wir, dass $B : v, A_{\pi/2}v$ (in dieser Reihenfolge!) ein Rechtssystem ist. Für eine positive Orientierung ist es hinreichend und notwendig, dass $A_\alpha v$ im zu B gehörigen Koordinatensystem „oberhalb“ (beziehungsweise „nicht unterhalb“) der von v definierten Achse liegt. Formal gesehen muss also - da B Rechtssystem ist - der von $A_{\pi/2}v$ und $A_\alpha v$ eingeschlossene Winkel $\gamma(v)$ im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ liegen, mithin:

$$\begin{aligned}
& 0 \leqq \cos(\gamma(v)) \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leqq \left\langle A_{\pi/2}v \,\middle|\, A_\alpha v \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \\
& = -y\left(\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y\right) + x\left(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y\right) = \\
& = \sin(\alpha)\underbrace{\left(x^2 + y^2\right)}_{=1} \\
\overset{\alpha\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow}\ & \alpha \leqq \pi
\end{aligned}$$

Hier mit ergibt sich $\beta(v) = \tilde{\beta}(v) = \alpha$ für $\alpha \leqq \pi$. Für $\alpha > \pi$ erhalten wir die Drehung im positiven Sinne durch $\beta(v) = -\tilde{\beta}(v) + 2\pi \overset{(*)}{=} \alpha$. Der orientierte Winkel zwischen v und $A_\alpha v$ entspricht also stets α.

(b) Sei $z = a + bi$ und $w = x + yi$. Gemäß Konstruktion 1.7.1 gilt $f(w) \hat{=} (ax - by, ay + bx)$ beziehungsweise $f(w) \hat{=} \left(\begin{smallmatrix} ax-by \\ ay+bx \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, folglich lässt sich f schreiben als

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sei nun $r = |z|$ und $\varphi := \arg z$. Dann gilt mit $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$

$$f(x,y) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Mit Aufgabe (a) beziehungsweise Satz 4.6.12 (oder den Rechenregeln für die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen) sieht man, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z \neq 0$ einer Drehstreckung in der komplexen Zahlenebene mit Streckungsfaktor $|z|$ und Drehwinkel $\arg z$ entspricht.

Aufgabe H 26. *3D-Modell*
Sie finden das Modell unter:
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/11/Ebenen.shtml
Dargestellt sind die Ebenen

$$\begin{array}{rcll} 2x+3y-6z &=& 7 & \text{rot} \\ 20x-5y-4z &=& 21 & \text{grün} \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} x-y-2z &=& 0 & \text{gelb} \\ x-y+z &=& 0 & \text{blau} \\ x-y-(8+3\sqrt{6})z &=& 0 & \text{hellblau.} \end{array}$$

Ferner sei die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$\alpha\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\alpha\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\alpha_E$ an.

(b) Zeigen Sie: Die Punkte $P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal$, $Q = \begin{pmatrix}-7 & -7 & -7\end{pmatrix}^\intercal$, $R = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\end{pmatrix}^\intercal$ liegen in der roten Ebene. Bestimmen Sie die Ebene, in der ihre Bilder unter α liegen.

(c) Berechnen Sie die Determinante von ${}_E\alpha_E$. Entscheiden Sie: Beschreibt ${}_E\alpha_E$ eine Drehung oder eine Drehspiegelung? Berechnen Sie ferner die Fixpunktmenge von α.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrix ${}_E\alpha_E$ hat die Bilder der Standardbasis als Spalten: ${}_E\alpha_E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

(b) Da $2\cdot 2+3\cdot 1 = 7$, $2\cdot(-7)+3\cdot(-7)-6\cdot(-7) = 7$ und $2\cdot 2+3\cdot(-1)-6\cdot(-1) = 7$ gilt, liegen die Punkte P, Q, R in der roten Ebene. Ihre Bilder sind gegeben durch $\alpha(P) = {}_E\alpha_E \cdot P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\end{pmatrix}^\intercal$, $\alpha(P) = {}_E\alpha_E \cdot Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-7 & -35 & -7\end{pmatrix}^\intercal$ und $\alpha(R) = {}_E\alpha_E \cdot Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -7\end{pmatrix}^\intercal$ und liegen in der grünen Ebene.

(c) Nach der Regel von Sarrus (3.11.5) ist $\det({}_E\alpha_E) = \frac{1}{27}(1-8-8-4-4-4) = -1$. Zusätzlich ist ${}_E\alpha_E$ orthogonal. Also beschreibt ${}_E\alpha_E$ eine Drehspiegelung. Zur Bestimmung der Fixpunktmenge betrachten wir die Fixpunktgleichung $Av = v$. Dies führt auf das homogene LGS $(A-E_3)v = 0$. Wir erhalten $\left[\begin{array}{ccc||c} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0\end{array}\right] \rightsquigarrow$

$$\begin{array}{r} -\frac{3}{2}\cdot Z_1 : \\ Z_2+Z_1 : \\ Z_3+Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$, womit der Lösungsraum $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ ist.

Der Lösungsraum beschreibt eine Spiegelebene Ebene S, welche den Ursprung $(0,0,0)$ enthält und die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal$ und $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\intercal$ hat. Wir berechnen den Normalenvektor n mittels $n = \dfrac{1}{|\hat{n}|}\hat{n}$ wobei

$$\hat{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

mit $|\hat{n}| = \sqrt{3}$. Somit ist $n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^\intercal$. Da $(0,0,0)$ ein Punkt der Ebene ist, erhalten wir nach Bemerkung 2.9.7.1 zwei mögliche Darstellung für die Hesse-Normalform: $S\colon \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = 0$ beziehungsweise $S\colon -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = 0$. Dies ist gerade die blaue Ebene. Dass es sich hierbei tatsächlich um eine Spiegelebene handelt, läßt sich wie folgt einsehen: Die aufspannenden Vektoren der Ebene (und damit auch alle Vektoren in der Ebene) werden durch A nicht verändert (Folgerung aus der Fixpunktgleichung). Der Normalenvektor der Ebene hingegen schon: Eine kurze Rechnung zeigt $A\hat{n} = -\hat{n}$, das heißt $\hat{n}$ ändert seine Orientierung (und nur diese). Berechnet man nun zu einen beliebigem Vektor v die Darstellung ${}_Bv = \begin{pmatrix}{}_Bv_1\\ {}_Bv_2\\ {}_Bv_3\end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $B : b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, so ergibt sich ${}_B(Av) = {}_B\left(\sum_{j=1}^3 {}_Bv_j Ab_j\right) = \begin{pmatrix}{}_Bv_1\\ {}_Bv_2\\ -{}_Bv_3\end{pmatrix}$, insbesondere hat α die Darstellung ${}_B\alpha_B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Dies ist eine Spiegelung bezüglich der b_1-b_2-Koordinatenebene des durch B gegebenen Koordinatensystems.

Aufgabe H 27. *Skalarprodukte und Isometrien für Matrizenräume*

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Drücken Sie die Bildungsvorschrift der Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}\colon (A,B) \mapsto F(A,B) := \operatorname{Sp}(A^\intercal B)$$

mittels der Matrizeneinträge aus und folgern Sie, dass F ein Skalarprodukt für Matrizen definiert.

(b) Geben Sie einen isometrischen Isomorphismus $\alpha\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$ an, das heißt eine Abbildung, die Folgendes erfüllt:

- **Isomorphie**: α ist linear und bijektiv
- **Isometrie**: Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt $\|A - B\| = |\alpha(A) - \alpha(B)|$, wobei $\|A\| := \sqrt{F(A,A)}$ die durch das Skalarprodukt aus (a) gegebene (Matrix-)Norm bezeichnet.

(c) Gewinnen Sie aus der Basis $C\colon c_1 := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^\intercal = A\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $A = (a_{j,k})_{1\leqq j\leqq m, 1\leqq k\leqq n}$, $B = (b_{j,k})_{1\leqq j\leqq m, 1\leqq k\leqq n}$. Dann gilt:

$$(A^\intercal B)_{j,k} = \sum_{l=1}^{m} (A^\intercal)[j,l]B[l,k] = \sum_{l=1}^{m} a_{l,j}b_{l,k} \qquad \Rightarrow$$

$$F(A,B) = \operatorname{Sp}(A^\intercal B) = \sum_{r=1}^{n} (A^\intercal B)_{r,r} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{l,r}b_{l,r} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} a_{l,r}b_{l,r}$$

Die Skalarprodukteigenschaften ergeben sich völlig analog zu denen des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^n$:

- **Symmetrie**: Folgt unmittelbar durch Vertauschung der Rollen von A und B: $F(B,A) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_{l,r} a_{l,r}$.
  Positive Definitheit: $F(A,A) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} a_{l,r}^2 \geqq 0$, Gleichheit genau dann wenn $a_{j,k} = 0$ für alle $1 \leqq j \leqq m, 1 \leqq k \leqq n$.
- **Additivität**:
  $$F(A, B+\tilde{B}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} a_{l,r}(b_{l,r} + \tilde{b}_{l,r}) = \underbrace{\sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} a_{l,r} b_{l,r}}_{F(A,B)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} a_{l,r} \tilde{b}_{l,r}}_{=F(A,\tilde{B})}.$$
- **Distributivität**:
  $$sF(A,B) = s\sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} a_{l,r} b_{l,r} = \underbrace{\sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} (s a_{l,r}) b_{l,r}}_{=F(sA,B)} = \underbrace{\sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} a_{l,r} (s b_{l,r})}_{=F(A,sB)}.$$

(b) Wir schreiben für $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ die Spalten untereinander:

$$\alpha(A) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Dann gelten offensichtlich

- $A \in \operatorname{Kern}(\alpha) \Leftrightarrow a_{j,k} = 0 \ \forall 1 \leqq j \leqq m,\ 1 \leqq k \leqq n \Leftrightarrow A = 0$ (Injektivität) und für jedes $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{mn})^\intercal \in \mathbb{R}^{mn}$ existiert $A = (a_{j,k})_{1 \leqq j \leqq m, 1 \leqq k \leqq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $a_{j,k} = \tilde{a}_{(k-1)\cdot m + j}$, welches $\alpha(A) = \tilde{a}$ erfüllt (Surjektivität).
- für $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  $$\lambda\alpha(A) + \mu\alpha(B) = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} \\ \lambda a_{2,1} + \mu b_{2,1} \\ \vdots \\ \lambda a_{m,n} + \mu b_{m,n} \end{pmatrix} = \alpha(\lambda A + \mu B)$$
  (die geforderete Linearität)
- für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  $$|\alpha(A) - \alpha(B)|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} \\ a_{2,1} - b_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,n} - b_{m,n} \end{pmatrix} \right|^2 = \sum_{l=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} (a_{l,r} - b_{l,r})^2 = \overset{((a))}{=} F(A-B, A-B),$$
  mithin ($\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist bijektiv) also die geforderte Längentreue. Eine andere naheliegende Möglichkeit wäre, zuerst nach Zeilen und dann nach Spalten zu sortieren. Alternativ wäre jede beliebige Koordinatenabbildung ${}^{C}\mathrm{koord} : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{mn}$

mit einer Orthonormalbasis C von $\mathbb{R}^{m\times n}$ denkbar. (Die ersten beiden Varianten sind genaugenommen Spezialfälle einer solchen.)

> **Nett zu wissen (a. k. a. „Wozu brauch' ich das?“)**: In der Praxis repräsentieren Matrizen häufig Bilder oder Signale, die von zwei Variablen (zum Beispiel Zeit-Ort oder Ort-Ort) abhängen. Mithilfe derartiger Isomorphismen lassen sich lineare Operationen/Gleichungen für selbige, wie sie unter anderem bei einer numerischen Simulation der Wärmeleitungsgleichung (oder Vergleichbarer Diffusionsprozesse) auftreten, ebenfalls als Matrix-Vektor-Produkte darstellen. Dies ermöglicht sehr effiziente Implementierungen in einer entsprechend optimierten Software/Sprache (MATLAB, Octave). Die vorgestellten Abbildungen entsprechen beispielsweise den Befehlen reshape(A,[],1)(kurz A(:)) beziehungsweise reshape(A',[],1). (Invertiert wird mit reshape(__,size(A))beziehungsweise reshape(__, size(A'))'.) Die Längentreue lässt sich dann so interpretieren, dass Fehlerschranken/-abschätzungen nicht umgerechnet werden müssen.

(c) Wir setzen $f_1 := \frac{1}{\|c_1\|}c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ und schreiben $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_F$ für $F(\cdot,\cdot)$. Dann ergeben sich:

$$\begin{aligned}
f_2^* &:= c_2 - \langle c_2\,|\,f_1\rangle_F\, f_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\rangle_F \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
f_2 &:= \frac{1}{\|f_2^*\|}f_2^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
f_3^* &:= c_3 - \langle c_3\,|\,f_1\rangle_F\, f_1 - \langle c_3\,|\,f_2\rangle_F\, f_2 = \\
&= \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\rangle_F \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
&\qquad - \frac{1}{4}\left\langle \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\rangle_F \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
f_3 &:= \frac{1}{\|f_3^*\|}f_3^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 28. *Koordinatentransformation*

Gegeben seien

$$\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\ 1+2\mathrm{i}\\ 2+2\mathrm{i}\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2+\mathrm{i}\\ -\gamma\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 2+\mathrm{i}\\ 1+2\mathrm{i}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathrm{i}\cdot\gamma\\ -1-\mathrm{i}\\ -2\mathrm{i}\end{pmatrix}\right) \text{ und } A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$$

(a) Für welche $\gamma\in\mathbb{C}$ ist $\mathbb{F}$ ein affines Koordinatensystem?

(b) Sei $\mathbb{E} := \left((0,0,0)^\intercal; (1,0,0)^\intercal, (0,1,0)^\intercal, (0,0,1)^\intercal\right)$ das Standard-Koordinatensystem sowie $\gamma := 1+2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Darstellungsmatrix A' und die Verschiebung t' für die Beschreibung der affinen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \colon v \mapsto Av$ bezüglich $\mathbb{F}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hierzu müssen die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -\gamma \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cdot\gamma \\ -1-\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ linear unabhängig sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Determinante der durch (b_1, b_2, b_3) gegebenen Matrix ungleich 0 ist.

$$\det \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i}\cdot\gamma \\ -\gamma & 2+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = (2+\mathrm{i})^2\cdot 2\mathrm{i} + (-1+\mathrm{i}) + (2-\mathrm{i})\gamma^2 - (2+\mathrm{i})\gamma ...$$

$$- (1+2\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) - 2\mathrm{i}\cdot\gamma =$$

$$... = (2-\mathrm{i})\gamma^2 - (2+3\mathrm{i})\gamma + 2 =: p(\gamma).$$

Mit Hilfe der Mitternachtsformel erhalten wir formal(!) als Nullstellen für p

$$\gamma_{1,2} = „\frac{2+3\mathrm{i} \pm \sqrt{-21+20\mathrm{i}}}{2\cdot(2-\mathrm{i})}“.$$

Man beachte die Anführungszeichen: Die Wurzel ist im komplexen nicht eindeutig und auch $\pm$ ergibt an dieser Stelle (noch) keinen Sinn! Dies ist uns an dieser Stelle aber egal, da wir uns sowieso für **alle** $a + b\mathrm{i}$ interessieren, welche $(a+b\mathrm{i})^2 = -21+20\mathrm{i}$ erfüllen. (Beachten Sie hierbei die Ergänzung am Ende der Musterlösung.)
Anstelle der Polarkoordinaten wählen wir den Ansatz ($(a+b\mathrm{i})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$)

$$a^2 - b^2 = -21$$
$$2ab = 20$$

Da a offensichtlich nicht 0 ist, erhalten wir die Gleichung

$$a^2 - \frac{100}{a^2} = -21 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2)^2 + 21a^2 - 100 = 0,$$

Dies führt auf $a^2 = 4$ und somit $b^2 = 25$. (Auch hier erkennen wir wieder die Mehrdeutigkeit der komplexen Wurzel: $a + b\mathrm{i}$ ist eindeutig bis auf das Vorzeichen, was wir wiederum mit $\pm$ von oben verrechnen können.) Entsprechend ergeben sich:

$$\gamma_1 = \frac{2+3\mathrm{i} - (2+5\mathrm{i})}{2\cdot(2-\mathrm{i})} = ... = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$$
$$\gamma_2 = \frac{2+3\mathrm{i} + (2+5\mathrm{i})}{2\cdot(2-\mathrm{i})} = ... = 2\mathrm{i}$$

Folglich ist $\mathbb{F}$ für alle $\gamma \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}$ ein affines Koordinatensystem.

(b) Sei nun $\gamma = 1 + 2\mathrm{i}$. Wir setzen $F := \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & -2+\mathrm{i} \\ -1-2\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ und berechnen mit Gauß:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 2+\mathrm{i} & 1 & -2+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ -1-2\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2-(2+\mathrm{i})\cdot Z_1: \\ Z_3-(1+2\mathrm{i})\cdot Z_1: \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2+\mathrm{i} & 1 & -2+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ -4-6\mathrm{i} & 0 & 4-\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & 1 & 0 \\ -6\mathrm{i} & 0 & 4+\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ (4+\mathrm{i})\cdot Z_2-(4-\mathrm{i})\cdot Z_3: \\ (2+3\mathrm{i})\cdot Z_3-3\mathrm{i}\cdot Z_2: \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2+\mathrm{i} & 1 & -2+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ -4-4\mathrm{i} & 0 & 0 & -1+\mathrm{i} & 4+\mathrm{i} & -4+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2+2\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+Z_3: \\ (1-\mathrm{i})\cdot Z_2: \\ (1-\mathrm{i})\cdot Z_3: \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2+\mathrm{i} & 1 & 3\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ -8 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 5-3\mathrm{i} & -3+5\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 4 & -2\mathrm{i} & -3-3\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 4\cdot Z_1-3\mathrm{i}\cdot Z_3: \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 8+4\mathrm{i} & 4 & 0 & 2-4\mathrm{i} & -9-3\mathrm{i} & 11-3\mathrm{i} \\ -8 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 5-3\mathrm{i} & -3+5\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 4 & -2\mathrm{i} & -3-3\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 2\cdot Z_1+(2+\mathrm{i})\cdot Z_2: \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 8 & 0 & 2-4\mathrm{i} & -5-7\mathrm{i} & 11+\mathrm{i} \\ -8 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 5-3\mathrm{i} & -3+5\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 4 & -2\mathrm{i} & -3-3\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \end{array}\right]$$

.

Dementsprechend erhalten wir durch Vertauschung der ersten beiden Zeilen sowie anschließender Division durch die Diagonaleinträge

$$F^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & -5+3\mathrm{i} & 3-5\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & -5-7\mathrm{i} & 11+\mathrm{i} \\ -4\mathrm{i} & -6-6\mathrm{i} & 10+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v)=\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & -2+\mathrm{i} \\ -1-2\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} v+\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+2\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

und

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & -5+3\mathrm{i} & 3-5\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & -5-7\mathrm{i} & 11+\mathrm{i} \\ -4\mathrm{i} & -6-6\mathrm{i} & 10+2\mathrm{i} \end{pmatrix} v-\underbrace{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3-13\mathrm{i} \\ 27+\mathrm{i} \\ 18+2\mathrm{i} \end{pmatrix}}_{F^{-1}\left(1-\mathrm{i},1+2\mathrm{i},2+2\mathrm{i}\right)^{\intercal}}.$$

Mit Satz 4.7.12 gilt dann:

$$\begin{aligned} A' &= F^{-1}AF= \\ &= F^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & -2+\mathrm{i} \\ -1-2\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}= \end{aligned}$$

$$= F^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 2+2\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} & 3 \\ -5-\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} & -4-3\mathrm{i} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -21+39\mathrm{i} & 23-39\mathrm{i} & -44+24\mathrm{i} \\ -81-23\mathrm{i} & 85+9\mathrm{i} & -64-52\mathrm{i} \\ -78-22\mathrm{i} & 74+6\mathrm{i} & -56-48\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

sowie $(t = 0)$

$$t' = F^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= F^{-1}\left(\begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ -1+3\mathrm{i} \\ 5+4\mathrm{i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & -5+3\mathrm{i} & 3-5\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & -5-7\mathrm{i} & 11+\mathrm{i} \\ -4\mathrm{i} & -6-6\mathrm{i} & 10+2\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+2\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} \\ 3+2\mathrm{i} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15-12\mathrm{i} \\ 30+15\mathrm{i} \\ 26+12\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Ergänzung: Mitternachtsformel im Komplexen:
Gegeben sei das Polynom $p(X) = aX^2 + bX + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Sind alle Koeffizienten reell und gilt $b^2 - 4ac \geqq 0$, so sind die Nullstellen $x_{1|2}$ bekanntlich durch die Mitternachtsformel

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben, denn:

$$p(x_1) = a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c =$$
$$= \frac{b^2 - 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2 - 4ac}{4a} + \frac{-2b^2 + 2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \ldots$$
$$p(x_2) = a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c =$$
$$= \frac{b^2 + 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2 - 4ac}{4a} + \frac{-2b^2 - 2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \ldots$$

Bereits hier können wir erkennen, dass die Wurzelausdrücke sich gegenseitig ausgleichen, es kommt also vor allem auf deren Quadrat, $b^2 - 4ac$, an. Sind also w_1, w_2 die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Lösungen von $b^2 - 4ac = w^2$, so lassen sich die Nullstellen auch mittels

$$x_1 = \frac{-b + w_1}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

beschreiben. Diese Gleichungen ergeben auch für $b^2 - 4ac < 0$ oder sogar komplexe Koeffizienten a, b, c einen Sinn! Und in der Tat zeigt auch eine kurze Kontrollrechnung, dass auch in diesen Fällen für die Lösungen $w_1, w_2 (= -w_1)$ von $b^2 - 4ac$

$$p\left(\frac{-b + w_1}{2a}\right) = 0, \qquad p\left(\frac{-b - w_2}{2a}\right) = 0$$

gilt, unabhängig vom Körper oder dem Vorzeichen von $b^2 - 4ac$. Interessieren wir uns also in diesem allgemeinen Falle für die Nullstellen von $p(X)$, so rechtfertigt dies den formalen Ansatz

$$x_{1|2} = „\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}“.$$

Hierbei ist man frei, welche der beiden Lösungen man für den Ausdruck $\sqrt{b^2 - 4ac}$ wählt: Das Vorzeichen des Wurzelausdrucks verrechnet sich mit dem Vorzeichen der Lösung von $b^2 - 4ac = w^2$ und eine Reihenfolge auf Basis einer Ordnungsrelation (Kapitel 5) lässt sich in $\mathbb{C}$ ohnehin nicht festlegen.

Wir können mit der Mitternachtsformel also auch komplexe Nullstellen bestimmen. Wichtig ist in diesem Zusammenhang nur, deutlich zu machen, dass wir uns der Problematik des Wurzelziehens in $\mathbb{C}$ bewusst sind und die Mitternachtsformel lediglich formal zur Erleichterung der Rechnung verwenden. (Hier beispielsweise geschehen durch die Betonung von „formal“ sowie die Anführungszeichen.)

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 29. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die Basis $B : b_1 = \left(1,0,0,0\right)^\intercal,\ b_2 = \left(-1,1,0,0\right)^\intercal,\ b_3 = \left(1,-2,1,0\right)^\intercal,\ b_4 = \left(-1,3,-3,1\right)^\intercal$ sowie eine lineare Abbildung $D\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

die beschrieben wird durch die Darstellungsmatrix $${}_BD_B := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von ${}_BD_B$.

(b) Finden Sie eine Basis $C\colon c_1, c_2, c_3, c_4$ von $\mathbb{R}^4$, die möglichst viele dieser Eigenvektoren enthält, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_CD_C$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da ${}_BD_B$ obere Dreiecksgestalt hat, können wir die Eigenwerte direkt ablesen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Wir berechnen den zu λ_1 gehörigen Eigenvektor durch Lösen von ${}_DB_D - \lambda_1 E_4 = 0$:

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ Z_3 - Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hieraus können wir erkennen, dass $b_1 = e_1$ den Eigenraum $V(\lambda_1)$ aufspannt, also $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\left(1,0,0,0\right)^\intercal\right)$: e_1 ist offensichtlich ein Eigenvektor, der Rest der Behauptung folgt aus Dimensionsgründen. (Die Matrix hat Rang 3 und somit nur einen nicht-trivialen Kernvektor. (Ausgenommen dessen Vielfachen.)) Die Eigenvektoren sind alle Vektoren aus dem Eigenraum außer dem Nullvektor.
Analog erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ \\ 3Z_4 - 2Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hier ist der Eigenvektor $(-1,2,2,0)^\intercal$ - in der Darstellung bezüglich der Basis B! In der

Standardbasis lautet der Vektor

$$\big(b_1 + 2b_2 + 2b_3\big) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Somit ist der zugehörige Eigenraum durch $V(\lambda_2) = \mathrm{L}\Big((1,-2,2,0)^\intercal\Big)$ gegeben. Auch hier sind die Eigenvektoren alle Vektoren aus dem Eigenraum außer dem Nullvektor.

(b) Wir setzen $c_1 := (1,0,0,0)^\intercal$, $c_2 := (1,-2,2,0)^\intercal$ und ferner $c_3 := e_2$ und $c_4 := e_4$. Dann ist

$$_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&2&1&3\\0&2&0&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Daher ergibt Gaußelimination:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&1&1&0&0&0\\0&2&1&3&0&1&0&0\\0&2&0&3&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}Z_1+Z_2:\\Z_2-Z_3:\\ \\ \\\end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&0&4&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&-1&0\\0&2&0&3&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}Z_1-\frac{3}{2}Z_3+\frac{1}{2}Z_4:\\ \\Z_3-3Z_4:\\ \\\end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&0&1&-1&0\\0&2&0&0&0&0&1&-3\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right],$$

womit wir durch Zeilentausch und Division der (danach) 2. Zeile durch 2

$$_C\mathrm{id}_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&-3&1\\0&0&1&-3\\0&2&-2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

erhalten. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}{}_CD_C &= {}_C\mathrm{id}_{B\,B}D_{B\,B}\mathrm{id}_C = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&-3&1\\0&0&1&-3\\0&2&-2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&2&0\\0&-1&2&0\\0&0&1&-3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&2&1&3\\0&2&0&3\\0&0&0&1\end{pmatrix} =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 30. *Begleitmatrizen*

Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome sowie die Eigenwerte von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Für A rechnen wir

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det A - \lambda E_3 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & -3 \\ 0 & 1 & -\lambda-3 \end{pmatrix} = \\ &= \lambda^2(-\lambda-3) - 1 - 3\lambda = -\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) = -\left(\lambda+1\right)^3. \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda = -1$ der einzige Eigenwert.
Für B nutzen wir Laplace-Entwicklung:

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det\left(B - \lambda E_5\right) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &\overset{\text{Z1}}{=} -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &\overset{\text{Z1}}{=} -\lambda \left(-\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{4+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \lambda^2 \cdot (-\lambda)^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^4 - 1) = -\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

Aus der letzten Darstellung können wir nun die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit die Eigenwerte direkt ablesen:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = \mathrm{i},\ \lambda_5 = -\mathrm{i}.$$

Aufgabe H 31. *Rekursive Folgen*

Wir definieren die Zahlenfolge $(a_n)_n$ durch die Startwerte $a_0 := 1,\ a_1 := 1$ und dann rekursiv durch $a_n := 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ für $n \geqq 2$.

(a) Begründen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für quadratische $n \times n$-Matrizen setzt man $A^0 = E_n$.

(b) Finden Sie eine Basis f_1, f_2 von $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A.

(c) Bilden Sie die Matrix F mit Spalten f_1 und f_2, und berechnen Sie $F^{-1}AF$.

Zusatz: Können Sie mit (a) und (b) eine explizite Darstellung für a_n herleiten, welche ohne Rückgriff auf die vorherigen Folgenglieder auskommt?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen vollständige Induktion.

IA Es gilt wegen $A^0 = E_2$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

IH Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$.

IS $n \to n+1$

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n \\ 1 \cdot a_{n+1} + 0 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{IH}}{=} A \cdot A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen die Eigenwerte von A:

$$0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1.$$

Hieraus folgt $(\lambda - 1)^2 = -1$, mithin $\lambda - 1 = \pm \mathrm{i}$ beziehungsweise $\lambda = 1 \pm \mathrm{i}$. Wir berechnen einen zu $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$ gehörigen Eigenvektor v_1:

$$\left[\begin{array}{cc||c} 1-\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 1 & -1-\mathrm{i} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})Z_1 : \\ (1-\mathrm{i})Z_2 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{cc||c} 1 & -1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Setzen wir nun die zweite Komponente von v_1 gleich 1, erhalten wir somit aus der ersten Zeile $f_1 = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$. Analog erhalten wir aus

$$\left[\begin{array}{cc||c} 1+\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 1 & -1+\mathrm{i} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})Z_1: \\ (1+\mathrm{i})Z_2 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

den Eigenvektor $f_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis.

(c) Wir setzen $F = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - (1-\mathrm{i})Z_2: \\ (1+\mathrm{i})Z_2 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 2\mathrm{i} & 0 & 1 & -1+\mathrm{i} \\ 0 & 2\mathrm{i} & -1 & 1+\mathrm{i} \end{array}\right].$$

Hieraus erhalten wir

$$F^{-1} = -\frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1+\mathrm{i} \\ -1 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

. Wir erhalten, wie wir es erwarten:

$$\begin{aligned} F^{-1}AF &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.

Zusatz: Sei $D = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A^n = (FDF^{-1})^n = \underbrace{F^{-1}DF \cdot F^{-1}DF \cdots F^{-1}DF}_{n \text{ mal}} = FD^nF^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich wegen $D^n = \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})^n & 0 \\ 0 & (1-\mathrm{i})^n \end{pmatrix}$ folglich die Darstellung

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})^n & 0 \\ 0 & (1-\mathrm{i})^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})^n & 0 \\ 0 & (1-\mathrm{i})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots = \\ &= \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^n + \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})^n. \end{aligned}$$

Auch wenn diese Bildungsvorschrift mit komplexen Zahlen vorerst seltsam anmutetet - immerhin ist die Folge reellwertig definiert - so zeigt eine kurze Kontrollrechnung mit der binomischen Formel, dass sich die is aufgrund gegensätzlicher Vorzeichen aufheben.

Aufgabe H 32. *Eigenwerte einer tridiagonalen Töplitz-Matrix*

Seien $\mathcal{T} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_k := 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot k\right), \quad v_k := \begin{pmatrix} \sin(\pi k/6) \\ \sin(\pi k/3) \\ \sin(\pi k/2) \\ \sin(2\pi k/3) \\ \sin(5\pi k/6) \end{pmatrix}.$

(a) Zeigen Sie für $1 \leqq k \leqq 5$, dass v_k ein Eigenvektor von $\mathcal{T}$ zum Eigenwert λ_k ist.
Hinweis: Es gilt $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

(b) Sind diese Eigenvektoren paarweise orthogonal zueinander?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für den j. Eintrag von v_k gilt offensichtlich $v_{k,j} = \sin\left(\frac{\pi jk}{6}\right)$. Wegen $\sin\left(\frac{\pi k \cdot 0}{6}\right) = 0 = \sin\left(\frac{\pi k \cdot 6}{6}\right)$ genügt es für den Nachweis von $\mathcal{T}v_k = \lambda_k v_k$ die Gleichung

$$\sin\left(\frac{\pi k(j-1)}{6}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi kj}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi k(j+1)}{6}\right) = \left(2 + 2\cos\left(\frac{\pi k}{6}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi jk}{6}\right)$$

für $1 \leqq j \leqq 5$ zu verifizieren. Hierzu nutzen wir wiederholt den Hinweis und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi k(j-1)}{6}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi kj}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi k(j+1)}{6}\right) = \\
&= \sin\left(\frac{\pi kj}{6} - \frac{\pi k}{6}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi kj}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi kj}{6} + \frac{\pi k}{6}\right) = \\
&= \sin\left(\frac{\pi kj}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi k}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi k}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi kj}{6}\right) \\
&\quad + 2\sin\left(\frac{\pi kj}{6}\right) \\
&\quad + \sin\left(\frac{\pi kj}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi k}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi kj}{6}\right) = \\
&\quad \text{(Hier nutzen wir Symmetrie: } \cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)) \\
&= \left(2 + 2\cos\left(\frac{\pi k}{6}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi jk}{6}\right).
\end{aligned}$$

Hinweis: Dass diese Rechnung nicht nur für $1 \leqq k \leqq 5$ gilt, ist in diesem Fall kein Anzeichen, dass wir etwas übersehen haben, sondern der Periodiziät der trigonometrischen Funktionen geschuldet. Wir könnten auch $7 \leqq k \leqq 11$ wählen und würden die selben Eigenwerte und -vektoren erhalten, nur in anderer Reihenfolge und mit anderer Orientierung der Vektoren. Einzig die ganzzahligen Vielfachen von 6 sind nicht für k zulässig.

(b) Ja, da die Matrix symmetrisch ist und die Eigenwerte paarweise verschieden sind.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 33.

Seien $B := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenräume von B und C.

(b) Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar? Welche sind orthogonal diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie, wenn möglich, für $X \in \{B, C\}$ jeweils eine reguläre Matrix S und eine Diagonalmatrix D so, dass $S^{-1}XS = D$ gilt. (Ist X orthogonal diagonalisierbar, soll S eine orthogonale Matrix sein.)

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom von B lautet

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ 6 & 4-\lambda & -9 \\ 5 & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(-\lambda + 1).$$

Damit sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ die Eigenwerte von B. Bestimmen wir $V(0)$: $x \in V(0)$ genau dann, wenn $Bx = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -9 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} Z_1 : \\ Z_2 - 6/4 \cdot Z_1 : \\ Z_3 - 5/4 \cdot Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/4 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 2 \cdot Z_2 : \\ Z_2 : \\ Z_3 - 1/2 \cdot Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Bestimmen wir $V(1)$: $x \in V(1)$ genau dann, wenn $(B - E_3)x = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 5 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} Z_1 : \\ Z_2 - 2 \cdot Z_1 : \\ Z_3 - 5/3 \cdot Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2 \cdot Z_2 : \\ Z_2 : \\ Z_3 - 1/3 \cdot Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Die Matrix B ist nicht diagonalisierbar, da $\mathbb{C}^3$ keine Basis von Eigenvektoren von B besitzt.

Die Matrix C ist symmetrisch, also ist sie orthogonal diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom von C lautet

$$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

Die Nullstelle $\lambda = -1$ kann geraten werden.

Damit sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von C. Bestimmen wir $V(-1)$: $x \in V(-1)$ genau dann, wenn $(C + E_3)x = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (Z_1 - 2\cdot Z_2)/3: \\ Z_2: \\ (Z_3 - Z_2)/3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{r} Z_1: \\ Z_2 + 2\cdot Z_1: \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Bestimmen wir $V(2)$: $x \in V(2)$ genau dann, wenn $(C - 2E_3)x = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} Z_1: \\ Z_2 + Z_1: \\ Z_3 + Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Wie bereits erwähnt, die Matrix B ist nicht diagonalisierbar, da $\mathbb{C}^3$ keine Basis von Eigenvektoren von B besitzt. Die Matrix C ist symmetrisch, also ist sie orthogonal diagonalisierbar.

(c) Für Matrix C bestimmen wir S und D. Dazu bestimmen wir eine Orthonormalbasis von $V(-1)$ und $V(2)$. Zuerst normieren wir $(-1,1,1)^\intercal$:

$\sqrt{\left\langle (-1,1,1)^\intercal \,\middle|\, (-1,1,1)^\intercal \right\rangle} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Und $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right)$.

Berechnen wir mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von $V(2)$. Normieren wir $(1,1,0)^\intercal$: $\sqrt{\left\langle (1,1,0)^\intercal \,\middle|\, (1,1,0)^\intercal \right\rangle} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Der erste Basisvektor von $V(2)$ ist $w_1 = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Berechnen wir w_2, den zweiten Basisvektor: $w_2' = (1,0,1)^\intercal - \left\langle w_1 \,\middle|\, (1,0,1)^\intercal \right\rangle w_1$ und $w_2 = \frac{w_2'}{|w_2'|}$.

$$w_2' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

$|w_2'| = \sqrt{1/4+1/4+1} = \sqrt{3}/\sqrt{2}$. Damit $w_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

Spalten von S sind die erst erhaltenen orthonormalen Eigenvektoren von C. Also,

$$D := \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ S := \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 34.

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix mit Eigenwerten 1 und -1 und Eigenräumen $V(1) = \mathrm{L}\left((1,0,0,1)^\intercal, (1,2,2,1)^\intercal\right)$ und $V(-1) = \mathrm{L}\left((1,0,0,-1)^\intercal, (2,1,-1,-2)^\intercal\right)$.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $D = S^\intercal AS$.

(c) Bestimmen Sie A und A^3.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bestimmen wir eine Orthonormalbasis $\{w_1, w_2\}$ von $V(1)$ mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens. Sei $v_1 := (1,0,0,1)^\intercal, v_2 := (1,2,2,1)^\intercal$.
Dann $|v_1| = |\,(1,0,0,1)^\intercal\,| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{|w_2'|},$$

$$w_2' = v_2 - \langle w_1 \,|\, v_2\rangle\, w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} - 2/\sqrt{2} \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Also, $|w_2'| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ und $w_2 = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

Bestimmen wir eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2\}$ von $V(-1)$. Sei $f_1 := (1,0,0,-1)^\intercal, f_2 := (2,1,-1,-2)^\intercal$. Dann: $|\,(1,0,0,-1)^\intercal\,| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{f_1}{|f_1|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \\
u_2 &= \frac{u_2'}{|u_2'|}, \\
u_2' &= f_2 - \langle u_1 \mid f_2 \rangle \, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 4/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Also, $|u_2'| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 auf den Eigenvektoren zum Eigenwert -1 senkrecht stehen, bilden w_1, w_2, u_1 und u_2 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

(b) Wir bezeichnen die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{E}$ und die in (a) berechnete Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A mit $\mathbb{B}$. Sei außerdem $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Dann ist $A = {}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}$ und

$$
D = {}_{\mathbb{B}}\alpha_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; S = {}_{\mathbb{E}}\mathrm{id}_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.
$$

Da $\mathbb{B}$ und $\mathbb{E}$ Orthonormalbasen sind, ist S eine orthogonale Matrix und $S^{-1} = S^{\mathsf{T}}$. Da die Diagonalmatrix ${}_{\mathbb{B}}\alpha_{\mathbb{B}}$ geschrieben werden kann als

$$
D = {}_{\mathbb{B}}\alpha_{\mathbb{B}} = {}_{\mathbb{B}}\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\mathrm{id}_{\mathbb{B}} = S^{\mathsf{T}} A S,
$$

erfüllt S die gewünschte Eigenschaft.

(c) $D = S^{\mathsf{T}} A S$, also $S D S^{\mathsf{T}} = A$; $A = S D S^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

$A^3 = (SDS^\intercal)^3 = SDS^\intercal SDS^\intercal SDS^\intercal = SD^3S^\intercal$, da $S^\intercal S = E_4$. Und $A^3 = A$, da $D^3 = D$.

Aufgabe H 35.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Diagonalisieren Sie $A^\intercal A$ orthogonal.
Wählen Sie dabei die Eigenwerte in absteigender Reihenfolge (also $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3$).

(b) Sei $\tilde{V} : v_1, v_2, v_3$ die in (a) bestimmte ONB aus Eigenvektoren.
Wir definieren für $j = 1, 2$ die Werte $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ und die Vektoren $u_j := \frac{1}{\sigma_j} A v_j$. Weisen Sie nach, dass $\tilde{U} : u_1, u_2$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Jetzt definieren wir (spaltenweise) die Matrizen $U := (u_1, u_2)$, $V := (v_1, v_2, v_3)$, $\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma^\dagger := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \end{pmatrix}^\intercal$ und $A^\dagger := V \Sigma^\dagger U^\intercal$.
Wir betrachten die (bezüglich Standardkoordinaten gegebenen) linearen Abbildungen

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto Ax, \quad \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \colon y \mapsto A^\dagger y.$$

Bestimmen Sie $U \Sigma V^\intercal$ sowie die Darstellungsmatrizen ${}_{\tilde{U}}\alpha_{\tilde{V}}$ und ${}_{\tilde{V}}\beta_{\tilde{U}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$A^\intercal A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned} \chi_{A^\intercal A}(\lambda) &= (2-\lambda)^3 - 4(2-\lambda) = \\ &= \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda\right)(2-\lambda) - 4\,(2-\lambda) = \lambda(\lambda-4)(2-\lambda). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Wir berechnen zugehörige Eigenvektoren. Aus

$$A^\intercal A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$A^\intercal A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^\intercal A - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

lassen sich die Eigenvektoren $\tilde{v}_1 = (1, 0, -1)^\intercal$, $\tilde{v}_2 = (0, 1, 0)^\intercal$ und $\tilde{v}_3 = (1, 0, 1)^\intercal$ ablesen. Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind und die Matrix symmetrisch ist, sind diese Vektoren bereits paarweise orthogonal zueinander (Lemma 5.4.5) und wir müssen nur noch normieren:

$$v_1 = \frac{1}{|\tilde{v}_1|}\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(Entsprechend lässt sich $A^\intercal A$ mittels

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) A^\intercal A \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & \sqrt{2} & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

auf Diagonalgestalt bringen.)

(b) Wie gefordert setzen wir $\sigma_1 := \sqrt{\lambda_1} = 2$, $\sigma_2 := \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$ sowie

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann gelten:

$$\begin{aligned} \langle u_1 \,|\, u_1\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1, \\ \langle u_1 \,|\, u_2\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0, \\ \langle u_2 \,|\, u_2\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 1. \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{U} : u_1, u_2$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$.

(c) Seien

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \qquad V := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & \sqrt{2} & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma := \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix} \qquad \Sigma^\dagger := \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} U\Sigma V^\intercal &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\2 & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Ferner gelten infolge der Orthogonalität von U, V:

$$\begin{aligned} {}_E\mathrm{id}_{\tilde V} &= V & {}_{\tilde V}\mathrm{id}_E &= V^\intercal \\ {}_E\mathrm{id}_{\tilde U} &= U & {}_{\tilde U}\mathrm{id}_E &= U^\intercal . \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} {}_{\tilde U}\alpha_{\tilde V} &= {}_{\tilde U}\mathrm{id}_E\, {}_E\alpha_E\, {}_E\mathrm{id}_{\tilde V} \overset{\text{(a,b)}}{=} U^\intercal(U\Sigma V^\intercal)V = \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ {}_{\tilde V}\beta_{\tilde U} &= {}_{\tilde V}\mathrm{id}_E\, {}_E\beta_E\, {}_E\mathrm{id}_{\tilde U} \;=\; V^\intercal(V\Sigma^\dagger U^\intercal)U = \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 36. *Quadrik*

Gegeben seien $p_1 = (1,-1)^\intercal$, $p_2 = (1,0)^\intercal$, $p_3 = (1,1)^\intercal$, $p_4 = (0,1)^\intercal$ sowie $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^\intercal$. Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix A und einen Skalar c so, dass die Abbildung $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c$ die Bedingungen $q(p_1) = 3$, $q(p_2) = -1$, $q(p_3) = -2$ und $q(p_4) = 1$ erfüllt. Sind A und c dadurch eindeutig festgelegt?

Lösungshinweise hierzu: Da A symmetrisch sein muss, setzen wir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + x_1 - x_2 + c.$$

Die Bedingungen an die Punkte $p_1, \ldots, p_4$ führen auf das LGS

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11} & + & (-2)a_{12} & + & a_{22} & + & 1 & - & (-1) & + & c & = & 3 \\ a_{11} & + & 0 & + & 0 & + & 1 & - & 0 & + & c & = & -1 \\ a_{11} & + & 2a_{12} & + & a_{22} & + & 1 & - & 1 & + & c & = & -2 \\ 0 & + & 0 & + & a_{22} & + & 0 & - & 1 & + & c & = & 1 \end{array}$$

oder äquivalent (nach Subtraktion der konstanten Terme auf der linken Seite der Gleichungen)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_3 - 2Z_4 : \\ \\ Z_3 - Z_4 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ 2Z_2 - Z_1 \\ 2Z_3 - Z_1 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} (1/2) \cdot Z_1 : \\ (1/2) \cdot Z_2 : \\ (1/4) \cdot Z_3 : \\ Z_4 - (1/2) \cdot Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array}\right],$$

was nach Zeilenvertauschungen auf

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

und somit die Lösung $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ führt. Somit erhalten wir

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -10 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad c = \frac{1}{2}.$$

Da die Lösung des LGS eindeutig ist, ist q (und damit die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 | q(x) = 0\}$) in diesem Falle durch die gegebenen Punkte eindeutig bestimmt.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *Grobeinteilung von Quadriken*
Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + cx_2^2 + x_3^2 + 4cx_2x_3 + 2c(c-1)x_2 + c(c-1) = 0\}$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Lösungshinweise hierzu: Um den Typ von Q zu bestimmen, bestimmen wir zuerst die Matrixbeschreibung von Q:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A_c x + 2a_c^\intercal x + d_c = 0\} \text{ mit}$$

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 2c \\ 0 & 2c & 1 \end{pmatrix}; \quad a_c = \begin{pmatrix} 0 \\ c(c-1) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad d_c = c(c-1) \text{ und}$$

$$A_{c,erw} = \begin{pmatrix} c(c-1) & 0 & c(c-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c(c-1) & 0 & c & 2c \\ 0 & 0 & 2c & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\det(A_c)$ mit Hilfe der Entwicklung nach der ersten Zeile: $\det(A_c) = c - 4c^2 = c(1-4c)$. Also, $\operatorname{Rg} A_c = 3$ für $c \notin \{0, 1/4\}$ und

$$\operatorname{Rg} A_0 = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{Rg} A_{1/4} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Wir berechnen $\det A_{c,erw}$ mit Hilfe der Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\det A_{c,erw} = \det \begin{pmatrix} c(c-1) & c(c-1) & 0 \\ c(c-1) & c & 2c \\ 0 & 2c & 1 \end{pmatrix} = 1(c^2(c-1) - c^2(c-1)^2) - 2c(2c^2(c-1))$$

$$= c^2(c-1)(2-5c).$$

Also, $\operatorname{Rg} A_{c,erw} = 4$ für $c \notin \{0, 1, 2/5\}$ und

$$\operatorname{Rg} A_{0,erw} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{Rg} A_{1,erw} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\operatorname{Rg} A_{2/5,erw} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} -6/25 & 0 & -6/25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6/25 & 0 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_3-Z_1}{=} \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} -6/25 & 0 & -6/25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/25 & 4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_4-5/4Z_3}{=} \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} -6/25 & 0 & -6/25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/25 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Daher gilt

$$\operatorname{Rg} A_c = \begin{cases} 3 & \text{für } c \notin \{0, 1/4, 1, 2/5\} \\ 3 & \text{für } c \in \{1, 2/5\} \\ 2 & \text{für } c = 1/4 \\ 2 & \text{für } c = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{Rg} A_{c,erw} = \begin{cases} 4 & \text{für } c \notin \{0, 1/4, 1, 2/5\} \\ 3 & \text{für } c \in \{1, 2/5\} \\ 4 & \text{für } c = 1/4 \\ 2 & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

und Q ist eine kegelige Quadrik, falls $c \in \{0, 1, 2/5\}$; Q ist eine Mittelpunktsquadrik, falls $c \notin \{0, 1/4, 1, 2/5\}$; und Q ist eine parabolische Quadrik, falls $c = 1/4$.

Aufgabe H 38. *Ebene Schnitte einer Quadrik im Raum*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4 = 0\}.$$

(a) Welche Schnittlinien entstehen als Schnitt von Q mit der Ebene $x_3 = d$ in Abhängigkeit von d?

(b) Zeichnen Sie für $d = \{0, 1, 2\}$ diese Schnittlinien jeweils in ein Koordinatensystem auf die Ebene $x_3 = d$.

(c) Welche Gestalt hat die Quadrik Q?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um die Schnittlinien von Q mit der Ebene $x_3 = d$ zu beschreiben, setzen wir $x_3 = d$ in die Gleichung von der Quadrik Q ein. Die Koordinaten x_1, x_2 bilden ein Kartesisches Koordinatensystem auf der Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$. Bezeichnen wir mit Q_d die Gleichung von der erhaltenen Quadrik auf der Ebene $x_3 = d$.

$$Q_d = \{x_1, x_2 \in E_d \mid x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_2^2 - d^2 + 4 = 0\}.$$

Verschieben wir Q_d gegen lineare Terme:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_2^2 - d^2 + 4 &= (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 1)^2 - 3 - d^2 + 4 \\ &= (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 1)^2 - d^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Falls $d^2 = 1$, d.h. $d = \pm 1$, ist die Quadrik Q_d ein Punkt $x_1 = 1, x_2 = 1$.

Falls $d^2 - 1 < 0$, d.h. $d \in (-1, 1)$, hat Q_d keine Punkte, da die Summe von Quadraten nicht negativ sein kann.

Falls $d^2 - 1 > 0$, d.h. $d \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, bekommen wir

$$Q_d = \{x_1, x_2 \in E_d \mid \frac{1}{1 - d^2}(x_1 - 1)^2 + \frac{2}{1 - d^2}(x_2 - 1)^2 + 1 = 0\}.$$

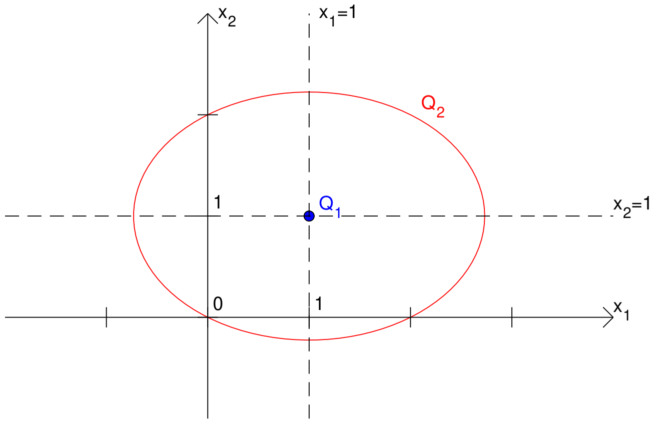
Das ist eine Ellipse.

(b) Falls $d = 0$, hat Q_0 keine Punkte.

Falls $d = 1$, ist die Quadrik Q_1 ein Punkt $x_1 = 1, x_2 = 1$.

Falls $d = 2$, bekommen wir $Q_2 = \{x_1, x_2 \in E_d \mid -\frac{1}{3}(x_1 - 1)^2 - \frac{2}{3}(x_2 - 1)^2 + 1 = 0\}$.

Im Koordinatensystem $\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ auf der Ebene $x_3 = 2$ bekommen wir eine Ellipse $-\frac{1}{3}y_1^2 - \frac{2}{3}y_2^2 + 1 = 0$ mit Halbachsenlänge $\sqrt{3}$ und $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.



(c) Q ist ein zweischaliges Hyperboloid.

Aufgabe H 39. *euklidische Normalform*
Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_3 + 1 = 0\}\,.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrikgleichung an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixbeschreibung von Q ist:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\} \text{ mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad c = 1.$$

(b) Zuerst diagonalisieren wir A gegen gemischte Terme. Finden wir Eigenwerte und Eigenräume von A.

$$\chi_A = \det(A - \lambda E_3) = (-1-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Die Eigenwerte sind $-1, 2, 4$. Berechnen wir die Eigenräume (sie sind alle eindimensional):

$(A + E_3)x = 0$ ergibt: $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$. Also gilt $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$(A - 2E_3)x = 0$ ergibt: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Also gilt $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$(A - 4E_3)x = 0$ ergibt: $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$. Also gilt $V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Normieren wir die erhaltenen Eigenvektoren, um die folgende orthonormale Basis zu bekommen: $f_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Daher

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = F^\intercal A F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{a} = F^\intercal a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad c = 1.$$

In dem Koordinatensystem $(0; f_1, f_2, f_3)$ hat die Quadrik Q die Gleichung

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y^\intercal \tilde{A} y + 2\tilde{a}^\intercal y + c = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid -y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2 + 1 = 0\}.$$

Verschieben wir gegen die linearen Terme:

$$-y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2 + 1 = -y_1^2 + 2(y_2 + 1)^2 + 4y_3^2 - 1 = 0.$$

Der neue Ursprung P hat also die $\mathbb{F}$-Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, seine Standardkoordinaten erhält man als ${}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In dem Koordinatensystem $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ hat die Quadrik Q die Gleichung $-z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_3^2 - 1 = 0$ oder $z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_3^2 + 1 = 0$. Das ist ein einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe H 40.

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = 0\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

(c) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt von Q mit einer Ebene entstehen? (Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine solche Ebene.)

- eine Ellipse
- eine Hyperbel
- eine Parabel

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixbeschreibung von Q ist:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\} \text{ mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = 3.$$

(b) Um eine euklidische Normalform zu bestimmen, verschieben wir gegen die linearen Terme:

$$x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = (x_1-2)^2 - 4 - (x_2-1)^2 + 1 + 2x_3 + 3 = (x_1-2)^2 - (x_2-1)^2 + 2x_3$$

In dem Koordinatensystem mit dem neuen Ursprung $P = (2, 1, 0)^\intercal$ hat Q die Gleichung $y_1^2 - y_2^2 + 2y_3 = 0$. Das ist ein hyperbolisches Paraboloid.

(c) Die Ebene $y_2 = 0$ oder $x_2 = 1$ hat eine Parabel $y_1^2 + 2y_3 = 0$ als Schnitt mit Q (hier setzen wir $y_2 = 0$ in die Gleichung von Q ein, um $y_1^2 + 2y_3 = 0$ zu bekommen).

Die Ebene $y_3 = 1$ oder $x_3 = 1$ hat eine Hyperbel $y_1^2 - y_2^2 + 2 = 0$ als Schnitt mit Q (hier setzen wir $y_3 = 1$ in die Gleichung von Q ein, um $y_1^2 - y_2^2 + 2 = 0$ zu bekommen).

Beweisen wir, dass keine Ellipse kann als Schnitt von einer Ebene mit Q entstehen. Eine beliebige Ebene hat die Gleichung $ay_1 + by_2 + dy_3 = f$. Man erhält eine Gleichung für den Schnitt der Ebene $ay_1 + by_2 + dy_3 = f$ mit der Quadrik, in dem man die Ebenengleichung nach y_1, y_2 oder y_3 auflöst und dann in der Quadrikgleichung substituiert. Betrachten wir die folgenden Fälle:

Nehmen wir an, dass $d \neq 0$, und lösen nach y_3 auf: $y_3 = -1/d(ay_1 + by_2 - f)$. Nach der Substitution bekommen wir $y_1^2 - y_2^2 - 2(1/d(ay_1 + by_2 - f)) = 0$. Das kann keine Ellipse sein, weil die Koeffizienten vor y_1^2 und y_2^2 unterschiedliche Vorzeichen haben, und das bleibt auch so nach der Verschiebung gegen lineare Terme.

Wenn $d = 0, a \neq 0$, lösen wir nach y_1 auf: $y_1 = -1/a(by_2 - f)$. Nach der Substitution bekommen wir $(-1/a(by_2 - f))^2 - y_2^2 + 2y_3 = 0$. Das kann keine Ellipse sein, weil in dieser Gleichung nur y_2 Grad 2 hat.

Wenn $d = 0, a = 0$, lösen wir nach y_2 auf: $y_2 = f/b$. Nach der Substitution bekommen wir $y_1^2 - (f/b)^2 + 2y_3 = 0$. Das kann keine Ellipse sein, weil in dieser Gleichung nur y_1 Grad 2 hat.

In allen Fällen bekommen wir keine Ellipse als Schnitt von der Ebene mit Q.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.
Geben Sie im Falle der Beschränktheit konkrete obere und untere Schranken an.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2+n-1}{n^2}$;

(b) $(b_n)_{n\geqq 2}$ mit $b_n = \frac{2^n}{n!}$;

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt{n^2+4n-5} - n$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $n^2 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $n^2+n-1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(n^2+n > 1)$, gilt es $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit 0 eine untere Schranke der Folge ist. Berechnen wir die erste Folgenglieder: $a_1 = 1, a_2 = 5/4, a_3 = 11/9$. Also $a_1 < a_2 > a_3$ und die Folge ist nicht monoton. Untersuchen wir die Folge weiter, indem wir die Differenz $a_n - a_{n+1}$ betrachten. Zuerst formen wir a_n um:

$$a_n = \frac{n^2+n-1}{n^2} = 1 + \frac{n-1}{n^2},$$

$$a_n - a_{n+1} = 1 + \frac{n-1}{n^2} - 1 - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)^2 - n^3}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2-n-1}{n^2(n+1)^2}.$$

Wir haben: $n^2(n+1)^2 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen von n^2-n-1 sind $(1\pm\sqrt{5})/2$. Für $n > (1+\sqrt{5})/2$ gilt $n^2-n-1 > 0$ und $a_n - a_{n+1} > 0$. Die Teilfolge $(a_n)_{n\geqq 2}$ ist streng monoton fallend.

Also ist $a_2 = 5/4$ eine obere Schranke für die Folge. (Man konnte auch direkt zeigen, dass die Folge mit z.B. 2 nach oben beschränkt ist.)

(b) Es gilt $b_n > 0$ für alle $n \geqq 2$, womit 0 eine untere Schranke der Folge ist. Wir zeigen, dass die Folge streng monoton fallend ist, indem wir den Quotienten b_n/b_{n+1} betrachten:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{2^n(n+1)!}{n!2^{n+1}} = \frac{n+1}{2} > 1 \text{ für } n \geqq 2.$$

D.h. $b_n > b_{n+1}$ für alle $n \geqq 2$. Eine obere Schranke für die Folge ist $b_2 = 4/2 = 2$.

Alternativ: Man konnte auch die Differenz $b_n - b_{n+1}$ betrachten:

$$\frac{2^n}{n!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{n-1}{n+1} > 0 \text{ für } n \geqq 2.$$

(c) Zuerst bemerken wir, dass $n^2+4n-5 = (n+5)(n-1)$ gleich 0 für $n = 1$ und größer als 0 für $n > 1$ ist. Beweisen wir, dass c_n streng monoton steigend ist:

$$\sqrt{(n+1)^2+4(n+1)-5} - n - 1 > \sqrt{n^2+4n-5} - n \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(n+1)^2+4(n+1)-5} > \sqrt{n^2+4n-5} + 1 \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^2+4(n+1)-5 > n^2+4n-5+1+2\sqrt{n^2+4n-5} \Leftrightarrow$$

$$2n+4 > 2\sqrt{n^2+4n-5} \Leftrightarrow n+2 > \sqrt{n^2+4n-5} \Leftrightarrow$$

$$n^2+4n+4 > n^2+4n-5 \Leftrightarrow 4 > -5.$$

Durchaus haben wir die Monotonie vom Quadrieren der positiven Zahlen benutzt. ($n+2 > \sqrt{n^2+4n-5}$ gilt für $n=1$ auch, weil $3>0$.) Also $c_{n+1} > c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng monoton steigend. $c_1 = -1$ ist eine untere Schranke. Beweisen wir, dass 2 eine obere Schranke ist:

$$\sqrt{n^2+4n-5} - n < 2 \Leftrightarrow n^2+4n-5 < (2+n)^2 \Leftrightarrow n^2+4n-5 < 4+4n+n^2 \Leftrightarrow -5 < 4.$$

Aufgabe H 42. *Rekursive Folgen*

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die folgenden Folgen beschränkt und monoton fallend sind.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$, $n \geqq 1$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 > 1$ beliebig, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{1}{b_n})$, $n \geqq 1$.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $b_n > 1$ für alle n.
Zusatz: Was passiert bei $0 < b_1 \leqq 1$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zuerst beweisen wir, dass $0 \leqq a_n \leqq 1$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n=1$: $0 \leqq a_1 = 1 \leqq 1$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., $0 \leqq a_n \leqq 1$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: $0 \leqq a_n \leqq 1$, also $3 \geqq 3 - a_n \geqq 2$, folglich $\frac{1}{3} \leqq a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n} \leqq \frac{1}{2}$.

Also ist die Folge mit 0 nach unten und mit 1 nach oben beschränkt.

Jetzt müssen wir zeigen, dass

$$\frac{1}{3-a_n} < a_n \Leftrightarrow 1 < 3a_n - a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 - 3a_n + 1 < 0.$$

Die Nullstellen von $a_n^2 - 3a_n + 1$ sind $(3 \pm \sqrt{5})/2$. Wir wissen schon, dass $a_n \leqq 1 < (3+\sqrt{5})/2$ gilt. Beweisen wir, dass $a_n > (3-\sqrt{5})/2$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n=1$: $a_n = 1 > (3-\sqrt{5})/2$, da $-1 > -\sqrt{5}$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., $a_n > (3-\sqrt{5})/2$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n} > \frac{1}{3-(3-\sqrt{5})/2} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Die letzte Gleichung gilt, da $\frac{2}{3+\sqrt{5}}\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{4}{9-5} = 1$.

(b) Zuerst zeigen wir, dass $b_n > 1$ für alle n:

IA Die Aussage für $n=1$: $b_n > 1$ gilt nach der Annahme.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., $b_n > 1$. Also $b_n > 0$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{1}{b_n}) = \frac{1}{2}\frac{b_n^2+1}{b_n} > 1 \Leftrightarrow b_n^2 + 1 > 2b_n \Leftrightarrow (b_n - 1)^2 > 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, da $b_n > 1$.

Vergleichen wir b_n und b_{n+1}:

$$\frac{1}{2}(b_n + \frac{1}{b_n}) - b_n = \frac{-2b_n^2 + b_n^2 + 1}{2b_n} = \frac{1 - b_n^2}{2b_n} < 0.$$

$b_{n+1} - b_n < 0$, also ist die Folge monoton fallend. Folglich ist die Folge nach oben mit b_1 beschränkt. Eine untere Schranke ist 1.

Zusatz: Für $b_1 = 1$ haben wir: $b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $0 < b_1 < 1$ haben wir: $b_2 = \frac{1}{2}(b_1 + \frac{1}{b_1}) > 1$, da $(b_1 - 1)^2 > 0$. D.h. die Folge verhält sich für $n \geqq 2$ genauso wie im betrachteten Fall mit $b_1 > 1$.

Aufgabe H 43. *Konvergenz*

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Geben Sie dazu jeweils für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$ so an, dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.

(a) $a_n = \frac{1}{n!}$;

(b) $a_n = \left(\frac{-999}{1000}\right)^n$.

Geben Sie $N(0,1)$ und $N(0,01)$ explizit an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es zum jeden $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ mit $N(\varepsilon) > 1/\varepsilon$, also gilt für alle $n > N(\varepsilon)$ die Ungleichung $1/n < \varepsilon$.

Also für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt

$$\left|0 - \frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 0,1$ gilt $11 > 1/0,1 = 10$. Wir können $N(0,1) = 11$ nehmen. Für $\varepsilon = 0,01$ gilt $101 > 1/0,01 = 100$. Wir können $N(0,01) = 101$ nehmen.

(b) Bezeichnen wir $\frac{999}{1000}$ mit a. Nach Bernoullischer Ungleichung (1.5.10) haben wir:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n \geqq 1 + n(\frac{1}{a} - 1) > n(\frac{1}{a} - 1),$$

da $1/a - 1 > -1$ ist. Multiplizieren wir mit a^n und teilen durch $n(1/a - 1)$:

$$\frac{1}{n(\frac{1}{a} - 1)} > a^n.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es

$$N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon(\frac{1}{a} - 1)}.$$

Daraus folgt

$$\varepsilon > \frac{1}{N(\varepsilon)(\frac{1}{a}-1)}.$$

Folglich, für $n > N(\varepsilon)$:

$$\left|0 - \left(\frac{-999}{1000}\right)^n\right| = \left(\frac{999}{1000}\right)^n = a^n < \frac{1}{n(\frac{1}{a}-1)} < \frac{1}{N(\varepsilon)(\frac{1}{a}-1)} < \varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 0,1$ können wir $N(0,1) = \left[\frac{1}{0{,}1(\frac{1000}{999}-1)}\right] + 1 = 9991$ nehmen. Für $\varepsilon = 0,01$ können wir $N(0,01) = \left[\frac{1}{0{,}01(\frac{1000}{999}-1)}\right] + 1 = 99901$ nehmen. Hier bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Alternativ: Für alle $\varepsilon > 0$

$$\left|0 - \left(\frac{-999}{1000}\right)^n\right| = \left(\frac{999}{1000}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{999}{1000}\right)^n\right) < \ln(\varepsilon)$$

nach Monotonie von Logarithmus.

$$\ln\left(\left(\frac{999}{1000}\right)^n\right) = n\ln\left(\frac{999}{1000}\right) < \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{999}{1000}\right)}.$$

Da $\ln\left(\frac{999}{1000}\right) < 0$. Für alle $\varepsilon > 0$ es gibt $N(\varepsilon) > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{999}{1000}\right)}$. Daraus folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ es gibt $N(\varepsilon)$ so, dass für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt

$$n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{999}{1000}\right)}, \text{ also } \left|0 - \left(\frac{-999}{1000}\right)^n\right| < \varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 0,1$ können wir $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{999}{1000}\right)}\right] + 1$ nehmen. Für $\varepsilon = 0,01$ können wir $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{999}{1000}\right)}\right] + 1$ nehmen.

Aufgabe H 44. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Geben Sie eine geschlossene Formel für die folgenden Folgen an.

(a)

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_1 := 1\,, \quad f_2 := 1\,, \quad f_{n+1} := f_n + 2f_{n-1} \text{ für } n \geqq 2\ .$$

(b)

$$(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } g_1 := 1\,, \quad g_{n+1} := \frac{1}{1+2g_n} \text{ für } n \geqq 1\ .$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bestimmen wir eine Matrixbeschreibung von der Folge f_n, indem wir die Gleichung $A\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ lösen. Nehmen wir an, dass $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + 2f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Heraus gilt: $a = 1, b = 2, c = 1$ und $d = 0$, und:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + 2f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Also,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen wir eine Diagonalmatrix D und eine reguläre Matrix T so, dass $T^{-1}AT = D$. Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda E_2) = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Also die Eigenwerte sind 2 und -1.

Berechnen wir die Eigenräume (sie sind alle eindimensional):

$(A - 2E_2)x = 0$ ergibt: $\left[\begin{array}{rr||r} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$. Folglich: $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$(A + E_2)x = 0$ ergibt: $\left[\begin{array}{rr||r} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Folglich: $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Und $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; T^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$A = TDT^{-1}$ und $A^n = TD^nT^{-1}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}; A^n = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} & (-1)^n \\ 2^n & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2^{n+1} + (-1)^{n+1} & -2^{n+1} + 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & -2^n + 2(-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also } -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2^{n+1} + (-1)^{n+1} & -2^{n+1} + 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & -2^n + 2(-1)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2^{n+1} + (-1)^{n+1} - 2^{n+1} + 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n - 2^n + 2(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Und $f_{n+1} = -\frac{1}{3}(-2^n + (-1)^n - 2^n + 2(-1)^{n+1}) = -\frac{1}{3}(-2^{n+1} + (-1)^{n+1}) = \frac{1}{3}(2^{n+1} - (-1)^{n+1})$. Also, $f_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

(b) Nachdem wir einige erste Folgenglieder ($g_1 = 1, g_2 = \frac{1}{3}, g_3 = \frac{3}{5}, g_4 = \frac{5}{11}$) bestimmt haben, vermuten wir, dass $g_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ mit f_n aus (a). Beweisen wir das mit Hilfe vollständiger Induktion.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: $g_1 = 1/1 = f_1/f_2$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., $g_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: $g_{n+1} = \frac{1}{1+2g_n} = \frac{1}{1+2\frac{f_n}{f_{n+1}}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+1}+2f_n} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}$.

Daraus gilt:

$$g_n = \frac{2^n - (-1)^n}{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 45. *Grenzwerte*

Berechnen Sie jeweils, wenn möglich, den Grenzwert der nachstehenden Folgen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $-1 \leqq \sin(n!) \leqq 1$ für alle natürlichen n gilt, haben wir:

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{-\sqrt[3]{n^2}}{n} \leqq \frac{-\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leqq \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \leqq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leqq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Wir beweisen nun, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\left|0 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon$$

für alle $n > N$ mit $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right] + 1$, da $1/\varepsilon^3 < N < n$ und $1/(n^{1/3}) < \varepsilon$.

Damit folgt auch $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ und somit erhalten wir mit dem Sandwichsatz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Formen wir b_n um:

$$b_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}.$$

Da $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, wissen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ [Beispiel 1.5.8]. Daraus folgen

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 = 1.$$

Somit erhalten wir [1.5.3] $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

Alternativ könnte man b_n auch als eine Summe von zwei Folgen darstellen und den Grenzwert auf diese Weise berechnen.

(c) Mit Hilfe von [Beispiel 1.2.2] formen wir c_n um:

$$c_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, bekommen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1/2 - 0 = 1/2$.

(d) Mit der geometrischen Summenformel erhalten wir:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}=-1+\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^j}=-1+\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=-1+2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=1-\frac{1}{2^n}$$

und damit

$$d_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt[2^n]{2}}=2\cdot\sqrt[2^n]{\frac{1}{2}}.$$

Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit eine Teilfolge der nach [Beispiel 1.5.7] konvergenten Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k=2\sqrt[k]{\frac{1}{2}}$. Insbesondere gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{k\to\infty}2\sqrt[k]{\frac{1}{2}}=2\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{2}}=2\cdot 1=2.$$

Alternativ kann man auch nochmal beweisen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2^n]{2}}=1$ gilt:

$$\left|2^{\frac{1}{2^n}}-1\right|=2^{\frac{1}{2^n}}-1<\varepsilon\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2^n}}<1+\varepsilon\Leftrightarrow$$

$$\log_2(2^{\frac{1}{2^n}})<\log_2(1+\varepsilon)\Leftrightarrow\frac{1}{2^n}<\log_2(1+\varepsilon)\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}<2^n\Leftrightarrow\log_2(\frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)})<\log_2(2^n)=n.$$

Hier haben wir die Monotonie vom Logarithmus benutzt. Daraus folgt, dass für $n>N$ mit $N=\left[\log_2(\frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)})\right]+1$ gilt

$$\left|2^{\frac{1}{2^n}}-1\right|<\varepsilon.$$

Also $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2^n}}=1$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=2$.

Aufgabe H 46. *rekursiv definierte Folgen und Bolzano-Weierstraß*

Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass die folgenden (rekursiv definierten) Folgen konvergieren.

(a) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ für $n\in\mathbb{N}$

— also $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, …, $a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{n Wurzeln}}$

(b) $b_1=\frac{1}{2}$, $b_{n+1}=b_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ für $n\in\mathbb{N}$

— also $b_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bemerken wir, dass $a_n > 0$ ist. Beweisen wir mit Hilfe der Induktion, dass $a_n < 2$ ist.

IA Die Aussage für $n = 1$: $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

IH Wir nehmen an, dass $a_n < 2$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$: $a_n < 2$, also $2 + a_n < 4$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < 2.$$

Zeigen wir nun, dass a_n streng monoton steigend ist:

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \sqrt{2 + a_n} > a_n \Leftrightarrow 2 + a_n > a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 < 0.$$

Die Nullstellen von $a_n^2 - a_n - 2$ sind -1 und 2. Da $0 < a_n < 2$ ist, gilt die Ungleichung $a_n^2 - a_n - 2 < 0$ für alle n, und a_n ist deswegen streng monoton steigend. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Da für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k = 1, \ldots, n$ gilt $(1 - 1/2^k) > 0$, gilt auch $b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > 0$. Und b_n ist mit 0 nach unten beschränkt.
Bewiesen wir, dass b_n streng monoton fallend ist, indem wir die Quotient betrachten:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1,$$

also $b_{n+1} < b_n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe H 47. *Grenzwerte mit Parameter*

Für welche $s \in \mathbb{R}$ divergieren die folgenden Folgen bestimmt gegen $+\infty$?
Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Folgen?
Bestimmen Sie im Fall von Konvergenz auch den Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^4+1}{n^3-2} - \frac{sn^2}{5n+2}$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n^2 + n^s} - n$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durchaus werden wir die Grenzwertsätze benutzen. Formen wir a_n um:

$$a_n = \frac{n^4+1}{n^3-2} - \frac{sn^2}{5n+2} = \frac{(n^4+1)(5n+2) - sn^2(n^3-2)}{(n^3-2)(5n+2)}$$

$$= \frac{5n^5 + 5n + 2n^4 + 2 - sn^5 + 2sn^2}{5n^4 + 2n^3 - 10n - 4} = \frac{n^4((5-s)n + 2 + \frac{2s}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4})}{n^4(5 + \frac{2}{n} - \frac{10}{n^3} - \frac{4}{n^4})}$$

$$= \frac{(5-s)n + 2 + \frac{2s}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{5 + \frac{2}{n} - \frac{10}{n^3} - \frac{4}{n^4}}.$$

Da $0 \leqq \frac{1}{n^4} \leqq \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ bekommen wir nach dem Sandwichsatz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Falls $s = 5$

$$\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{10}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}) = 2 \text{ und}$$
$$\lim_{n\to\infty}(5 + \frac{2}{n} - \frac{10}{n^3} - \frac{4}{n^4}) = 5,$$

also,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{5}.$$

Nehmen wir an, dass $s < 5$ und betrachten wir das Endstück $(a_n)_{n\geqq 2}$, sodass der Nenner $(n^3-2)(5n+2)/n^4 > 0$ für $n \geqq 2$. Betrachten wir $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$: Da $\lim\limits_{n\to\infty}(5 + \frac{2}{n} - \frac{10}{n^3} - \frac{4}{n^4}) = 5$, gibt es nach [1.5.2] c so, dass

$$0 < 5 + \frac{2}{n} - \frac{10}{n^3} - \frac{4}{n^4} < c.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2s}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}) = 0$, gibt es N_1 so, dass für alle $n > N_1$

$$\left|\frac{2s}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}\right| < \frac{1}{k}.$$

Es gibt auch N_2 so, dass für alle $n > N_2$

$$(5-s)n > ck.$$

Betrachten wir $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Für alle $n > N_3$ haben wir:

$$\frac{(5-s)n + 2 + \frac{2s}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{5 + \frac{2}{n} - \frac{10}{n^3} - \frac{4}{n^4}} > \frac{ck + 2 - \frac{1}{k}}{c} > k.$$

Also divergiert die Folge bestimmt gegen $+\infty$.

Genauso beweisen wir, dass die Folge für $s > 5$ bestimmt gegen $-\infty$ divergiert. Nun gibt es N_2' so, dass für alle $n > N_2'$

$$(5-s)n < -ck - 3.$$

Betrachten wir $N_3 = \max\{N_1, N_2'\}$ mit N_1 wie früher. Für alle $n > N_3$ haben wir:

$$\frac{(5-s)n + 2 + \frac{2s}{n^2} + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{5 + \frac{2}{n} - \frac{10}{n^3} - \frac{4}{n^4}} < \frac{-ck - 3 + 2 + \frac{1}{k}}{c} < -k.$$

Also divergiert die Folgen bestimmt gegen $-\infty$. Endlich bekommen wir: für $s = 5$ konvergiert a_n gegen $2/5$, für $s < 5$ divergiert die Folge bestimmt gegen $+\infty$.

(b) Versuchen wir herauszufinden, wann die Folge nach oben beschränkt ist mit $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

$$b_n = \sqrt{n^2 + n^s} - n < c \Leftrightarrow n^2 + n^s < (c+n)^2 \Leftrightarrow n^s < 2cn + c^2.$$

Z.B. für $c = 1/2$ gilt $n^s < n + 1/4$ für alle $s \leqq 1$.

Untersuchen wir die Folge für $s = 1$:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}-n} = \frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1, \text{ nach Sandwichsatz, da}$$

$$1 \leqq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leqq 1+\frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}.$$

Beweisen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n^2} - n = 0$ für $s < 1$.

$$\left|\sqrt{n^2+n^s} - n\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n^s} - n < \varepsilon \Leftrightarrow n^s < 2n\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Die letzte Ungleichung gilt für $n > N$ mit $N = \left[\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-s}}\right] + 1$.

Beweisen wir, dass $(\sqrt{n^2+n^s} - n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ für $s < 1$ divergiert. Für $k \in \mathbb{R},\ k > 1$

$$\left|\sqrt{n^2+n^s} - n\right| > k \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n^s} - n > k \Leftrightarrow n^s > 2nk + k^2.$$

Die letzte Ungleichung gilt für $n > N$ mit $N = \left[(2k+k^2)^{\frac{1}{s-1}}\right] + 1$.

Endlich bekommen wir: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $1/2$ für $s = 1$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0 für $s < 1$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$ für $s > 1$.

Aufgabe H 48. *Konvergenz von Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Wert der Reihe.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{3}{4}\right)^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2}{k^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3j}}{3^{j+3}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3+2^m}{3^{2m+1}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hier geht es um eine geometrische Reihe. $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$, also können wir die Formel benutzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}, \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{20}{7}.$$

Hier haben wir das folgende benutzt: für $k \in \mathbb{R}$ und $S_t = \sum\limits_{n=0}^{t} q^n$ haben wir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} kq^n = \lim\limits_{t\to\infty} kS_t = k \lim\limits_{t\to\infty} S_t$, wenn $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Nach [1.8.3] $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, also

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2}{k^2} = 2(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{49}{18}.$$

(c)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3j}}{3^{j+3}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((-2)^3)^j}{3^3 \cdot 3^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-8)^j}{27 \cdot 3^j}.$$

$\left|-\frac{8}{3}\right| > 1$, also nach [1.9.2] ist $\left(-\frac{8}{3}\right)^j_{j \geqq 0}$ keine Nullfolge, folglich ist $\left(\frac{(-8)^j}{27 \cdot 3^j}\right)_{j \geqq 0}$ auch keine Nullfolge. Und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3j}}{3^{j+3}}$ divergiert nach [1.9.1].

(d) Da $\left|\frac{1}{9}\right| < 1$ und $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$, haben wir

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3+2^m}{3^{2m+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{3}{3^{2m+1}} + \frac{2^m}{3^{2m+1}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9^m} + \frac{2^m}{3 \cdot 9^m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{9^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{3 \cdot 9^m}.$$

Hier haben wir [1.5.3] und den Fakt benutzt, dass beide Folgen von Partielsummen konvergieren.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{9^m} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{1}{8}.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{3 \cdot 9^m} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{9}} - 1\right) = \frac{2}{21} \text{ und}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3+2^m}{3^{2m+1}} = \frac{1}{8} + \frac{2}{21} = \frac{37}{168}.$$