Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Vereinfachen*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $\dfrac{\frac{1+4}{2} + \frac{5}{1+3}}{1 + \frac{3+7\cdot 2}{2}}$

(b) $\dfrac{a(a(a(a+4b)+6b^2)+4b^3)+b^4}{2b^2(a^2+2ab)+(a^2+2ab)^2+b^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(k^3-1)(k^3+1)+1} - \sum_{j=4}^{n+3} n(j-3)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\frac{\frac{1+4}{2} + \frac{5}{1+3}}{1 + \frac{3+7\cdot 2}{2}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{4}}{8 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{19}{2}} = \frac{\frac{15}{2}}{19} = \frac{15}{38}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{a(a(a(a+4b)+6b^2)+4b^3)+b^4}{2b^2(a^2+2ab)+(a^2+2ab)^2+b^4} &= \frac{a(a(a^2+4ab+6b^2)+4b^3)+b^4}{2b^2a^2+4ab^3+a^4+4a^2b^2+4a^3b+b^4} \\ &= \frac{a(a^3+4a^2b+6b^2a+4b^3)+b^4}{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4} \\ &= \frac{a^4+4a^3b+6b^2a^2+4b^3a+b^4}{(a+b)^4} \\ &= \frac{(a+b)^4}{(a+b)^4} = 1.\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(k^3-1)(k^3+1)+1} - \sum_{j=4}^{n+3} n(j-3) &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^6-1+1} - n \cdot \sum_{j=1}^{n} j \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - n \cdot \sum_{j=1}^{n} j.\end{aligned}$$

Mit Aufgabe **P3 (b)** und Beispiel 1.2.2. erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 - n \cdot \sum_{j=1}^{n} j &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - n \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{4}\big(n^4+2n^3+n^2-2n^3-2n^2\big) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{4}n^2.\end{aligned}$$

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

(a) Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

(b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2+2k}-(k+1)}{\sqrt{k(k+1)}}$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} 16 \cdot 17^k$ mit Hilfe von **(a)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen einen Induktionsbeweis durch:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es gilt $\sum_{k=1}^{1}(a_{k+1} - a_k) = a_{1+1} - a_1$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &\overset{\text{IH}}{=} a_{n+1} - a_1 + a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+2} - a_1.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Mit Hilfe des ersten Aufgabenteils folgen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k^2+2k} - (k+1)}{\sqrt{k(k+1)}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k^2+2k}}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{k+1}{\sqrt{k(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} 16 \cdot 17^k = \sum_{k=1}^{n}(17-1) \cdot 17^k = \sum_{k=1}^{n} 17 \cdot 17^k - 17^k = \sum_{k=1}^{n} 17^{k+1} - 17^k = 17^{n+1} - 17.$$

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) $\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{4}{j}\right) = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{k}\right)^4 = \frac{1}{16}(n+1)^4(n+2)^4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist

$$\prod_{j=1}^{1}\left(1+\frac{4}{j}\right) = 1+\frac{4}{1} = 5 = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{24} = \frac{1}{24}(1+1)(1+2)(1+3)(1+4).$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{4}{j}\right) = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n+1}\left(1+\frac{4}{j}\right) &= \left(1+\frac{4}{n+1}\right)\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{4}{j}\right)\\ &\overset{\text{IH}}{=} \frac{(n+5)}{(n+1)}\frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\\ &= \frac{1}{24}(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist

$$\prod_{k=1}^{1}\left(\frac{k+2}{k}\right)^4 = (1+2)^4 = \frac{2^4}{16}(1+2)^4 = \frac{1}{16}(1+1)^4(1+2)^4.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{k}\right)^4 = \frac{1}{16}(n+1)^4(n+2)^4.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k+2}{k}\right)^4 &= \left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^4\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{k}\right)^4\\ &\overset{\text{IH}}{=} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^4\frac{1}{16}(n+1)^4(n+2)^4 = \frac{1}{16}(n+2)^4(n+3)^4.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Rekursion und Teilbarkeit*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Seien $a, b, u_0, u_1, u_2, \ldots \in \mathbb{R}$ und $x_n = ax_{n-1} + bu_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b u_j \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $x_n := 3^{(n+1)} - 2n^2 - 4n - 3$ ohne Rest durch 8 teilbar; das heißt, es gibt ein $k_n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $3^{(n+1)} - 2n^2 - 4n - 3 = 8k_n$.

Hinweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $u_n := n^2 + n$ ohne Rest durch 2 teilbar.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist $x_1 = ax_0 + bu_0 = a^1 x_0 + \sum_{j=0}^{1-1} a^{1-j-1} b u_j$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b u_j.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = ax_n + bu_n &\overset{\text{IH}}{=} a \left(a^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b u_j \right) + bu_n \\ &= a^{n+1} x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a^{(n+1)-j-1} b u_j + bu_n \\ &= a^{n+1} x_0 + \sum_{j=0}^{(n+1)-1} a^{(n+1)-j-1} b u_j. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist

$$3^{(1+1)} - 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = 9 - 2 - 4 - 3 = 0 = 8 \cdot k$$

für $k = 0$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$3^{(n+1)} - 2n^2 - 4n - 3 = 2k.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$
\begin{aligned}
& 3^{(n+1+1)} - 2(n+1)^2 - 4(n+1) - 3 \\
&= 3^{(n+2)} - 2n^2 - 4n - 2 - 4n - 4 - 3 \\
&= 3^{(n+2)} - 2n^2 - 8n - 9 \\
&= 3^{(n+2)} - 2n^2 - 8n - 9 \pm 4 \cdot [n^2 + n] \\
&= [3^{(n+2)} - 6n^2 - 12n - 9] + 4 \cdot [n^2 + n] \\
&= 3 \cdot [3^{(n+1)} - 2n^2 - 4n - 3] + 4 \cdot [n^2 + n] \\
&\overset{\text{IH}}{=} 3 \cdot 8k + 4 \cdot [n^2 + n] \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} 3 \cdot 8k + 4 \cdot 2\tilde{k} \\
&= 8\hat{k}
\end{aligned}
$$

für $\hat{k} = 3k + \tilde{k} \in \mathbb{N}_0$. Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Skizzen von Funktionsgraphen*

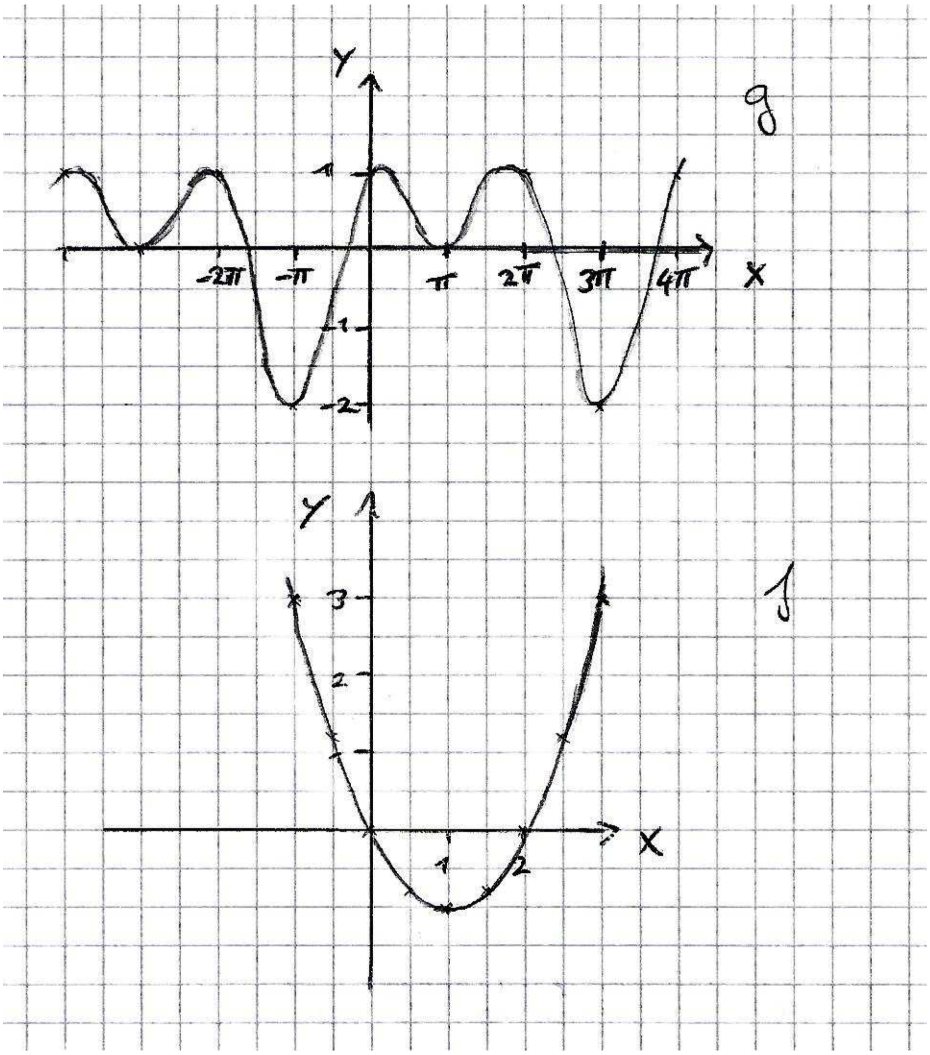
Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-1)^2 - 1$.

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x) + \sin(\frac{x}{2})$

Hinweis: Eine solche Skizze beinhaltet immer eine Achsenbeschriftung mit Pfeilen und eine sinnvolle Achsenskalierung. Wir erwarten von Hand gefertigte Skizzen.

Lösungshinweise hierzu:


y
g
1
-2π
-π
π
2π
3π
4π
x
-1
-2
y
f
3
2
x
1
2

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 6. *Gruselige Summen*

Die Größen a_n und b_{mn} seien für $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ und $m \in \{1,2\}$ gegeben durch:

j	0	1	2	3	4	5
a_j	3	2	-1	1	1	5
b_{1j}	-2	4	0	1	3	-3
b_{2j}	1	7	-4	0	3	1

Berechnen Sie

(a) $\sum_{j=0}^{4} a_{j+\sin(j\pi/2)}$ **(b)** $\sum_{j=1}^{5} j^2 b_{2j}$ **(c)** $\sum_{j=0}^{5}\left(\sum_{k=1}^{2} b_{1j}b_{k5}\right)$ **(d)** $\sum_{j=1}^{2}\left(a_{2j+1}\sum_{k=2}^{4} b_{jk}\right)^j$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{4} a_{j+\sin(j\pi/2)} &= a_{0+0} + a_{1+1} + a_{2+0} + a_{3+(-1)} + a_{4+0}\\ &= a_0 + a_2 + a_2 + a_2 + a_4 = 3 + 3\cdot(-1) + 1 = 1.\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5} j^2 b_{2j} &= 1^2\cdot 7 + 2^2\cdot(-4) + 3^2\cdot 0 + 4^2\cdot 3 + 5^2\cdot 1\\ &= 7 - 16 + 48 + 25 = 64.\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{5}\left(\sum_{k=1}^{2} b_{1j}b_{k5}\right) &= \sum_{j=0}^{5} b_{1j}\left(\sum_{k=1}^{2} b_{k5}\right)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{5} b_{1j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{2} b_{k5}\right)\\ &= (-2+4+0+1+3+(-3))\cdot(-3+1)\\ &= 3\cdot(-2) = -6.\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2}\left(a_{2j+1}\sum_{k=2}^{4} b_{jk}\right)^j &= \left(a_3\sum_{k=2}^{4} b_{1k}\right)^1 + \left(a_5\sum_{k=2}^{4} b_{2k}\right)^2\\ &= 1\cdot(0+1+3) + \big(5\cdot(-4+0+3)\big)^2\\ &= 4 + 5^2 = 29.\end{aligned}$$

Aufgabe H 7. *Ungleichungen*

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{x^2+2x-12}{x^2+8x+15} > 1$?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{x+2}{x^2+8x-9} \leqq \dfrac{1}{8}$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Mitternachtsformel finden wir die Nullstellen von $x^2+8x+15$:

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot15}}{2\cdot1}=\frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{-8\pm2}{2}\implies x_1=-5,\ x_2=-3.$$

Für diese beiden Punkte ist die linke Seite nicht erklärt und wir betrachten die übrigen reellen Zahlen.

I Fall: $x>-3$: In diesem Fall gilt $x^2+8x+15=\underbrace{(x+3)}_{>0}\underbrace{(x+5)}_{>0}>0$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-12}{x^2+8x+15}>1 &\iff x^2+2x-12>x^2+8x+15\\ &\iff -27>6x\\ &\iff x<-\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

II Fall: $-5<x<-3$: In diesem Fall gilt $x^2+8x+15=\underbrace{(x+3)}_{<0}\underbrace{(x+5)}_{>0}<0$ und damit

$$\frac{x^2+2x-12}{x^2+8x+15}>1 \iff x^2+2x-12<x^2+8x+15 \iff x>-\frac{9}{2}.$$

III Fall: $x<-5$: In diesem Fall gilt $x^2+8x+15=\underbrace{(x+3)}_{<0}\underbrace{(x+5)}_{<0}>0$ und damit

$$\frac{x^2+2x-12}{x^2+8x+15}>1 \iff x^2+2x-12>x^2+8x+15 \iff x<-\frac{9}{2}.$$

Der erste Fall kann nicht auftreten und wir erhalten insgesamt, dass die Ungleichung erfüllt ist für alle $x\in\mathbb{R}$, die $x<-5$ oder $-\frac{9}{2}<x<-3$ erfüllen.

(b) Mit der Mitternachtsformel finden wir die Nullstellen von x^2+8x-9:

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2\cdot1}=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{-8\pm10}{2}\implies x_1=-9,\ x_2=1.$$

Für diese beiden Punkte ist die linke Seite nicht erklärt und wir betrachten die übrigen reellen Zahlen.

I Fall: $x>1$: In diesem Fall gilt $x^2+8x-9=\underbrace{(x+9)}_{>0}\underbrace{(x-1)}_{>0}>0$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2+8x-9}\leqq\frac{1}{8} &\iff 8x+16\leqq x^2+8x-9\\ &\iff 0\leqq x^2-25=(x-5)(x+5)\\ &\overset{x+5>0}{\iff} 0\leqq x-5\\ &\iff 5\leqq x.\end{aligned}$$

II Fall: $-9<x<1$: In diesem Fall gilt $x^2+8x-9=\underbrace{(x+9)}_{>0}\underbrace{(x-1)}_{<0}<0$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2+8x-9}\leqq\frac{1}{8} &\iff 8x+16\geqq x^2+8x-9\\ &\iff 0\geqq x^2-25=(x-5)(x+5)\\ &\overset{x-5<0}{\iff} 0\leqq x+5\\ &\iff -5\leqq x.\end{aligned}$$

III Fall: $x < -9$: In diesem Fall gilt $x^2 + 8x - 9 = \underbrace{(x+9)}_{<0}\underbrace{(x-1)}_{<0} > 0$ und damit

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2+8x-9} \leqq \frac{1}{8} \quad &\iff \quad 8x + 16 \leqq x^2 + 8x - 9 \\
&\iff \quad 0 \leqq x^2 - 25 = (x-5)(x+5) \\
&\overset{x-5<0}{\iff} \quad 0 \geqq x + 5 \\
&\iff \quad -5 \geqq x.
\end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt, dass die Ungleichung erfüllt ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die $x \geqq 5$ oder $-5 \leqq x < 1$ oder $x < -9$ erfüllen.

Aufgabe H 8. *Ungleichungen und vollständige Induktion mit Ungleichungen*

(a) Zeigen Sie, dass $2n^4 \geqq n^4 + 16n^3 \geqq n^4 + 4n^3 + n^3$ für alle $n \geqq 16$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von **(a)**, dass $2n^4 \geqq (n+1)^4$ für alle $n \geqq 16$ gilt.

(c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $2^n \geqq n^4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 16$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$2n^4 - (n^4 + 16n^3) = n^4 - 16n^3 = n^3(n-16) \geqq 0,$$

da $n \geqq 16$ ist und somit insbesondere $n \geqq 0$ gilt. Dies liefert die erste Ungleichung. Wegen $n \geqq 0$ gilt natürlich auch

$$n^4 + 16n^3 - (n^4 + 4n^3 + n^3) = 11n^3 \geqq 0$$

und damit die zweite Ungleichung.

(b) Ähnlich wie in **(a)** erhalten wir sukzessive

$$\begin{aligned}
2n^4 &\geqq n^4 + 5n^3 = n^4 + 4n^3 + n^3 \\
&\geqq n^4 + 4n^3 + 7n^2 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + n^2 \\
&\geqq n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 5n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + n \\
&\geqq n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4
\end{aligned}$$

wegen $n \geqq 16$.

(c) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 16$: Es ist

$$2^{16} = 2^{(4\cdot 4)} = (2^4)^4 = 16^4 \geqq 16^4.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 16$ gilt, d.h., es ist

$$2^n \geqq n^4.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{(IH)}}{\geqq} 2n^4 \overset{\textbf{(b)}}{\geqq} (n+1)^4.$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe H 9. *Quadratringe*

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n > k$ betrachten wir die Gleichung

$$\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+2}\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+2}{k+2}.$$

(a) Markieren Sie die Faktoren für $n = 3,\ k = 0$ und für $n = 6,\ k = 3$ im Pascalschen Dreieck.

(b) Zeigen Sie, dasss die obige Formel allgemein gültig ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$n = 0$: $\binom{0}{0}$

$n = 1$: $\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$

$n = 2$: $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$

$n = 3$: $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$

$n = 4$: $\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

$n = 5$: $\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$

$n = 6$: $\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$

$n = 7$: $\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$

$n = 8$: $\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$

$n = 9$: $\binom{9}{0}\ \binom{9}{1}\ \binom{9}{2}\ \binom{9}{3}\ \binom{9}{4}\ \binom{9}{5}\ \binom{9}{6}\ \binom{9}{7}\ \binom{9}{8}\ \binom{9}{9}$

Grün markiert sind jeweils die Faktoren auf der linken Seite und blau markiert sind jeweils die Faktoren auf der rechten Seite.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+2}\binom{n+2}{k+1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+2)!((n+1)-(k+2))!} \cdot \frac{(n+2)!}{(k+1)!((n+2)-(k+1))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+2)!(n-(k+1))!} \cdot \frac{(n+2)!}{(k+1)!((n+1)-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \cdot \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \cdot \frac{(n+2)!}{(k+2)!((n+2)-(k+2))!} \\
&= \binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+2}{k+2}.
\end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 10. *Dreisatz*

15 Kugeln mit jeweils einem Umfang von 70 cm wiegen zusammen $6,5$ kg.

(a) Bestimmen Sie die Dichte einer solchen Kugel.

(b) Wieviel wiegen 25 Kugeln aus dem selben Material aber mit einem Umfang von 60 cm?

Hinweis: Sie können eine Formelsammlung Ihres Vertrauens benutzen (geben Sie an, welche) und Ihre Ergebnisse angemessen runden. Der Umfang einer Kugel ist der Umfang des Kreises, der sich als Schnitt mit einer Ebene durch den Mittelpunkt ergibt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Beispielsweise auf Wikipedia finden sich die folgenden Formeln:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad U = 2\pi r, \quad m = \rho V,$$

wobei V das Volumen, r der Radius, $U = 70$ cm der Umfang, $m = \frac{1}{15} \cdot 6,5$ kg die Masse und ρ die Dichte von einer der gegebenen Kugeln ist.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{1}{15} \cdot 6,5\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\frac{1}{15} \cdot 6,5\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi (\frac{U}{2\pi})^3} = \frac{\frac{1}{15} \cdot 6500\,\mathrm{g}}{\frac{4}{3\cdot 8}\frac{1}{\pi^2}70^3\,\mathrm{cm}^3} &= \frac{\frac{2\pi^2}{5}6500}{70^3}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \\ &= \frac{2600\pi^2}{70^3}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \approx 0,0748\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.\end{aligned}$$

(b) Sie nun $\tilde{V}$ das Volumen einer der neuen 25 Kugeln. Dann wiegen diese zusammen

$$\begin{aligned}25 \cdot \tilde{V} \cdot \rho = 25 \cdot \left(\frac{4}{3 \cdot 8}\frac{1}{\pi^2}60^3\,\mathrm{cm}^3\right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{15} \cdot 6500\,\mathrm{g}}{\frac{4}{3\cdot 8}\frac{1}{\pi^2}70^3\,\mathrm{cm}^3}\right) \\ = \frac{25}{15}\frac{60^3}{70^3} \cdot 6500\,\mathrm{g} = \frac{5}{3}\frac{6^3}{7^3} \cdot 6500\,\mathrm{g} \approx 6,822\,\mathrm{kg}.\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11. *Ungleichungen*

Sei $a_m > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und sei $A_m := \frac{a_1+\cdots+a_m}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $a_{m+1}(A_m)^m \leqq (A_{m+1})^{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Benutzen Sie die Bernoulli-Ungleichung mit $n = m+1$ und $x = \frac{A_{m+1}}{A_m} - 1$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von **(a)**, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{j=1}^m a_j \leqq \left(\frac{a_1+\cdots+a_m}{m}\right)^m$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten zuerst die Bernoullische Ungleichung mit der in dem Hinweis angegebenen Wahl für x und n. Es gilt dann also

$$1 + (m+1)\left(\frac{A_{m+1}}{A_m} - 1\right) \leqq \left(1 + \frac{A_{m+1}}{A_m} - 1\right)^{m+1}.$$

Die rechte Seite vereinfacht sich direkt zu

$$\left(1 + \frac{A_{m+1}}{A_m} - 1\right)^{m+1} = \frac{(A_{m+1})^{m+1}}{(A_m)^{m+1}}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} A_{m+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_{m+1}}{m+1} &= \frac{m}{m+1}\left(\frac{a_1+\cdots+a_{m+1}}{m}\right) \\ &= \frac{m}{m+1}\left(A_m + \frac{a_{m+1}}{m}\right) = \frac{1}{m+1}\left(mA_m + a_{m+1}\right) \end{aligned}$$

lässt sich die linke Seite schreiben als

$$\begin{aligned} 1 + (m+1)\left(\frac{A_{m+1}}{A_m} - 1\right) &= 1 + (m+1)\frac{A_{m+1} - A_m}{A_m} \\ &= 1 + \frac{mA_m + a_{m+1} - (m+1)A_m}{A_m} = \frac{a_{m+1}}{A_m}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt daher aus der Bernoullischen Ungleichung

$$\frac{a_{m+1}}{A_m} \leqq \frac{(A_{m+1})^{m+1}}{(A_m)^{m+1}}.$$

Wegen $(A_m)^{m+1} > 0$ erhalten wir daraus sofort $a_{m+1}(A_m)^m \leqq (A_{m+1})^{m+1}$ und somit die Behauptung da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war.

(b) **IA** Wir zeigen die Aussage für $m = 1$: Es ist

$$\prod_{j=1}^{1} a_j = a_1 \leqq a_1 = \left(\frac{a_1}{1}\right)^1.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{j=1}^{m} a_j \leqq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}\right)^m.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $m+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für m:

$$\prod_{j=1}^{m+1} a_j = a_{m+1}\prod_{j=1}^{m} a_j \overset{\text{IH}}{\leqq} a_{m+1}A_m \overset{\text{(a)}}{\leqq} (A_{m+1})^{m+1} = \left(\frac{a_1+\cdots+a_{m+1}}{m+1}\right)^{m+1}.$$

Damit ist die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe H 12. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(\overline{z}+12-\mathrm{i}) \geqq 1\right\}$

(b) $B := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \dfrac{z}{1-\mathrm{i}} \in \mathbb{R}\right\}$

(c) $C := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) \neq 0 \ \wedge\ 1 < \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \leqq 2\right\}$

(d) $D := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \big||\operatorname{Re}(z)| - |\operatorname{Im}(z)|\big| \leqq 1\right\}$

Lösungshinweise hierzu:

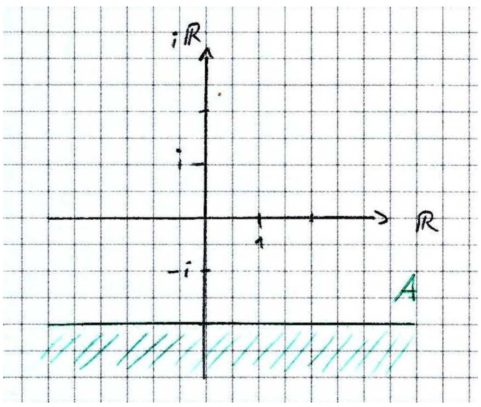
(a) Für $z = a + ib$ gilt

$$\operatorname{Im}(\overline{z}+12-\mathrm{i}) = \operatorname{Im}(\overline{a+b\mathrm{i}}+12-\mathrm{i}) = \operatorname{Im}(a-b\mathrm{i}+12-\mathrm{i}) = \operatorname{Im}(a+12+(-1-b)\mathrm{i}) = -1-b.$$

Daher folgt

$$A = \left\{a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, -1-b \geqq 1\right\} = \left\{a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, b \leqq -2\right\}.$$

Die Menge ergibt sich als die Fläche unterhalb einer Geraden, wobei die Gerade selbst zu A gehört.



(b) Für $z = a + ib$ ist

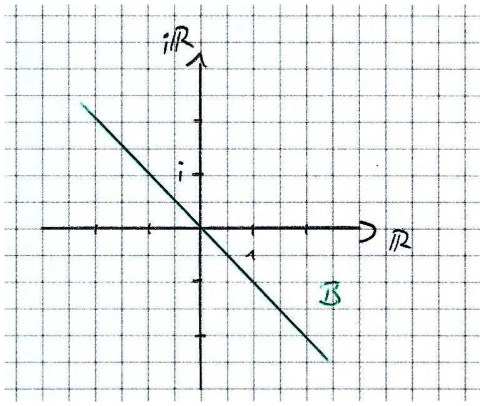
$$\frac{z}{1-\mathrm{i}} = \frac{z(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1}{2}z(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{2}(a+b\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{2}(a-b+(b+a)\mathrm{i}).$$

Es gilt also

$$\frac{z}{1-i} \in \mathbb{R} \text{ genau dann, wenn } b+a=0.$$

Damit folgt

$$B = \left\{a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a=-b\right\}.$$



(c) Wir können die Menge C darstellen als $C = \left\{a + bi \in \mathbb{C} \,\middle|\, b \neq 0 \ \wedge \ 1 < \frac{a}{b} \leqq 2\right\}$. Wegen $\frac{a}{b} > 1 > 0$ für $a + bi \in C$ sind entweder a und b beide positiv, oder beide negativ. Es gibt also zwei Fälle:

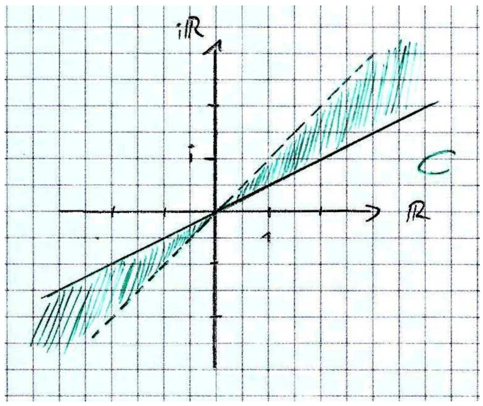
1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$: Dann gilt $b < a \leqq 2b$.

2. Fall: $a < 0$ und $b < 0$: Dann gilt $2b \leqq a < b$.

Damit können wir C darstellen als

$$\begin{aligned} C = &\left\{a + bi \in \mathbb{C} \,\middle|\, a > 0,\ b > 0 \text{ und } b < a \leqq 2b\right\} \cup \\ &\left\{a + bi \in \mathbb{C} \,\middle|\, a < 0,\ b < 0 \text{ und } 2b \leqq a < b\right\}. \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Fläche, wobei die gestrichelte Gerade und der Punkt 0 nicht zu C gehören.



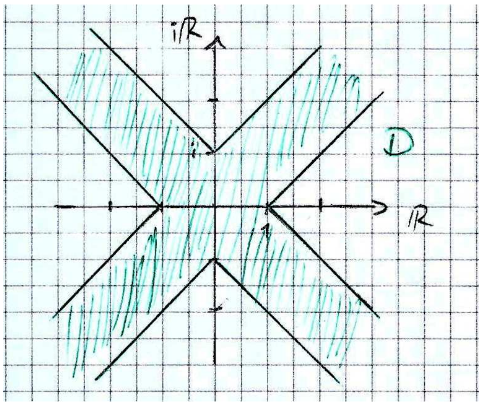
(d) Für $z = a + \mathrm{i}b$ ist

$$\begin{aligned} 1 \geqq \big|\,|\operatorname{Re}(z)| - |\operatorname{Im}(z)|\,\big| = \big||a| - |b|\big| \quad &\Leftrightarrow \quad |a| - |b| \leqq 1 \text{ und } |b| - |a| \leqq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |a| - 1 \leqq |b| \leqq |a| + 1. \end{aligned}$$

Indem man die Fälle $b \geqq 0$ und $b < 0$ getrennt betrachtet, kann man D darstellen als

$$\begin{aligned} D = &\left\{a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} \,\middle|\, b \geqq 0 \text{ und } |a| - 1 \leqq b \leqq |a| + 1\right\} \cup \\ &\left\{a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} \,\middle|\, b < 0 \text{ und } -|a| - 1 \leqq b \leqq 1 - |a|\right\}. \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Menge, wobei der Rand zur Menge gehört.



Aufgabe H 13. *Abbildungen*

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $c \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass f aus **(a)** nicht surjektiv ist.
Hinweis: Kann man ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ mit $f(x) = \frac{a}{c}$ finden?

(c) Finden Sie eine Menge M so, dass $g : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to M \colon x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ bijektiv ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $g^{-1} : M \to \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ von g aus **(c)** gegeben ist durch $g^{-1} \colon x \mapsto \frac{dx-b}{-cx+a}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ mit $f(x) = f(y)$ beliebig. Dann gilt also

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d} \quad \text{und somit} \quad (ax+b)(cy+d) = (ay+b)(cx+d).$$

Dies lässt sicher vereinfachen zu

$$acxy + bcy + dax + bd = acyx + ayd + bcx + bd, \text{ also } (ad-bc)(x-y) = 0.$$

Wegen $ad - bc \neq 0$ folgt daraus nun $x = y$ und damit die Injektivität von f.

(b) Angenommen, es gibt ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ mit $f(x) = \frac{a}{c}$. Dann gilt also

$$\frac{a}{c} = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ und damit } acx + ad = axc + cb.$$

Dies liefert nun aber $ad - cb = 0$, was ein Widerspruch ist. Damit kann so ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ nicht existieren und die Abbildung f ist nicht surjektiv.

(c) Wir behaupten, dass die Abbildung g bijektiv ist für $M := \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Wegen dem ersten Aufgabenteil wissen wir bereits, dass g injektiv ist und es bleibt die Surjektivität zu zeigen.
Sei also $y \in M$ beliebig. Dazu suchen wir ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ mit $g(x) = y$, also mit

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \iff cxy + dy = ax + b \iff x(cy-a) = b - dy.$$

Wegen $y \in M$ ist nun $cy - a \neq 0$ und wir erhalten

$$x = \frac{b-dy}{cy-a} \neq -\frac{d}{c}.$$

Wäre $x = -\frac{d}{c}$, so erhielten wir wieder einen Widerspruch zu $ad - bc \neq 0$. Damit erfüllt diese Zahl x also $g(x) = y$. Da $y \in M$ beliebig war, ist g also surjektiv.

(d) Die Abbildung g^{-1} erfüllt

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{d\frac{ax+b}{cx+d} - b}{-c\frac{ax+b}{cx+d} + a} = \frac{dax+db-bcx-bd}{-cax-cb+acx+ad}$$
$$= \frac{(da-bc)x}{ad-cb} = x$$

für alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-\frac{d}{c}\}$. Genauso erhalten wir

$$g(g^{-1}(y)) = y$$

für alle $y \in M$. Damit ist g^{-1} tatsächlich die Umkehrabbildung von g.

Aufgabe H 14. *Mengen*

Gegeben seien die Mengen

$$M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| \leqq 3\right\}, \quad M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |xy| \geqq 1\right\}$$

und

$$M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > |\sin(\tfrac{\pi}{3}x)|\right\}.$$

Skizzieren Sie Mengen M_1, M_2, $M_1 \cap M_2$ und $(\mathbb{R}^2 \smallsetminus M_3) \cap M_1$.

Lösungshinweise hierzu:

- Zu M_1: Man beobachtet zuerst, dass

  $$|x| + |y| \leqq 3 \iff |y| \leqq 3 - |x| \iff y \leqq 3 - |x| \text{ und } -y \leqq 3 - |x|.$$

  Damit lässt sich M_1 darstellen als

  $$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq f(x)\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqq g(x)\right\}$$

  mit Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3 - |x|$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x| - 3$. Hierbei ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq f(x)\right\}$ die Menge aller (x,y) unter (und auf) dem Graphen der Funktion f und $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqq g(x)\right\}$ ist die Menge aller (x,y) über (und auf) dem Graphen der Funktion g.

- Zu M_2: Man beobachtet zuerst, dass

  $$|xy| \geqq 1 \iff |y| \geqq \frac{1}{|x|} \iff y \leqq -\frac{1}{|x|} \text{ und } y \geqq \frac{1}{|x|}.$$

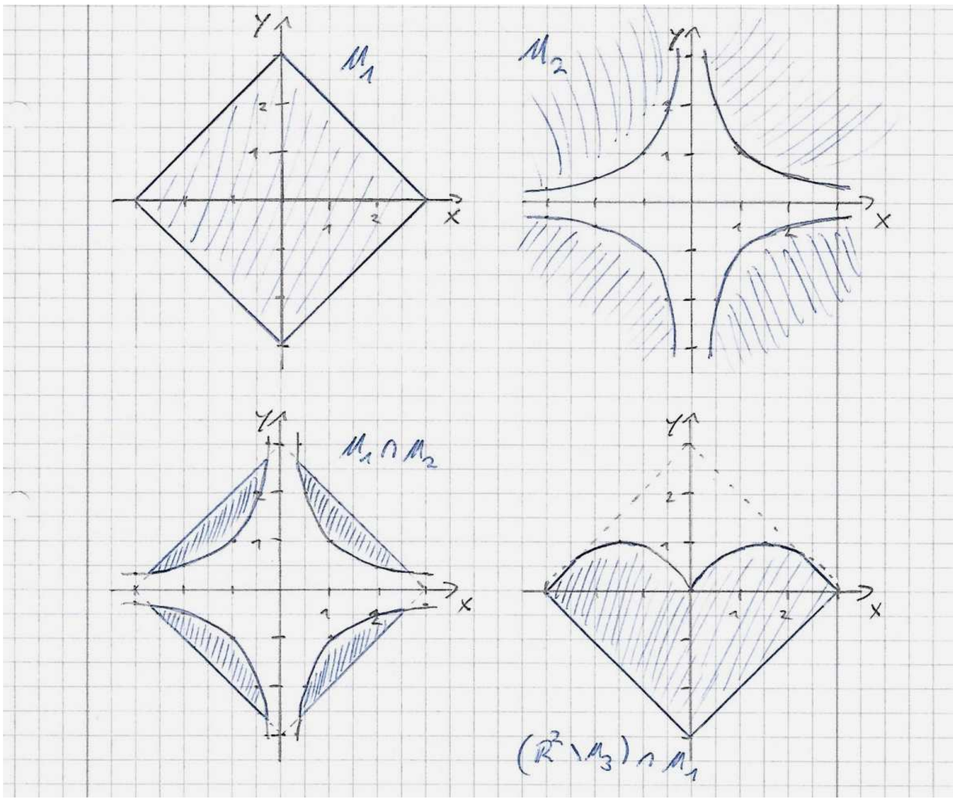
  Damit lässt sich M_2 ausdrücken als

  $$M_2 = \{0\} \cup \left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq f(x)\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqq g(x)\right\}\right)$$

  mit $f : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{|x|}$ und $g : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|}$. Hierbei ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq f(x)\right\}$ die Menge aller (x,y) unter (und auf) dem Graphen der Funktion f und $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqq g(x)\right\}$ ist die Menge aller (x,y) über (und auf) dem Graphen der Funktion g.

- Zu M_3: Dies ist gerade die Menge aller $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ über dem Graphen der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |\sin(\frac{\pi}{3}x)|$.

Damit ergeben sich die folgenden Skizzen, wobei der Rand jeweils dazugehört:



Hinweise zum Skizzieren von Mengen:

- Ihre Skizze sollte immer beschriftete Achsen und eine nachvollziehbare Achsenskalierung besitzen.
- Sie sollten immer klarstellen, ob der Rand zu der skizzierten Menge dazugehört oder nicht. Falls der Rand nicht vollständig zur Menge gehört, empfiehlt es sich, die dazugehörigen Teile mit durchgezogenen Linien zu zeichnen und die nicht dazugehörigen Teile mit gestrichelten Linien zu zeichnen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 15. *Vollständige Induktion mit rekursiver Folge*

Seien $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Folgenglieder der Fibonacci-Folge. Diese erfüllen $f_1 = f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geqq 3$. Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass $f_n^2 + f_n f_{n+1} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist

$$f_1^2 + f_1 f_{1+1} - f_{1+1}^2 = 1^2 + 1 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^{1+1}.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$f_n^2 + f_n f_{n+1} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{(n+1)+1} - f_{(n+1)+1}^2 = f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{n+2} - f_{n+2}^2.$$

Da nun $n + 2 \geqq 3$ ist für $n \in \mathbb{N}$, dürfen wir die rekursive Definition der Fibonacci-Folge benutzen und erhalten damit

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{n+2} - f_{n+2}^2 &= f_{n+1}^2 + f_{n+1}(f_{n+1} + f_n) - (f_{n+1} + f_n)^2 \\ &= f_{n+1}^2 + f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_n - f_{n+1}^2 - 2 f_{n+1} f_n - f_n^2 \\ &= f_{n+1}^2 - f_{n+1} f_n - f_n^2 \\ &= -(f_n^2 + f_{n+1} f_n - f_{n+1}^2) \\ &\overset{\text{IH}}{=} -(-1)^{n+1} = (-1)^{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Komplexe Lösungen von Gleichungen*

Geben Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an.

(a) $z^3 = 6$ **(b)** $z^{10} - z = 0$

(c) $9z^2 - 18z\mathrm{i} + 7 = 0$ **(d)** $z^2 - 6\mathrm{i}z - \frac{17}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Gemäß 1.8.4 lauten die Lösungen dieser Gleichung

$$z_\ell = \sqrt[3]{6} \cdot (\cos(\tfrac{2\ell\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{2\ell\pi}{3})) \quad \text{für} \quad \ell \in \{0,1,2\}.$$

(b) Diese Gleichung lässt sich schreiben als $z(z^9 - 1) = 0$. Eine Lösung der Gleichung ist folglich $z = 0$ und für alle anderen Lösungen gilt $z^9 = 1$. Also sind die weiteren Lösungen gegeben durch

$$z_\ell = \cos(\tfrac{2\ell\pi}{9}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{2\ell\pi}{9}) \quad \text{für} \quad \ell \in \{0,1,2,...,8\}.$$

(c) Mittels quadratischer Ergänzung lässt sich die Gleichung schreiben als

$$0 = 9z^2 - 18z\mathrm{i} + 7 = (3z - 3\mathrm{i})^2 + 16.$$

D.h. ihre Lösungen erfüllen $3z - 3\mathrm{i} = \pm\mathrm{i}\sqrt{16} = \pm\mathrm{i}4$, und somit sind sie gegeben durch

$$z = \left(1 \pm \frac{4}{3}\right)\mathrm{i}.$$

(d) Wieder mit quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$0 = z^2 - 6\mathrm{i}z - \frac{17}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = (\underbrace{z - 3\mathrm{i}}_{=:w})^2 + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad w^2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} =: x.$$

Nun gilt $|x| = 1$ und $x = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3})$. Die Lösungen der obigen Gleichung in w sind also

$$w_\ell = \cos\left(\frac{2\pi}{3\cdot 2} + \frac{2\pi\ell}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3\cdot 2} + \frac{2\pi\ell}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\ell\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\ell\right)$$

für $\ell \in \{0,1\}$, bzw.

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } w_1 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die Lösungen der originalen Gleichung sind damit gegeben durch

$$z_0 = w_0 + 3\mathrm{i} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{6+\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad z_1 = w_1 + 3\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{6-\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe H 17. *Untervektorräume*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie ihre Antwort.

(a) Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ ist $V_1 := \{au + bv \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) $V_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.

(c) V_2 ist ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.

(d) $V_3 := \{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \colon 3a + 5b - c = 0\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

- Für $x, y \in V_1$ gibt es $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{R}$ mit $x = a_x u + b_x v$ und $y = a_y u + b_y v$. Dann gilt
$$x + y = (a_x + a_y)u + (b_x + b_y)v \in V_1,$$
da $a_x + a_y \in \mathbb{R}$ und $b_x + b_y \in \mathbb{R}$.
- Für $x \in V_1$ und $s \in \mathbb{R}$ gibt es $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ mit $x = a_x u + b_x v$. Dann gilt
$$sx = (sa_x)u + (sb_x)v \in V_1,$$
da $sa_x \in \mathbb{R}$ und $sb_x \in \mathbb{R}$.
- Es gilt $0 = au + bv \in V_1$ für $a = b = 0$.

Damit ist V_1 ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum für $u, v \in \mathbb{R}^3$. Da $u, v \in \mathbb{R}^3$ beliebig waren gilt dies für alle.

(b)
- Für $z = x + iy, w = u + iv \in V_2$ gilt $x = \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = y$ bzw. $u = \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w) = v$. Da $z + w = (x + u) + i(y + v)$ ist, gilt $\mathrm{Re}(z + w) = x + u = y + v = \mathrm{Im}(z + w)$ und folglich $z + w \in V_2$.
- Für $z = x + iy \in V_2$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt $sz = (sx) + i(sy)$ und damit $\mathrm{Re}(sz) = sx = sy = \mathrm{Im}(sz)$ bzw. $sz \in V_2$.
- Es gilt $\mathrm{Re}(0) = 0 = \mathrm{Im}(0)$ und folglich $0 \in V_2$.

Dies beweist, dass V_2 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(c) Da $x := 1 + i \in V_2$ und $i \in \mathbb{C}$ gilt, aber $ix = -1 + i \notin V_2$ ist, kann V_2 kein $\mathbb{C}$-Vektorraum sein.

(d)
- Für $p_1(X) = a_1X^2 + b_1X + c_1, p_2(X) = a_2X^2 + b_2X + c_2 \in V_3$ gilt
$$(p_1 + p_2)(X) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in\mathbb{R}} X^2 + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in\mathbb{R}} X + \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\in\mathbb{R}}.$$
Ferner gilt
$$3(a_1+a_2)+5(b_1+b_2)-(c_1+c_2) = (3a_1+5b_1-c_1)+(3a_2+5b_2-c_2) = 0+0 = 0$$
und damit $p_1 + p_2 \in V_3$.
- Für $p_1(X) = a_1X^2 + b_1X + c_1, p_2(X) \in V_3$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt $(sp_1)(X) = (sa_1)X^2 + (sb_1)X + (sc_1)$. Desweiteren folgt aus
$$3(sa_1) + 5(sb_1) - (sc_1) = s(3a_1 + 5b_1 - c_1) = s \cdot 0 = 0,$$
dass $sp_1 \in V_2$ gilt.
- Es gilt $3a + 5b - c = 0$ für $a = b = c = 0$ und damit ist $0 = 0X^2 + 0X + 0 \in V_2$.

Dies beweist, dass V_3 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe H 18. *Skalarprodukt im Polynomraum*

Sei $V := \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R} \subsetneqq \mathcal{C}^0([0, 1])$ der Vektorraum alle Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Grad maximal 2 versehen mit dem Skalarprodukt
$$\langle p \,|\, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \,\mathrm{d}\, x$$
aus Beispiel 2.5.3 und zugehöriger Norm $\|p\| = \sqrt{\langle p \,|\, p \rangle}$. Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $B\colon b_1, b_2, b_3$ von V, d.h. $\langle b_j \,|\, b_k \rangle = 1$ falls $j = k$ und $\langle b_j \,|\, b_k \rangle = 0$ sonst. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Wählen Sie b_1 als ein normiertes konstantes Polynom, d.h. $\|b_1\| = 1$.

(b) Wählen Sie $b_2(X) = a_1X + a_0 \in V$ so dass $\langle b_2 \,|\, b_1 \rangle = 0$ und $\|b_2\| = 1$ gilt.

(c) Wählen Sie $b_3(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in V$ so dass $\langle b_3 \,|\, b_1 \rangle = \langle b_3 \,|\, b_2 \rangle = 0$ und $\|b_3\| = 1$ gilt.

(d) Bildet B auch eine Basis?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Polynom $b_1(X) := 1$ erfüllt $\|b_1\| = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}\,x = 1$.

(b) Es gilt

$$0 = \langle b_2 \,|\, b_1 \rangle = \int_0^1 a_1x + a_0 \,\mathrm{d}\,x = a_1/2 + a_0 \ .$$

Daraus folgt $a_0 = -a_1/2$ und damit $b_2(X) = a_1(X - 1/2)$. Ferner gilt

$$1 = \|b_2\| = a_1^2 \int_0^1 (x - 1/2)^2 \,\mathrm{d}\,x = a_1^2/12$$

und damit $a_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ($a_1 = -\sqrt{12}$ wäre auch möglich). Insgesamt erhalten wir $b_2(X) = 2\sqrt{3}(X - 1/2)$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle b_3 \,|\, b_2 \rangle &= \int_0^1 (a_2x^2 + a_1x + a_0)(2x - 1)\sqrt{3} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 2a_2x^3 + (2a_1 - a_2)x^2 + (2a_0 - a_1)x - c \,\mathrm{d}\,x \\
&= \sqrt{3}(a_2/2 + (2a_1 - a_2)/3 + (2a_0 - a_1)/2 - a_0) \\
&= \sqrt{3}(a_2/6 + a_1/6) \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt $a_1 = -a_2$. Ferner

$$\begin{aligned}
\langle b_3 \,|\, b_1 \rangle &= \int_0^1 a_2x^2 - a_2x + a_0 \,\mathrm{d}\,x \\
&= a_2/3 - a_2/2 + a_0 \\
&= a_0 - a_2/6
\end{aligned}$$

liefert $a_0 = a_2/6$ und damit $b_3(X) = a_2(X^2 - X + 1/6)$. Abschließend betrachten wir

$$\begin{aligned}
\langle b_3 \,|\, b_3 \rangle &= a_2^2 \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2 \,\mathrm{d}\,x \\
&= a_2^2 \int_0^1 x^4 + x^2 + 1/36 - 2x^3 + x^2/3 - x/3 \,\mathrm{d}\,x \\
&= a_2^2(1/5 + 1/3 + 1/36 - 1/2 + 1/9 - 1/6) \\
&= a_2^2/180 \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt $a_2 = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ ($a_2 = -\sqrt{180}$ wäre auch möglich). Insgesamt erhalten wir $b_3(X) = 6\sqrt{5}(X^2 - X + 1/6)$.

(d) Sei $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ eine Darstellung der Null mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$0 = \langle b_j \,|\, 0 \rangle = \langle b_j \,|\, a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \rangle = a_1 \langle b_j \,|\, b_1 \rangle + a_2 \langle b_j \,|\, b_2 \rangle + a_3 \langle b_j \,|\, b_3 \rangle = a_j$$

für $j = 1, 2, 3$ und damit ist B linear unabhängig. Damit ist B als Menge von 3 linear unabhängigen Vektoren in einem 3-dimensionalen Raum eine Basis.

Aufgabe H 19. *Abstand zwischen windschiefen Geraden*

Zeigen Sie, dass die beiden Parameterdarstellungen $g_1 = p_1 + \mathbb{R}v_1$ und $g_2 = \mathbb{R}v_2$ mit $p_1 = (6, 5, 2)$, $v_1 = (1, 1, 0)$ und $v_2 = (1, 0, 1)$ windschiefe Geraden beschreiben (d. h. g_1 und g_2 sind nicht parallel und schneiden sich nicht), berechnen Sie deren Abstand und bestimmen Sie die Punkte $Q_1 \in g_1$ und $Q_2 \in g_2$ mit dem kürzesten Abstand.
Hinweis: Es darf verwendet werden, dass die Verbindungsstrecke von Q_1 nach Q_2 senkrecht auf g_1 und g_2 steht, d.h. $\left\langle \overrightarrow{Q_1Q_2} \,\middle|\, v_1 \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{Q_1Q_2} \,\middle|\, v_2 \right\rangle = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Da v_1 und v_2 linear unabhängig sind, sind g_1 und g_2 nicht parallel. Später sehen wir, dass Q_1 und Q_2 einen positiven Abstand haben und damit g_1 und g_2 windschief sind. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $Q_1 = p_1 + x_1v_1$ und $Q_2 = x_2v_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle p_1 + x_1v_1 - x_2v_2 \,|\, v_1 \rangle &= 0 \\ \langle p_1 + x_1v_1 - x_2v_2 \,|\, v_2 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Da $\langle p_1 \,|\, v_1 \rangle = 11$, $\langle p_1 \,|\, v_2 \rangle = 8$, $\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = 1$ und $\langle v_1 \,|\, v_1 \rangle = \langle v_2 \,|\, v_2 \rangle = 2$ gilt, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -11 \\ x_1 - 2x_2 &= -8. \end{aligned}$$

Dieses LGS besietzt die eindeutige Lösung $x_1 = -14/3$ und $x_2 = 5/3$. Damit gilt $Q_1 = 1/3 \cdot (4, 1, 6)$ und $Q_2 = 5/3 \cdot (1, 0, 1)$. Da $Q_1 \neq Q_2$ ist, haben die Geraden einen positiven Abstand und sind damit windschief. Genauer beträgt der Abstand $\sqrt{3}/3$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 20. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die die folgende Ungleichung erfüllen

$$|x^3 - 3x| < 2x.$$

Hinweis: Eine Skizze kann hilfreich sein.

Lösungshinweise hierzu: Da der Betrag stets größer gleich Null ist und die rechte Seite für $x \leqq 0$ kleiner gleich Null ist, können wir uns auf $x > 0$ beschränken. Das Polynom innerhalb des Betrags zerfällt (unter Verwendung der 3. binomischen Formel) in die Linearfaktoren

$$p(x) := x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Da für $x > 0$ die Linearfaktoren x und $x + \sqrt{3}$ stets positiv sind, entscheidet allein $x - \sqrt{3}$ über das Vorzeichen von p. Damit ist $p(x) \leqq 0$ für $0 < x \leqq \sqrt{3}$ und $p(x) \geqq 0$ für $x \geqq \sqrt{3}$. Betrachten wir zunächst $0 < x \leqq \sqrt{3}$. In diesem Fall ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$-x^3 + 3x < 2x \iff 0 < x^3 - x = x(x - 1)(x + 1). \tag{1}$$

Hier wurde erneut die binomische Formel verwendet. Da $x > 0$ gilt, ist dies genau dann erfüllt, wenn $x > 1$.

Nun betrachten wir den Fall $x \geqq \sqrt{3}$. In diesem Fall ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$x^3 - 3x < 2x \iff 0 > x^3 - 5x = x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}). \tag{2}$$

Da $x > 0$ gilt, ist dies genau dann erfüllt, wenn $x < \sqrt{5}$.

Insgesamnt erhalten wir die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \sqrt{5}\}$.

Zusatz: Falls man oben nicht erkennt, dass es genügt den Fall $x > 0$ zu betrachten, so erhält man noch folgende weitere Fälle.

Für $-\sqrt{3} \leqq x \leqq 0$ ist $p(x) \geqq 0$. Damit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu (2). Jedoch ist $x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \geqq 0$ für alle $-\sqrt{3} \leqq x \leqq 0$ und damit gibt es keine Lösung mit $-\sqrt{3} \leqq x \leqq 0$.

Für $x \leqq -\sqrt{3}$ ist $p(x) \leqq 0$. Damit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu (1). Jedoch ist $x(x - 1)(x + 1) < 0$ für alle $x \leqq -\sqrt{3}$ und damit gibt es keine Lösung mit $x \leqq -\sqrt{3}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Lineare Hülle*

(a) Sei $w_1 = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $w_2 = (12, 4, 8) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $u = (5, 5, 4) \in \mathrm{L}(w_1, w_2)$ gilt, aber $v = (5, 4, 4) \in \mathrm{L}(w_1, w_2)$ nicht gilt.

(b) In der Kassenschlange bei einem Metzger soll ein Kunde für 1 Knackwurst und 12 Scheiben Aufschnitt 2.50 Euro, ein zweiter Kunde für 2 Knackwürste und 4 Scheiben Aufschnitt 2.00 Euro und ein dritter Kunde für 1 Knackwurst und 8 Scheiben Aufschnitt ebenfalls 2.00 Euro bezahlen. Warum kann das nicht sein?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$2 \cdot w_1 + 1/4 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 12 \\ 2 \cdot 2 + 1/4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = u$$

Damit ist $u \in \mathrm{L}(w_1, w_2)$.

Angenommen $v \in \mathrm{L}(w_1, w_2)$ dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 12\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ \lambda_1 + 8\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösen wir die erste Gleichung nach λ_1 auf und setzten dies in die zweite ein, so folgt $\lambda_2 = 3/10$. Setzen wir dies wiederum in die erste Gleichung ein so folgt $\lambda_1 = 7/5$. Jedoch ist dann $\lambda_1 + 8\lambda_2 = 19/5 \neq 4$ und damit die dritte Gleichung nicht erfüllt. Damit ist gezeigt, dass unsere Annahme $v \in \mathrm{L}(w_1, w_2)$ nicht gilt.

(b) Sei $p_1 \in \mathbb{R}$ und $p_2 \in \mathbb{R}$ die Preise für eine Knackwurst bzw. eine Scheibe Aufschnitt (in Euro). Dann ergeben sich die Werte für die Einkäufe der drei Kunden durch

$$\begin{aligned} 1 \cdot p_1 + 12 \cdot p_2 &= 2.5 \text{ (Euro)} \\ 2 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 &= 2 \text{ (Euro)} \\ 1 \cdot p_1 + 8 \cdot p_2 &= 2 \text{ (Euro).} \end{aligned}$$

Mit andern Worten $p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 = 1/2 \cdot v \in \mathrm{L}(w_1, w_2)$. Daraus folgt $v \in \mathrm{L}(w_1, w_2)$ was im Widerspruch zur ersten Teilaufgabe steht. Damit muss sich der Metzger beim Kassieren verrechnet haben.

Aufgabe H 22. *Basis*

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ besteht aus den folgenden Vektoren:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sei weiter $v = (1, -1, 0)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle b_1 \mid b_2 \rangle = \langle b_1 \mid b_3 \rangle = \langle b_2 \mid b_3 \rangle = 0$.

(b) Berechnen Sie $|b_1|$, $|b_2|$ und $|b_3|$.

(c) Zeigen Sie: $v = \frac{\langle v \,|b_1 \rangle}{\langle b_1 \,|b_1 \rangle} b_1 + \frac{\langle v \,|b_2 \rangle}{\langle b_2 \,|b_2 \rangle} b_2 + \frac{\langle v \,|b_3 \rangle}{\langle b_3 \,|b_3 \rangle} b_3$.

(d) Geben Sie das Koordinatentupel ${}_B v$ bezüglich B an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $\langle b_1 \,|\, b_2 \rangle = -2+2 = 0$, $\langle b_1 \,|\, b_3 \rangle = 2-2 = 0$ und $\langle b_2 \,|\, b_3 \rangle = -4+5-1 = 0$.

(b) $|b_1| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $|b_2| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ und $|b_3| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$.

(c) Da $\langle v \,|\, b_1 \rangle = 1$, $\langle v \,|\, b_2 \rangle = -3$ und $\langle v \,|\, b_3 \rangle = -3$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\langle v \,|\, b_1 \rangle}{\langle b_1 \,|\, b_1 \rangle} b_1 + \frac{\langle v \,|\, b_2 \rangle}{\langle b_2 \,|\, b_2 \rangle} b_2 + \frac{\langle v \,|\, b_3 \rangle}{\langle b_3 \,|\, b_3 \rangle} b_3 &= \frac{1}{5} b_1 - \frac{3}{6} b_2 - \frac{3}{30} b_3 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{6}{6} - \frac{6}{30} \\ 0 - \frac{3}{6} - \frac{15}{30} \\ \frac{2}{5} - \frac{3}{6} + \frac{3}{30} \end{pmatrix} = v\end{aligned}$$

(d) Aus der Lösung von (c) folgt ${}_B v = (1/5, -1/2, -1/10)$.

Aufgabe H 23. *Hessesche Normalform und Untervektorräume*

Sei $d \geqq 0$, $n \in \mathbb{R}^3$ mit $|n| = 1$ und $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x \rangle = d\}$ eine Ebene (in Hessescher Normalform). Unter welcher Voraussetzung an d ist E ein Untervektorraum?
Geben Sie in diesem Fall für $n = (4/5, 0, 3/5)$ eine Basis von E an.

Lösungshinweise hierzu: E ist genau dann ein Untervektorraum, wenn $d = 0$ ist. Um dies zu beweisen sei zunächst $d = 0$.

- Ist $u, v \in E$, dann gilt $\langle n \,|\, u+v \rangle = \langle n \,|\, u \rangle + \langle n \,|\, v \rangle = 0+0 = 0$ und damit $u+v \in E$.
- Ist $u \in E$ und $s \in \mathbb{R}$, dann gilt $\langle n \,|\, s \cdot u \rangle = s \langle n \,|\, u \rangle = s \cdot 0 = 0$ und damit $s \cdot u \in E$.
- Da $\langle n \,|\, \mathbf{0} \rangle = 0$ ist, gilt $\mathbf{0} \in E$.

Für die Umkehrung sei $d \neq 0$. Da $\langle n \,|\, \mathbf{0} \rangle = 0 \neq d$ ist, gilt $\mathbf{0} \notin E$ und damit kann in diesem Fall E kein Untervektorraum sein.
Für den Normalenvektor $n = (4/5, 0, 3/5)$ ist $B\colon w_1, w_2$ mit $w_1 = (0,1,0)$ und $w_2 = (-3, 0, 4)$ eine Basis von E.
Offensichtlich ist $\langle n \,|\, w_1 \rangle = \langle n \,|\, w_2 \rangle = 0$ und damit $w_1, w_2 \in E$.
Zunächst zur linearen Unabhängigkeit. Sei

$$\mathbf{0} = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \begin{pmatrix} -3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 4\lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ eine Darstellung der Null. Aus der ersten Kompontente folgt $\lambda_2 = 0$ und aus der zweiten $\lambda_1 = 0$. Damit sind w_1 und w_2 linear unabhängig.
Um zu sehen, dass w_1 und w_2 ein Erzeugendensystem von E ist, sei $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ beliebig. Es gilt $0 = \langle n \,|\, x \rangle = 4/5 \cdot x_1 + 3/5 x_3$ und damit $x_1 = -3/4 \cdot x_3$. Daraus folgt die Darstellung

$$x = x_2 \cdot w_1 + x_3/4 \cdot w_2$$

und folglich $\mathrm{L}(w_1, w_2) = E$.

Aufgabe H 24. *Hessesche Normalform und Gerade*

Im $\mathbb{R}^3$ sei E die Ebene durch die Punkte $P_1 = (0,0,3)$, $P_2 = (0,3,0)$, $P_3 = (1,1,0)$.

(a) Berechnen Sie die Hessesche Normalform von E.

(b) Bestimmen Sie das Spiegelbild der Geraden $g = P + \mathbb{R}v$ an E, wobei $P = (1,2,3)$ und $v = (3,2,1)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ebene kann beschrieben werden als

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Vektor $q = (6, 3, 3)$ steht orthogonal auf E (er ist das Vektorprodukt der Richtungsvektoren; ein orthogonaler Vektor kann aber auch durch das Lösen eines LGS bestimmt werden). Die Hessesche Normalform von E lautet also

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

(b) Einsetzen der Geradengleichung liefert $Q_1 := P - 4/9 \cdot v = 1/9 \cdot (-3, 10, 23)$ als Schnittpunkt von g und E. Das Spiegelbild des Punktes $P = (1, 2, 3) \in g$ kann wie folgt berechnet werden: Die Gerade h orthogonal zu E durch P ist $h = P + \mathbb{R}(2, 1, 1)$, also

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt, dass der Schnittpunkt mit der Ebene bei $r = -2/3$ liegt. Der Spiegelpunkt Q_2 liegt also bei $r = -4/3$ und ist der Punkt $Q_2 := P - 4/3 \cdot (2, 1, 1) = 1/3 \cdot (-5, 2, 5)$. Das Spiegelbild der Geraden ist nun die Verbindung von Q_1 und Q_2, also die Gerade $Q_1 + \mathbb{R}(Q_1 - Q_2)$ bzw.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1/9 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} + r \cdot 4/9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 25. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen $|x| \leqq 1$, die die folgende Ungleichung erfüllen

$$\sqrt{1-x^2} \geqq x^2.$$

Lösungshinweise hierzu: Da beide Seiten nicht-negativ sind bleibt die Ungleichung durch quadrieren erhalten. Damit ist die Ungleichung äquivalent zu

$$1 - x^2 \geqq x^4 \iff 0 \geqq x^4 + x^2 - 1 \ .$$

Das letztere Polynom können wir mit Hilfe einer Substitution $y = x^2$ und der Mitternachtsformel schreiben als

$$x^4 + x^2 - 1 = \left(x^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \ .$$

Da der erste Faktor immer positiv ist, gilt $0 \geqq x^4 + x^2 - 1$ genau dann, wenn

$$x^2 \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2} =: \varphi \iff -\sqrt{\varphi} \leqq x \leqq \sqrt{\varphi} \ .$$

Damit ist die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{\varphi} \leqq x \leqq \sqrt{\varphi}\}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 26. *Flächeninhalt*

Durch die Punkte

(a) $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (1, -2, 2)$, $P_3 = (-3, 5, 1)$ im $\mathbb{R}^3$

(b) $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (0, 3)$ im $\mathbb{R}^2$

werden zwei Dreiecke im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ aufgespannt. Berechnen Sie deren Flächeninhalt jeweils mit Hilfe des Vektorprodukts.

Lösungshinweise hierzu:

(c) Der Flächeninhalt ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} \cdot |(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{105}}{2}.$$

(d) Um das Vektorprodukt anzuwenden betten wir die Punkte in den $\mathbb{R}^3$ ein $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (2, 2, 0)$, $P_3 = (0, 3, 0)$. Dann berechnen wir analog

$$\frac{1}{2} \cdot |(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe H 27. *Matrixpotenzen*

Gegeben seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3 \cdot (2^n - 1) & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Bestimmen Sie B^9.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

IA $n = 1$: Es gilt:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 3 \cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 3 \cdot (2^1 - 1) & 1 \end{pmatrix}$$

IH Es gelte $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3 \cdot (2^n - 1) & 1 \end{pmatrix}$ für beliebiges $n \geqq 1$.

IS $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned} A^{n+1}A^n &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^n \\ &\overset{\text{IH}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3 \cdot (2^n - 1) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n & 0 \\ 3 \cdot 2^n + 3 \cdot (2^n - 1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 3 \cdot (2^{n+1} - 1) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wegen $3 \cdot 2^n + 3 \cdot (2^n - 1) = 2 \cdot 3 \cdot 2^n - 3$.

Mit vollständiger Induktion folgt $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3\cdot(2^n-1) & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Es gilt $B = -\frac{1}{3}A$ und somit $B^9 = \left(\frac{-1}{3}A\right)^9 = -\frac{1}{3^9}A^9$. Mit (a) folgt also

$$B^9 = -\frac{1}{3^9}\begin{pmatrix} 2^9 & 0 \\ 3\cdot(2^9-1) & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3^9}\begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 1533 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 28.

(a) Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ mit $AC = \mathbf{0}$, wenn ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ mit $Av = \mathbf{0}$ existiert.

(b) Gegeben sei die Matrix $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ mit $A_\alpha C = \mathbf{0}$ existiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Angenommen es gibt eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}\backslash\{\mathbf{0}\}$ mit $AC = \mathbf{0}$. Da $C = (v_1, v_2)$ mit Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ ist und $C \neq \mathbf{0}$ muss ein Vektor ungleich $\mathbf{0}$ sein, ohne Einschränkung können wir hierbei $v_1 \neq \mathbf{0}$ annehmen. Da $\mathbf{0} = AC = (Av_1, Av_2)$ ist, folgt $Av_1 = \mathbf{0}$.
Umgekehrt sei $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ mit $Av = \mathbf{0}$. Dann besitzt die Matrix $C = (v, v) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die geforderten Eigenschaften.

(b) Nach der ersten Teilaufgabe genügt es zu untersuchen, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ es ein $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ gibt mit $A_\alpha v = \mathbf{0}$.

- Angenommen es gibt ein solches $v = (v_1, v_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ dann gilt

$$\begin{aligned} 1\cdot v_1 + \alpha\cdot v_2 &= 0 \\ \alpha\cdot v_1 + 1\cdot v_2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

  Ist $v_1 = 0$, so folgt $v_2 = 0$ im Widerspruch zu $v \neq \mathbf{0}$. Damit ist $v_1 \neq 0$. Lösen wir die zweite Gleichung nach v_2 auf und setzten dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir $v_1\cdot(1-\alpha^2) = 0$. Da $v_1 \neq 0$ ist, folgt $1-\alpha^2 = 0$ und damit $\alpha \in \{\pm 1\}$.
- Umgekehrt sei $\alpha \in \{\pm 1\}$. Dann ist $v = (1, -\alpha)^\intercal \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$ mit $A_\alpha v = \mathbf{0}$.

Insgesamt ist $\{\pm 1\}$ die gesuchte Menge. Freuen Sie sich auf die kommende Theorie, denn mit dieser können Sie diese Aufgabe in einer Zeile lösen.

Aufgabe H 29.

Gegeben seien die Matrizen $L := \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $R := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie die Matrixprodukte LR und RL.

(b) Mit $u := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^\intercal$ und $v := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$ erhalten wir die Gleichungssysteme $A\colon Rx = v$ und $B\colon Ly = u$. Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\mathcal{L}(A)$ und $\mathcal{L}(B)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$LR = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$RL = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Wir verwenden den Gauß-Algorithmus.

$\mathcal{L}(A)$:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} (-1)\cdot Z_1 : \\ \\ Z_3 - 2Z_1 : \\ Z_4 + Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -Z_3 - Z_2 : \\ Z_4 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_3 : \\ Z_2 + Z_3 : \\ \\ Z_4 - Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2/3 \cdot Z_2 : \\ 1/3 \cdot Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eine Spezielle Lösung ist somit $x = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}u$. Diese ist auch eindeutig, da gemäß 3.7.6 der Lösungsraum des homogenen Systems die Dimension $3 - 3 = 0$ hat, also $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ also die einzige Lösung des homogenen Systems $Rx = \mathbf{0}$ ist, es gilt:

$$\mathcal{L}(A) = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\mathcal{L}(B)$: Wir wenden erneut Gauß an:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 3 & -3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ 3Z_2 - Z_1: \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 3 & -3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_3: \\ \frac{1}{3}Z_2 - \frac{1}{3}Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 3 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}Z_1 + Z_2: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Eine Spezielle Lösung ist somit:

$$y_{\text{sp}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einen (von vielen möglichen) Kernbasisvektor können wir nun als $y_{\text{K}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmen. Da der Lösungsraum des homogenen Systems aber die Dimension $1 = 4 - 3$ haben muss, spannt y_{K} diesen bereits vollständig auf. Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B) &= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $-v = y_{\text{sp}} - y_{\text{K}}$ in $\mathcal{L}(B)$ enthalten ist – insbesondere also als spezielle Lösung verwendet werden kann – hätten wir anhand von $\mathcal{L}(A)$ schon von Anfang an sehen können: Gemäß (a) ist $LR = 3E_3$, insbesondere also

$$u = E_3 u = L\left(-R\left(-\frac{1}{3}u\right)\right) = L(-v).$$

Doch aufgepasst: Diese herangehensweise lässt sich in dieser kurzen Form nur bei $\mathcal{L}(B)$ verwenden! Bei $\mathcal{L}(A)$ ist Vorsicht geboten. Aufgrund von $LR = 3E_3$

könnte man versucht sein, analog

$$\begin{aligned} & Rx &&= v \\ \Rightarrow\quad & LRx &&= Lv \\ \Rightarrow\quad & 3x &&= Lv \\ \Rightarrow\quad & x &&= \tfrac{1}{3}Lv = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & &&= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{3}u \end{aligned}$$

zu rechnen. Eine kurze Rechnung zeigt in der Tat $-\frac{1}{3}R = u$, aber diese Probe ist hier unerlässlich: Dass man das richtige Ergebniss erhält, liegt u. a. daran, dass v im Bild der Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto Rx$ enthalten ist – was nicht von vornherein klar ist.
Um dies einzusehen betrachte man einen beliebigen Vektor $b \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathrm{Bild}\,(\varphi)$. (Dass ein solcher existiert, also $\mathrm{Bild}\,(\varphi) \subsetneq \mathbb{R}^4$ gilt, folgt unmittelbar aus den Dimensionen der Räume.) Sei nun $\tilde{x} := \frac{1}{3}Lb$. Dann gilt natürlich auch wieder

$$LR\tilde{x} = 3\tilde{x} = 3\left(\frac{1}{3}Lb\right) = Lb,$$

jedoch gilt

$$R\tilde{x} \neq b$$

wegen $b \notin \mathrm{Bild}\,(\varphi)$! Die Lösungsmenge des LGS $Rx = b$ ist leer. Als konkretes Beispiel kann man hier $b = (0,3,1,0)^\mathsf{T}$ betrachten: Bereits der erste Gauß-Eliminationsschritt für das LGS $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt auf das System

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

welches offensichtlich unlösbar ist. Für

$$\tilde{x} := \frac{1}{3}Lb = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

gilt wie zu erwarten:

$$R\tilde{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 \\ -9 \\ 38 \\ -19 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

$$LR\tilde{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Lb.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 30. *Vollständige Induktion mit Binomialkoeffizienten*

Beweisen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion über m:

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{n+1}$.

Lösungshinweise hierzu: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wir machen eine Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$:

IA $m = 0$: Es gilt $\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+0+1}{n+1} = 1$.

IH Gelte die Aussage für ein $m \in \mathbb{N}_0$.

IS $m \to m+1$: Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} &= \binom{n+m+1}{m+1} + \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} \\
&\overset{\text{IH}}{=} \binom{n+m+1}{m+1} + \binom{n+m+1}{n+1} \\
&\overset{\text{1.3.4 (2)}}{=} \binom{n+m+1}{n} + \binom{n+m+1}{n+1} \\
&\overset{\text{1.3.4 (3)}}{=} \binom{n+(m+1)+1}{n+1} .
\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{n+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$, also alle $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Hinweis: Kern und Bild einer Matrix $M \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sind definiert als $\mathrm{Kern}\,(M) := \mathrm{Kern}\,(\varphi)$ bzw. $\mathrm{Bild}\,(M) := \mathrm{Bild}\,(\varphi)$ mit $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m\colon x \mapsto Mx$.

Aufgabe H 31. *Lineare Abbildungen*

Für $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Die Mengen $\mathrm{Kern}\,(f) \subseteq V$ und $\mathrm{Bild}\,(f) \subseteq W$ sind Untervektorräume.

(b) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}\,(f) = \{\mathbf{0}\}$ gilt.

(c) Ist f bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \to V$ von f ebenfalls linear.

(d) Ist $g\colon V \to W$ eine weitere lineare Abbildung und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dann ist die Abbildung $\alpha f + \beta g\colon V \to W\colon v \mapsto \alpha f(v) + \beta g(v)$ ebenfalls linear.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zunächst zum Kern.

- Für $x, y \in \mathrm{Kern}\,(f)$ gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ und damit $x + y \in \mathrm{Kern}\,(f)$.
- Für $x \in \mathrm{Kern}\,(f)$ und $a \in \mathbb{K}$ gilt $f(ax) = af(x) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ und damit $ax \in \mathrm{Kern}\,(f)$.
- Offenbar gilt wegen

$$f(\mathbf{0}) = f(\underbrace{0}_{\in\mathbb{K}} \cdot \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V}) \overset{f \text{ linear}}{=} 0 \cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

stets $\mathbf{0} \in \mathrm{Kern}\,(f)$.

Nun zum Bild.

- Für $x, y \in \mathrm{Bild}\,(f)$ gibt es $x', y' \in V$ mit $f(x') = x$ und $f(y') = y$. Dann gilt $f(x' + y') = f(x') + f(y') = x + y$ und damit $x + y \in \mathrm{Bild}\,(f)$.
- Sei $x \in \mathrm{Bild}\,(f)$ gibt es $x' \in V$ mit $f(x') = x$. Für beliebiges $a \in \mathbb{K}$ gilt $f(ax') = af(x') = ax$ und damit $ax \in \mathrm{Bild}\,(f)$.
- Wie oben gesehen gilt $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{0} \in \mathrm{Bild}\,(f)$.

(b) "$\Rightarrow$" Sei f injektiv. In der vorherigen Teilaufgabe haben wir bereits $\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathrm{Kern}\,(f)$ gezeigt. Sei nun $x \in \mathrm{Kern}\,(f)$ beliebig, also x ist ein Element von V und erfüllt $f(x) = 0$. Dann gilt nach obiger Rechnung auch $f(x) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$ und da f nach Voraussetzung injektiv ist, folgt hieraus $x = \mathbf{0}$. Also gilt auch $\mathrm{Kern}\,(f) \subseteq \{0\}$ und damit sind beide Mengen gleich.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathrm{Kern}\,(f) = \{\mathbf{0}\}$ und $x, y \in V$ beliebig mit $f(x) = f(y)$. Wegen der Linearität von f folgt hieraus

$$f(x-y) = f(x + (-1)y) = f(x) + (-1)f(y) = f(x) - f(y) = 0.$$

Nach Voraussetzung folgt $x - y = \mathbf{0}$ bzw. $x = y$ und somit ist f injektiv.

(c) Seien $x, y \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(ax+by)\right) &= ax + by = af\left(f^{-1}(x)\right) + bf\left(f^{-1}(y)\right) \\ &\overset{f \text{ linear}}{=} f\left(af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)\right). \end{aligned}$$

Da f insbesondere injektiv ist, folgt daraus $f^{-1}(ax+by) = af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)$. Da $x, y \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ beliebig waren, folgt die Behauptung.

(d) Seien $x, y \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ beliebig. Da f und g linear sind, folgt dann

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(ax + by) &= \alpha f(ax + by) + \beta g(ax + by)\\ &= \alpha(af(x) + bf(y)) + \beta(ag(x) + bg(y))\\ &= a(\alpha f + \beta g)(x) + b(\alpha f + \beta g)(y).\end{aligned}$$

Da $x, y \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ beliebig waren, folgt die Behauptung.

Aufgabe H 32. *Lineare Gleichungssysteme*

(a) Seien $U, V \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sowie $u, v \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $x = y + \mathrm{i}z \in \mathbb{C}^n$ mit $y, z \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung des Systems $Ax = b$ mit $A = U + \mathrm{i}V$ und $b = u + \mathrm{i}v$ ist, wenn $\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ gilt.

(b) Sei S: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathbb{R}^6$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $x = y + iz \in \mathbb{C}^n$ beliebig. Unter Verwendung der Matrixrechenregeln erhalten wir

$$Ax = (U + \mathrm{i}V)(y + \mathrm{i}z) = Uy + \mathrm{i}Uz + \mathrm{i}Vy - Vz = (Uy - Vz) + \mathrm{i}(Uz + Vy),$$

wobei $Uu - Vv \in \mathbb{R}^m$ und $Uv + Vu \in \mathbb{R}^m$ gelten. Durch einen komponentenweisen Vergleich des Real- und Imaginäranteils folgt, dass $x = y + iz \in \mathbb{C}^n$ mit $y, z \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung des LGS $Ax = b$ ist, wenn $Uy - Vz = u$ und $Uz + Vy = v$ gilt. Letztere beide Gleichungssysteme können wir kompakt in der angegebenen Block-Matrixform schreiben.

(b) Nach der ersten Teilaufgabe ist es äquivalent, das komplexe Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8+2\mathrm{i} \\ -3+3\mathrm{i} \\ -6+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

zu lösen. Dazu verwenden wir den Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 8+2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} & -3+3\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -6+2\mathrm{i} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1\cdot(-\mathrm{i}): \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 2-8\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} & -3+3\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -6+2\mathrm{i} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2-(1+\mathrm{i})\cdot Z_1: \\ Z_3-(2-\mathrm{i})\cdot Z_1: \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 2-8\mathrm{i} \\ 0 & 4\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & -13+9\mathrm{i} \\ 0 & 3+2\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & -2+20\mathrm{i} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2\cdot(-\mathrm{i}/4): \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 2-8\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -1/4+2/4\cdot\mathrm{i} & 9/4+13/4\cdot\mathrm{i} \\ 0 & 3+2\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & -2+20\mathrm{i} \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ Z_3-(3+2\mathrm{i})\cdot Z_2:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr||r}
1 & -1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 2-8\mathrm{i} \\
0 & 1 & -1/4+2/4\cdot\mathrm{i} & 9/4+13/4\cdot\mathrm{i} \\
0 & 0 & 7/4+4\mathrm{i} & -9/4+23/4\cdot\mathrm{i}
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ Z_3\cdot(7/4+4\mathrm{i})^{-1}:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr||r}
1 & -1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 2-8\mathrm{i} \\
0 & 1 & -1/4+2/4\cdot\mathrm{i} & 9/4+13/4\cdot\mathrm{i} \\
0 & 0 & 1 & 1+\mathrm{i}
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1-(1-\mathrm{i})\cdot Z_3: \\ Z_2-(-1/4+2/4\mathrm{i})\cdot Z_3: \\ \
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr||r}
1 & -1-\mathrm{i} & 0 & -8\mathrm{i} \\
0 & 1 & 0 & 3+3\mathrm{i} \\
0 & 0 & 1 & 1+\mathrm{i}
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1-(-1-\mathrm{i})\cdot Z_2: \\ \\ \
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr||r}
1 & 0 & 0 & -2\mathrm{i} \\
0 & 1 & 0 & 3+3\mathrm{i} \\
0 & 0 & 1 & 1+\mathrm{i}
\end{array}\right]
$$

In obiger Notation ist nun $\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ 3+3\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=y} + \mathrm{i}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v}$. Damit ist $\mathcal{L}(S) = \{(0,3,1,-2,3,1)^\intercal\}$ die gesuchte Lösungsmenge.

Aufgabe H 33.

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & -8 & 8 & 32 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & -3 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & -6 & 4 & -12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}$ und $b = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A||b]$ an.

(b) Bestimmen Sie $r = \mathrm{Rg}(A)$ sowie $\mathrm{Kern}\,(A)$ (in der Form $\mathrm{L}\,(v_1,\ldots,v_{6-r})$).

(c) Bestimmen Sie $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathbb{R}^6$ für das LGS $S\colon Av = b$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$
[A||b] = \left[\begin{array}{rrrrrr||r}
4 & 0 & 8 & -8 & 8 & 32 & 8 \\
3 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & -9 \\
1 & 0 & -1 & 4 & -3 & 6 & -5 \\
-2 & 0 & 1 & -6 & 4 & -12 & 8
\end{array}\right]
$$

(b)+(c) Wir lösen (b) und (c) zur selben Zeit, indem wir den Gauß-Algorithmus anwenden:

$$
\left[\begin{array}{rrrrrr||r}
4 & 0 & 8 & -8 & 8 & 32 & 8 \\
3 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & -9 \\
1 & 0 & -1 & 4 & -3 & 6 & -5 \\
-2 & 0 & 1 & -6 & 4 & -12 & 8
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
1/4\cdot Z_1: \\ Z_2-3/4\cdot Z_1: \\ Z_3-1/4\cdot Z_1: \\ Z_4+1/2\cdot Z_1:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrr||r}
1 & 0 & 2 & -2 & 2 & 8 & 2 \\
0 & 1 & -4 & 9 & -1 & -16 & -15 \\
0 & 0 & -3 & 6 & -5 & -2 & -7 \\
0 & 0 & 5 & -10 & 8 & 4 & 12
\end{array}\right]
$$

$$\begin{array}{r} 3Z_1+2Z_3: \\ 3Z_2-4Z_3: \\ -Z_3: \\ 3Z_4+5Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||c} 3 & 0 & 0 & 6 & -4 & 20 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 17 & -40 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Im nächsten Schritt vertauschen wir die 4. und 5. Spalte

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ -Z_4: \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||c} 3 & 0 & 0 & -4 & 6 & 20 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 17 & 3 & -40 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -6 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 1/3\cdot(Z_1+4Z_4): \\ 1/3\cdot(Z_2-17Z_4): \\ 1/3\cdot(Z_3-5Z_4): \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

In dieser Darstellung werden folgende Dinge ersichtlich:

(i) Es gilt $r = 4$.

(ii) Unter Berücksichtigung der Spaltenvertauschungen ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(A) &= \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\-4\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= \left\{\lambda_1\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\\0\\2\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}\right\}. \end{aligned}$$

(iii) Eine spezielle Lösung v_{sp} von S ist (erneut unter Berücksichtigung der Spaltenvertauschungen) gegeben durch $v_{\mathrm{sp}} = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$. Somit lautet die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\mathcal{L}(S) = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\-4\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bemerkung: In der zweiten Darstellungsform mit Parametern ist hier Vorsicht geboten: Da die Lösungsmenge hier ein Unterraum des $\mathbb{R}^6$ sein soll, muss der Körper $\mathbb{R}$ sein, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{K}$ sind hier falsch.

Aufgabe H 34. *Bild, Kern & Orthogonalität*

Für einen Untervektorraum $U \subseteqq \mathbb{R}^n$ definieren wir $U^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U\colon\ \langle u \,|\, x\rangle = 0\}$.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie: $\operatorname{Kern}\left(A^\intercal\right) = (\operatorname{Bild}(A))^\perp$.

(b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $d := \dim(\operatorname{Bild}(A))$. Bestimmen Sie mit (a) eine Basis b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 von $\mathbb{R}^5$ mit $\mathrm{L}(b_1, b_2, ..., b_d) = \operatorname{Bild}(A)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir beginnen, in dem wir den j. Spaltenvektor mit a_j bezeichnen, also $a_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$ für $j \in \{1, 2, ..., n\}$. In dieser Notation gelten:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^\intercal = \begin{pmatrix} a_1^\intercal \\ a_2^\intercal \\ \vdots \\ a_n^\intercal \end{pmatrix}.$$

„$\subseteqq$“ : Sei $v \in \operatorname{Kern}\left(A^\intercal\right)$. Für einen beliebigen Vektor $b \in \operatorname{Bild}(A)$ existieren Skalare $\lambda_j \in \mathbb{K}$ für $j \in \{1, 2, ..., n\}$, sodass $b = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$ gilt: Das Bild ist der von den Spalten aufgespannte Vektorraum. Es gilt

$$\mathbf{0} = A^\intercal v = \begin{pmatrix} a_1^\intercal v \\ a_2^\intercal v \\ \vdots \\ a_n^\intercal v \end{pmatrix}, \tag{3}$$

also $\langle v \,|\, a_j\rangle = 0$ für $1 \leqq j \leqq n$. Hieraus folgt

$$\langle v \,|\, b\rangle = \left\langle v \;\middle|\; \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v \,|\, a_j\rangle = 0.$$

Da $b \in \operatorname{Bild}(A)$ beliebig war, folgt $v \in (\operatorname{Bild}(A))^\perp$.

„$\supseteq$“ : Sei $v \in (\mathrm{Bild}\,(A))^{\perp}$. Dann gilt insbesondere $\langle v \,|\, a_j \rangle = 0$ für $1 \leqq j \leqq n$. Aus (3) folgt sofort $v \in \mathrm{Kern}\,\left(A^{\intercal}\right)$.

(b) Wir machen zuerst folgende Beobachtungen:

- Linear unabhängige Spalten von A entsprechend linear unabhängigen Zeilen von $A^{\intercal}$.
- Sind $x \neq 0$ und $y \neq 0$ zueinander senkrechte Vektoren, sind sie linear unabhängig.

In Anbetracht dessen müssen wir im Wesentlichen (!) nur die erweiterte Koeffizientenmatrix von $\left[A^{\intercal}||\mathbf{0}\right]$ zu bestimmen: Aus dieser können wir sowohl Kernvektoren ablesen, als auch die Information, welche Zeilen von $A^{\intercal}$ eine Basis des von den Zeilen von $A^{\intercal}$ aufgespannten Raumes bilden und somit einer Basis von $\mathrm{Bild}\,(A)$ entsprechen. (Wobei wir gegebenenfalls Zeilenvertauschungen berücksichtigen müssen.) Wir wenden daher Gauß an:

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -Z_1 : \\ Z_2 + 2Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \\ Z_4 - Z_1 : \\ Z_5 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -Z_2 : \\ Z_3 + Z_2 : \\ \\ Z_5 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1/2 \cdot Z_3 : \\ Z_4 - Z_3 : \\ Z_5 - Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + Z_3 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -9/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 1/2 \cdot Z_2 : \\ 1/2 \cdot Z_2 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hieraus können wir die linear unabhängigen Kernvektoren $\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ablesen.

Da außerdem die den ersten drei Spalten der Matrix A entsprechenden Zeilen von $A^\intercal$ linear unabhängig sind, ist eine mögliche Basis der gewünschten Form durch die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Komplexe Zahlen*

Seien $x = 1 + \mathrm{i}$, $y = 3 - 2\mathrm{i}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 2\sqrt{2}$ und $\arg z = \frac{3}{4}\pi$.
Geben Sie die folgenden vier komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{xy}{z} \qquad \frac{x+z}{y} \qquad \frac{z^4}{5-\mathrm{i}} \qquad y^3$$

Lösungshinweise hierzu: Da $\arg z = \frac{3}{4}\pi$ ist, ist z von der Form $z = -a + a\mathrm{i}$ mit $a \geqq 0$, folglich gilt wegen $|z| = \sqrt{2a^2} = 2\sqrt{2}$ also $z = -2 + 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i} \cdot x$.

- Es gilt $\dfrac{xy}{z} = \dfrac{y}{2\mathrm{i}} = -1 - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
- Es gilt $\dfrac{x+z}{y} = x\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{3^2+2^2} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(-1+8\mathrm{i})}{3^2+2^2} = -\dfrac{9}{13} + \dfrac{7}{13}\mathrm{i}$.
- Wegen $\arg z = \frac{3}{4}\pi$ gilt $\arg z^4 = \pi$. Zusammen mit $|z|^4 = 64$ folgt $z^4 = -64$. Damit gilt
$$\frac{z^4}{5-\mathrm{i}} = -\frac{64(5+\mathrm{i})}{5^2+1^2} = -\frac{160}{13} - \frac{32}{13}\mathrm{i}.$$
- Es gilt $y^3 = (3-2\mathrm{i})^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2(-2\mathrm{i}) + 3 \cdot 3(-2\mathrm{i})^2 + (-2\mathrm{i})^3 = -9 - 46\mathrm{i}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Koordinatendarstellungen*

Für den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V = \{f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) \mid \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\colon f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \cos(2x)\}$$

seien zwei Basen B, C gegeben durch:

$$B\colon \quad b_1\colon x \mapsto 1,\ b_2\colon x \mapsto \cos(x),\ b_3\colon x \mapsto \cos(2x)$$

$$C\colon \quad c_1\colon x \mapsto 2\cos(x) + \cos(2x),\ c_2\colon x \mapsto 2,\ c_3\colon x \mapsto 2 + \cos(x)$$

(a) Bestimmen Sie ${}_B\varphi$ und ${}_C\varphi$ für $\varphi\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -2\cos(2x) - \cos(x)$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Gemäß der Definition von φ und B gilt

$${}_B\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun Skalara $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = \varphi$. Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, dass der Koordinatenvektor ${}_C\varphi := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ das LGS

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_1 &= -2 \end{aligned}$$

löst. Aus Z_3 lesen wir $\lambda_1 = -2$ ab. Aus Z_2 folgt $\lambda_3 = -1 - 2\lambda_1 = 3$ und aus Z_1 wiederum $\lambda_2 = -\lambda_3 = -3$. Wir erhalten:

$${}_C\varphi = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt: $c_1 = 2b_2 + b_3$, $c_2 = 2b_1$, $c_3 = 2b_1 + b_2$, folglich ist

$${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ${}_C\mathrm{id}_B$ mittels Gauß und beginnen mit einem „zyklischen“ Zeilentausch (Z_3 wird zu Z_1, Z_1 zu Z_2, und Z_2 zu Z_3, wobei wir den ersten Eintrag gleich eliminieren):

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{r}
Z_3: \\ 1/2 \cdot Z_1: \\ Z_2 - 2Z_3:
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ Z_2 - Z_3: \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2
\end{array}\right]
$$

Entsprechend gilt ${}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 37. *Matrizen mit Parameter*

Gegeben seien $A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 1 \\ t & 1 & 1-t & t \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ mit Parameter $t \in \mathbb{R}$ und $b := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie $\det A_t$ an.

(b) Bestimmen Sie $T := \{t \in \mathbb{R} \mid A_t \text{ ist singulär}\}$.

(c) Bestimmen Sie $(A_t)^{-1}$ für $t \notin T$.

(d) Lösen Sie $A_t x = b$ für $t = -2$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen, dass A_t eine obere Blockdreiecksmatrix ist:

$$
\begin{aligned}
\det A_t &= \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2t & -2 \end{pmatrix} = \left(1 - t^2\right) \cdot 4 \\
&= 4 - 4t^2.
\end{aligned}
$$

Alternativer Lösungsweg: Wir entwickeln $\det A_t$ nach der dritten Zeile und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\det A_t = (-1)^{3+3} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & t \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\
= (-2) \cdot (-2 + 2t^2) = 4 - 4t^2.
\end{aligned}
$$

(b) Eine Matrix ist genau dann singulär, wenn Ihre Determinante 0 wird. Mit (a) erhalten wir somit $T = \{-1, 1\}$.

(c) Sei $t \notin T$. Wir berechnen mittels Gauß:

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & t & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
t & 1 & 1-t & t & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2t & -2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ Z_2 - tZ_1: \\ -1/2 \cdot Z_3: \\ -1/2 \cdot Z_4 - t/2 \cdot Z_3:
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & t & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1-t^2 & 1-t & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_4 : \\ Z_2 - (1-t)Z_3 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-t^2 & 0 & 0 & -t & 1 & \frac{1-t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} (1-t^2)Z_1 - tZ_2 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1-t^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t & \frac{t^2(1-t)}{2} & \frac{1-t^2}{2} \\ 0 & 1-t^2 & 0 & 0 & -t & 1 & \frac{1-t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Da wir $t = \pm 1$ ausgeschlossen haben, können wir die ersten beiden Zeilen durch $1-t^2$ teilen und erhalten:

$$(A_t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & \frac{t^2}{2+2t} & \frac{1}{2} \\ -\frac{t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{1}{2+2t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir machen sicherheitshalber eine Probe:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 1 \\ t & 1 & 1-t & t \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & \frac{t^2}{2+2t} & \frac{1}{2} \\ -\frac{t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{1}{2+2t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1-t^2} & \frac{-t+t}{1-t^2} & \frac{t^2+t-t(1+t)}{2+2t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{t-t}{1-t^2} & \frac{-t^2+1}{1-t^2} & \frac{t^3+1-(1-t)(1+t)-t^2(1+t)}{2+2t} & \frac{t}{2}-\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t+t & 1 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Nach (c) gilt:

$$\begin{aligned} (A_{-2})^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-(-2)^2} & -\frac{(-2)}{1-(-2)^2} & \frac{(-2)^2}{2+2\cdot(-2)} & \frac{1}{2} \\ -\frac{(-2)}{1-(-2)^2} & \frac{1}{1-(-2)^2} & \frac{1}{2+2\cdot(-2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(-2)}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die eindeute Lösung $\tilde{x}$ von $Ax = b$ lautet somit

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es gilt $\mathcal{L}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\intercal \right\}$.

Aufgabe H 38. *Links- und Rechtsinverse*

Betrachten Sie die Matrizen $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A$ und $\operatorname{Rg} B$. Hat A bzw. B Links- oder Rechtsinverse?

(b) Bestimmen Sie für A und B jeweils wenigstens eine Links- bzw. eine Rechtsinverse, sofern solche existieren.

Hinweis: Es kann helfen, zur Transponierten $A^\intercal$ überzugehen.

Zusatz: Können Sie (wenigstens für A) *alle* Rechts- bzw. Linksinversen dieser beiden Matrizen bestimmen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da es keine quadratischen Matrizen sind, haben A und B jeweils **entweder** eine Linksinverse **oder** eine Rechtsinverse **oder** keines von beiden, aber nicht beides. Wir nutzen Lemma 3.10.6: Anhand der letzen Zeile von A können wir $\operatorname{Rg} A = 2$ ablesen. A hat somit vollen Spaltenrang – das heißt die Anzahl der Spalten stimmt mit der Dimension des von ihnen aufgespannten Teilraums überein – und damit eine Linksinverse.

Für B machen wir den Ansatz $\mathbf{0}^\intercal = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4$, wobei z_1, z_2, z_3, z_4 die Zeilen von B sind. Anhand der 6. Spalte von B erhalten wir – wegen $b_{26} = b_{46} = 0$ und $b_{16} = -1 = -b_{36}$ – die Bedingung $\lambda_1 = 1 = \lambda_3$, womit anhand der ersten Spalte $\lambda_4 = 0$ folgt. Aus der vierten Spalte lesen wir $\lambda_2 = -2\lambda_3$ und aus der 5. $\lambda_2 = \lambda_1$ ab. Somit gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = -2\lambda_3 = -2\lambda_1$ und somit $\lambda_1 = 0 = \lambda_3 = \lambda_2$. Alle vier Zeilen sind also linear unabhängig. Da B somit vollen Zeilenrang hat, hat B eine Rechtsinverse.

(b) A : Sei L eine Linksinverse zu A, dann gilt $LA = E_2 = E_2^\intercal = (LA)^\intercal = A^\intercal L^\intercal$, d. h. wir suchen $L \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, sodass $\tilde{L} := L^\intercal$ eine Rechtsinverse zu $A^\intercal$ ist. Eine solche können wir mittels Gauß-Algorithmus bestimmen.

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Wir tauschen Z1 und Z2 und eliminieren gleich den ersten eintrag der neuen Z2

$$\begin{array}{r} Z_2: \\ 2Z_2 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$3Z_1 - 2\cdot Z_2: \left[\begin{array}{ccc||cc} 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Hieraus können wir $\tilde{L} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ablesen, was uns auf die Linksinverse

$$L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

führt.

B : Wir gehen analog wie oben vor:

$$\left[\begin{array}{cccccc||cccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -Z_1 : \\ -Z_2 : \\ Z_3 + Z_1 : \\ Z_4 + 2Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Wir tauschen Z2, Z3, Z4 im nächsten Eliminationsschritt zyklisch

$$\begin{array}{r} \\ -Z_3 : \\ -Z_4 : \\ Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_2 : \\ Z_4 - 2Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -7 & 2 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Wir vertauschen 4. und 5. Spalte

$$\left[\begin{array}{cccccc||cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 6Z_1 + 2Z_4 : \\ 6Z_2 + 2Z_4 : \\ 6Z_3 + 7Z_4 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||cccc} 6 & -6 & 6 & 0 & 0 & 6 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 12 & -4 & -7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_2 - Z_3 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 12 & -6 & 0 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 12 & -4 & -7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Hieraus erhalten wir – unter Berücksichtigung des Spaltentausches – als eine Rechtsinverse (von vielen möglichen) von B:

$$R = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & -7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusatz: Wir wollen nun **alle** Links- bzw. Rechtsinversen bestimmen.

A: Sei $\Lambda \subsetneqq \mathbb{R}^{2\times 3}$ die Menge der Linksinversen von A und $H_A := \{\tilde{L} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \mid \tilde{L}A = \mathbf{0}\}$. Analog zu 3.5.4 können wir $M_L = L_{\mathsf{sp}} + H_A$ schreiben, wobei L_{sp} eine beliebige, aber fixierte Linksinverse von A – zum Beispiel $L_{\mathsf{sp}} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ – ist:
Da Matrizenräume selbst Vektorraumstruktur haben, ergibt sich dies analog zum Beweis von Satz 3.5.4.
Nun wollen wir H_A bestimmen. Hierbei ist H_A der Kern der linearen Abbildung $\varphi^{(A)} : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : X \mapsto XA$. Am letzten Schritt des Gauß-Algorithmus,

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right],$$

sehen wir, dass $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Gleichung $A^{\mathsf{T}}v = \mathbf{0}$ genügt. Insbesondere gilt für die linear unabhängigen Matrizen

$$K_1^{(A)} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2^{(A)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$K_1^{(A)}A = K_2^{(A)}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es ist $\mathrm{L}\left(K_1^{(A)}, K_2^{(A)}\right) \subseteq H_A$. Für die Gleichheit nutzen wir die Dimensionsformel aus 3.8.17:

$$\dim \mathbb{R}^{2\times 3} = \dim \mathrm{Kern}\left(\varphi^{(A)}\right) + \dim \mathrm{Bild}\left(\varphi^{(A)}\right).$$

Hierbei gelten $\dim \mathbb{R}^{2\times 3} = 6$ und $\dim \mathrm{Bild}\left(\varphi^{(A)}\right) = 4$: Eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 3}$ ist z. B. durch die Matrizen

$$\mathrm{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{e}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, eine Basis von $\mathrm{Bild}\left(\varphi^{(A)}\right) = \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch die Matrizen

$$\tilde{\mathrm{e}_1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathrm{e}_2} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{\mathrm{e}_3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathrm{e}_4} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Entsprechende Urbilder wären $\tilde{\mathrm{e}_j}L_{\mathsf{sp}}$ für $j = 1, ..., 4$.) Da der Kern von $\varphi^{(A)}$ also Dimension 2 hat, folgt $\mathrm{L}\left(K_1^{(A)}, K_2^{(A)}\right) = H_A$ und somit

$$\begin{aligned} \Lambda &= L_{\mathsf{sp}} + \mathrm{L}\left(K_1^{(A)}, K_2^{(A)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

B: Vollkommen analog zu obigem folgern wir, dass wir die Menge P der Rechtsinversen von B als Summe $R_{\mathsf{sp}} + H_B$ schreiben können, wobei die Menge $H_B := \{\tilde{R} \in \mathbb{R}^{6\times 4} \mid B\tilde{R} = \mathbf{0}\}$ der Kern der linearen Abbildung

$$\varphi^{(B)} : \mathbb{R}^{6\times 4} \to \mathbb{R}^{4\times 4} : X \mapsto BX$$

ist. Wegen $\dim \mathbb{R}^{6\times 4} = 24$ und $\dim \mathrm{Bild}\left(\varphi^{(B)}\right) = \dim \mathbb{R}^{4\times 4} = 16$ ist H_B ein Unterraum von $\mathbb{R}^{6\times 4}$ mit $\dim H_B = 8$. Eine Basis können wir erneut mit Hilfe linear unabhängiger Lösungen des homogenen Systems $Bv = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ bestimmen. Würden wir den Gauß-Algorithmus auf dieses Anwenden, erhalten wir mit den selben Schritten wie oben

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 6 & 0 & 0 & 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

woraus wir die Lösungen $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten. Wir erhalten als Basis von H_B:

$$K_1^{(B)} := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2^{(B)} := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_3^{(B)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_4^{(B)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_5^{(B)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_6^{(B)} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_7^{(B)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_8^{(B)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Menge **aller** Rechtsinversen von B ist folglich:

$$\mathrm{P} = R_{\mathsf{sp}} + \mathrm{L}\left(K_1^{(B)}, K_2^{(B)}, K_3^{(B)}, K_4^{(B)}, K_5^{(B)}, K_6^{(B)}, K_7^{(B)}, K_8^{(B)}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & -7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(K_1^{(B)}, K_2^{(B)}, K_3^{(B)}, K_4^{(B)}, K_5^{(B)}, K_6^{(B)}, K_7^{(B)}, K_8^{(B)}\right).$$

Aufgabe H 39. *Darstellungsmatrizen*

Gegeben sei die Basis $B: \quad b_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^4$.

Die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch die Bilder der Standardbasis E: $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4$:

$$\begin{array}{llcll} \varphi(\mathrm{e}_1) & = 2\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3 - 2\mathrm{e}_4 & , & \varphi(\mathrm{e}_2) & = -\frac{3}{2}\mathrm{e}_1 - 3\mathrm{e}_2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}_3 + \frac{3}{2}\mathrm{e}_4 \\ \varphi(\mathrm{e}_3) & = 3\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_4 & , & \varphi(\mathrm{e}_4) & = -5\mathrm{e}_1 - 4\mathrm{e}_2 - 2\mathrm{e}_3 - \mathrm{e}_4 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$ und ${}_E\mathrm{id}_B$. **(b)** Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$. Ist φ injektiv?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir können diese Matrizen direkt aus der Aufgabenstellung ablesen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_E\varphi_E = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -2 & \frac{3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir invertieren ${}_E\mathrm{id}_B$:

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} -2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Wir tauschen Z1 und Z3 und eliminieren den ersten Eintrag der neuen Z3 gleich mit

$$\begin{array}{r} -Z_3: \\ -Z_2 + 2Z_3: \\ 2Z_3 - Z_1: \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+Z_3: \\ \\ -Z_3+Z_2: \\ 2Z_4-Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||rrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 2Z_1+2Z_4: \\ Z_2-2Z_3+Z_4: \\ 2Z_3+Z_4: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Es gilt ${}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ und somit

$$\begin{aligned} {}_B\varphi_B &= {}_B\mathrm{id}_E\, {}_E\varphi_E\, {}_E\mathrm{id}_B \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -2 & \frac{3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass nicht-triviale Kernvektoren – also $v \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ mit $\varphi(v) = 0$ – existieren, entsprechend kann φ nicht injektiv sein.

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen jeweils auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität und $\mathbb{K}$-*Linearität* für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto x^2 + 1$

(b) $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z + \overline{z}$

(c) $f_3\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{z}{2z-2}$

Hinweis: Eine Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt $\mathbb{K}$-linear, falls $f(u+v) = f(u) + f(v)$ und $f(kv) = kf(v)$ für alle $u, v \in V$ und alle $k \in \mathbb{K}$ gelten.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- Injektivität:
  Es gilt: $f_1(-2) = f_1(2) = 5$, also ist f_1 nicht injektiv.
- Surjektivität:
  Wegen $f_1(x) \geqq 1 \forall x$ ist f_1 nicht surjektiv, zum Beispiel ist $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus f_1(\mathbb{R})$.

- Bijektivität:
  f_1 ist nicht bijektiv, da f_1 nicht injektiv ist.
- Linearität:
  Angenommen, f_1 ist linear. Dann muss für einen beliebiges $v \in \mathbb{R}$ gelten: $f_1(0) = f_1(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$, aber $f_1(0) = 1 \neq 0$. f_1 ist folglich nicht linear, unabhängig davon, ob man $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ als Grundkörper betrachtet.

(b)

- Injektivität:
  Es gilt $f_2(z) = 2\operatorname{Re} z$, insbesondere gilt also $f_2(1) = f_2(1 + \mathrm{i})$, f_2 ist nicht injektiv.
- Surjektivität:
  Es gilt $f_2(z) = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$, somit haben alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ – wie zum Beispiel $z = \mathrm{i}$ – kein Urbild, f_2 ist nicht surjektiv.
- Bijektivität:
  f_2 ist nicht bijektiv, da f_2 nicht injektiv ist.
- Linearität:
  Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{K} := \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
f_2\left(z_1 + z_2\right) &= z_1 + z_2 + \overline{z_1 + z_2} = z_1 + z_2 + \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
&= (z_1 + \overline{z_1}) + (z_2 + \overline{z_2}) = f_2(z_1) + f_2(z_2) \\
f_2\left(\alpha z_1\right) &= \alpha \cdot z_1 + \overline{\alpha \cdot z_1} \\
&\overset{\alpha=\bar{\alpha}}{=} \alpha(z_1 + \overline{z_1}) = \alpha f_2(z_1)
\end{aligned}$$

  Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $\alpha := z := \mathrm{i}$ gilt:

$$f_2(\alpha z) = f_2(-1) = -2 \neq 0 = \mathrm{i} \cdot 0 = \alpha f_2(z).$$

  f_2 ist also $\mathbb{R}$-, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

(c)

- Injektivität:
  Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $f_3(z_1) = f_3(z_2)$. Ist eine der beiden Zahlen gleich 0, folgt dies unmittelbar auch für die andere, insbesondere also $z_1 = z_2$. Seien $z_1, z_2 \neq 0$. Dann folgt aus $f_3(z_1) = f_3(z_2)$ auch:

$$\begin{array}{cccccl}
 & \frac{2z_1-2}{z_1} & = & \frac{2z_2-2}{z_2} & & \\
\Leftrightarrow & 2 - \frac{2}{z_1} & = & 2 - \frac{2}{z_2} & | & -2 + \frac{2}{z_2} + \frac{2}{z_1} \\
\Leftrightarrow & \frac{2}{z_2} & = & \frac{2}{z_1} & | & \cdot \frac{z_1 \cdot z_2}{2} \\
\Leftrightarrow & z_1 & = & z_2 & &
\end{array}$$

  Somit impliziert $f_3(z_1) = f_3(z_2)$ stets $z_1 = z_2$, die Abbildung ist injektiv.
- Surjektivität:
  Sei $v \in f_3(\mathbb{C})$, dann existiert $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $f_3(z) = v$, beziehungsweise:

$$\begin{array}{cccccl}
 & v & = & \frac{z}{2z-2} & | & \cdot(2z-2) \\
\Leftrightarrow & 2v(z-1) & = & z & | & +2v - z \\
\Leftrightarrow & (2v-1)z & = & 2v & | & \cdot\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & \left(v - \frac{1}{2}\right) z & = & v & &
\end{array}$$

  Für $v = \frac{1}{2}$ ist diese Gleichung offensichtlich nicht lösbar, also ist $\frac{1}{2} \in \mathbb{C} \setminus f_3(\mathbb{C})$, die Abbildung ist nicht surjektiv.
- Bijektivität:
  f_3 ist nicht bijektiv, da f_3 nicht surjektiv ist.

- Linearität:
  Ähnlich wie bei (a) ist auch in diesem Falle der Grundkörper egal, f_3 ist weder $\mathbb{R}$- noch $\mathbb{C}$-linear: Es gilt:

$$f_3(-2) = \frac{-2}{-4-2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = 2f_3(-1)$$

Bemerkung: An diesem Beispiel sieht man, wieso wir lineare Abbildungen (nur) auf Vektorräumen betrachtet: Wie soll man für $f : V \to V$ die Bedingung $f(u+v) = f(u) + f(v)$ im Falle von $u + v \notin V$ – hier z. B. $u = 3$, $v = -2$ – interpretieren/überprüfen?

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Orthonormierung*

Wir betrachten den Untervektorraum $V := \left\{ v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{4} v_j = 0 \right\} \subsetneqq \mathbb{R}^4$, welcher von den Vektoren $b_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $b_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b_3 := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ aufgespannt wird.

(a) Finden Sie eine ONB f_1, f_2, f_3 von V mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$.

(b) Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ so, dass V der Kern der Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto Ax$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wenden Gram-Schmidt an:

$$f_1 := \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f_2^* := b_2 - \langle b_2 \mid f_1 \rangle f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 := \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = f_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3^* := b_3 - \langle b_3 \mid f_1 \rangle f_1 - \langle b_3 \mid f_2 \rangle f_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 := \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = f_3^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Für diese Teilaufgabe gibt es mehrere Lösungswege:

- Der Systematische von beiden besteht darin, dass man erkennt, dass ein solches A als Zeilenvektor $\tilde{a}$ aufgefasst werden kann, welches wiederum als transponierter Spaltenvektor $a^\intercal$ mit $a \in \mathbb{R}^4$ aufgefasst werden kann. Wir suchen also nach $a \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle a \,|\, f_j \rangle = 0$ für $j = 1, 2, 3$ und $a \neq \mathbf{0}$. Letzeres folgt daraus, dass für $a = 0$ V ein **echter** Unterraum des Kerns wäre, also $V \subsetneqq \operatorname{Kern}(\varphi)$ gelten würde.
  Um ein solches a zu bestimmen führen wir unser Orthonormierungsverfahren fort – zumindest um einen „halben" Schritt: Wir begnügen uns mit einem orthogonalen Vektor, der nicht normiert sein muss. Um einen solchen zu bestimmen, ergänzen wir die Basis $B : b_1, b_2, b_3$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$, in dem wir einen Vektor wählen, der nicht in V ist, zum Beispiel e_1, und berechnen

$$\begin{aligned}
a &= \mathrm{e}_1 - \langle \mathrm{e}_1 \,|\, f_1 \rangle f_1 - \langle \mathrm{e}_1 \,|\, f_2 \rangle f_2 - \langle \mathrm{e}_1 \,|\, f_3 \rangle f_3 \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

  Somit ist ein A der gewünschten Form durch $A = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ gegeben: Nach Konstruktion gilt $V \subseteqq \operatorname{Kern}(\varphi)$, Gleichheit folgt aus Dimensionsgründen $(\operatorname{Rg} A = 1)$.
- Der schnellere, mehr auf mathematischer Intuition beruhende besteht darin, dass wir A direkt aus der Definition von V ablesen: Es ist

$$\begin{aligned}
V &= \left\{ \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{4} v_j = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix} = 0 \right\}
\end{aligned}$$

  Somit ist V definiert als der Kern der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} x$, ein A der gewünschten Form ist trivialerweise $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Aufgabe H 42. *3D-Modell: Spiegelungen*

In dem Modell aus P32 ist ferner eine rote Ebene dargestellt. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 2a\\2 & 1 & -2a\\-2 & 2 & -a\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}$ so, dass φ_s eine Drehspiegelung beschreibt.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge F von φ_s für das in (a) gefundene s.
Diese Fixpunktmenge ist eine der farbigen Ebenen: welche?

(c) Berechnen Sie $\varphi_s\left(E_{\text{grün}}\right)$ und $\varphi_s\left(E_{\text{gelb}}\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Damit φ_s eine Drehspiegelung ist, muss

$$-1 = \det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2s \\ 2 & 1 & -2s \\ -2 & 2 & -s \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{27}\left(-s+8s+8s+4s+4s+4s\right) = s$$

gelten. Dies ist jedoch nur eine **notwendige** Bedingung, wie anhand von Beispiel 4.6.10.4 erkenntlich, gibt es auch Matrizen M mit $\det M = \pm 1$, welche nicht orthogonal sind. Wir haben mit $s=-1$ den einzigen **Kandidaten** für eine Drehspiegelung gefunden. Um zu sehen, dass es sich tatächlich um eine Drehspiegelung handelt, muss die Matrix orthogonal sein, was wir noch überprüfen müssen:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3.$$

Die Matrix ist also orthogonal und hat Determinante -1, folglich beschreibt φ_s für $s=-1$ eine Drehspiegelung,

(b) Die Fixpunktmenge besteht aus allen Punkten $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_s(x) = x$. Um diese Punkte zu bestimmen, lösen wir mittels Gauß das homogene LGS
$H: \quad \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} (-3/2)\cdot Z_1: \\ Z_2 + Z_1: \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems H – und damit die Fixpunktmenge F – ist folglich gegeben durch

$$F = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Setzen wir diese Vektoren in die Ebenengleichungen aus P32(a) ein, sehen wir: Die Fixpunktmenge ist die blaue Ebene.

(c) Aus 4.5.7 und 4.6.4 lässt sich folgern, dass eine beliebige Isometrie $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon v \mapsto Av + t$ ebenfalls Abstände und und Winkel erhält:

Abstand : Folgt direkt aus der Definition.

Winkel : Seien p, q, r die Ortsvektoren dreier Punkte P, Q, R in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt infolge der Orthogonalität von A:

$$\begin{aligned}\frac{\langle q-p \,|\, r-p\rangle}{|q-p|\,|r-p|} &= \frac{\langle A(q-p) \,|\, A(r-p))\rangle}{|q-p|\,|r-p|}\\ &= \frac{\langle Aq+t-Ap-t \,|\, Ar+t-Ap-t))\rangle}{|\psi(q)-\psi(t)|\,|\psi(r)-\psi(t)|}\\ &= \frac{\langle \psi(q)-\psi(r) \,|\, \psi(q)-\psi(r)\rangle}{|\psi(q)-\psi(t)|\,|\psi(r)-\psi(t)|}\end{aligned}$$

Also ist der Winkel zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ der selbe wie der Winkel zwischen $\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}$ und $\overrightarrow{\psi(P)\psi(R)}$.

Insbesondere können wir die Bilder einer beliebigen Ebenen E unter einer Isometrie aus der Hesse-Normalform $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n} \,|\, x\rangle = d\}$ bestimmen: Sei $P = d\vec{n}$ und $Q = (d+1)\vec{n}$. Dann bleibt für einen Punkt X mit Ortsvektor x der Ebene E der Winkel zwischen $\overrightarrow{PX}$ und $\overrightarrow{PQ}$ erhalten, es gilt:

$$\begin{aligned}0 &= \langle x - d\vec{n} \,|\, \vec{n}\rangle = \langle \psi(x) - \psi(d\vec{n}) \,|\, \psi((d+1)\vec{n}) - \psi(d\vec{n})\rangle\\ &= \langle \psi(x) - \psi(d\vec{n}) \,|\, A\vec{n}\rangle\,.\end{aligned}$$

Wegen der Beliebigkeit von x gilt für alle $y \in \psi(E)$ also $\langle y - \psi(d\vec{n}) \,|\, A\vec{n}\rangle = 0$. Wählen wir umgekehrt ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle y - \psi(d\vec{n}) \,|\, A\vec{n}\rangle = 0$ und setzen $x = A^{-1}(y-t)$, so gilt:

$$\begin{aligned}\langle x - d\vec{n} \,|\, \vec{n}\rangle &= \langle Ax - dA\vec{n}) \,|\, A\vec{n}\rangle = \langle y - t - dA\vec{n} \,|\, A\vec{n}\rangle\\ &= \langle y - \psi(d\vec{n}) \,|\, A\vec{n}\rangle = 0,\end{aligned}$$

folglich gilt $x \in E$ und somit $y \in \psi(E)$. Dies heißt, dass ein Normalenvektor der Bildebene durch $A\vec{n}$ gegeben ist. Den orientierten Abstand zum Ursprung erhält man aus $\langle \psi(d\vec{n}) \,|\, A\vec{n}\rangle = d + \langle t \,|\, A\vec{n}\rangle$.
Im Falle von φ_s ist jedoch $t = \mathbf{0}$. Somit bleibt Abstand zum Ursprung erhalten, der zur Hessenormalform gehörende Normalenvektor von $\varphi_s(E)$ ist $\varphi_s(\vec{n})$.

$E_{\text{grün}}$: Der Vektor $v = (20, -5, -4)^\intercal$ steht senkrecht auf der Ebene, der Normalenvektor ist also $\vec{n} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{400+25+16}}\begin{pmatrix}20\\-5\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{441}}\begin{pmatrix}20\\-5\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}20\\-5\\-4\end{pmatrix}$, die Hessenormalform gegeben durch

$$E_{\text{grün}} = \left\{(x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{20}{21}x_1 - \frac{5}{21}x_2 - \frac{4}{21}x_3 = 1\right\}.$$

Es gilt

$$\varphi_s(\vec{n}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{21}\begin{pmatrix}20\\-5\\-4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3\cdot 21}\begin{pmatrix}18\\27\\-54\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$$

und somit

$$\varphi_s\left(E_{\text{grün}}\right) = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{6}{7}x_3 = 1 \right\}$$
$$= E_{\text{rot}}.$$

E_{gelb}: Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, der Abstand zum Koordinatenursprung 0. Es gilt

$$\varphi_s(\vec{n}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

und somit

$$\varphi_s\left(E_{\text{gelb}}\right) = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_3 = 0 \right\}$$
$$= E_{\text{gelb}}.$$

Bemerkung: Das E_{gelb} durch die Spiegelung in sich selbst überführt wird, war anhand des Modells zu erwarten, immerhin steht E_{gelb} senkrecht auf der Spiegelebene.

Aufgabe H 43. *Drehungen in der komplexen Zahlenebene*

(a) Wir betrachten die komplexen Zahlen $a := r + \mathrm{i}s, b = u + \mathrm{i}v,\ x = y + \mathrm{i}z$ mit $r, s, y, z, u, v \in \mathbb{R}$, $|a| = 1$ und $b = ax$. Erklären Sie mit Hilfe von H 32 (a) und Satz 4.6.12, wieso b aus x durch eine Drehung der komplexen Zahlebene hervorgeht.

(b) Bestimmen Sie die Fläche des Parallelogramms P mit den Ecken 0, $z_1 = -4 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$ und $z_1 + z_2$ in der komplexen Zahlenebene.

(c) Gegeben sei die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto (4+\mathrm{i})\cdot z$. Wir fassen $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B\colon b_1 := 1, b_2 := \mathrm{i}$ auf. Geben Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$ an.

(d) Bestimmen Sie die Fläche von $\varphi(P)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir definieren zuerst B wie in Teilaufgabe (c), d. h. B ist die Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$, welche aus den Vektoren $b_1 := 1, b_2 := \mathrm{i}$ besteht.

(a) Gemäß H 32 (a) gilt $ax = b$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix}r & -s\\ s & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \tag{4}$$

gilt. Fassen wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Multiplikation mit a als lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto az$ auf, so ist (4) die Darstellung von α bzgl. der Basis B. Die **reelle** 2×2-Matrix $D = \begin{pmatrix}r & -s\\ s & r\end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $\det D = 1$ gilt. Wegen $\det D = r^2 + s^2 = |a|^2 = 1$ ist dies erfüllt. Der Koordinatenvektor ${}_Bb = {}_B\alpha(x)$ geht also aus einer Drehung des Koordinatenvektors ${}_Bx$ hervor. Da die komplexe Zahlenebene nichts anderes eine Visualisierung ebendieser Koordinatendarstellung ist, korrespondieren folglich Drehungen im $\mathbb{R}^2$ mit Drehungen in der komplexen Zahlenebene.

(b) Die Eckpunkte haben die Koordinatendarstellungen

$$\begin{aligned} {}_B0 &= \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix} &, \qquad {}_Bz_1 &= \begin{pmatrix} -4\\ 1 \end{pmatrix} \\ {}_Bz_2 &= \begin{pmatrix} 3\\ 2 \end{pmatrix} &, \qquad {}_B(z_1+z_2) &= \begin{pmatrix} -1\\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Infolge des in (a) beobachteten Zusammenhangs zwischen komplexer Zahlenebene und $\mathbb{R}^2$ können wir nun die Fläche nun mittels 3.11.3 bestimmen: Die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} -4 & 3\\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -8-3 = -11$$

ist die orientierte Fläche des Parallelogramms, die Fläche von P ist entsprechend 11.

(c) Wegen $\varphi(1) = 4+\mathrm{i}$, $\varphi(\mathrm{i}) = -1+4\mathrm{i}$ gilt

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 4 & -1\\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Auch hier nutzen wir die Korrespondenz der komplexen Zahlenebene und $\mathbb{R}^2$: Wird P von den Vektoren z_1, z_2 (bzw. $\begin{pmatrix} -4\\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3\\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$) aufgespannt, so wird $\varphi(P)$ dies von den Vektoren $\varphi(z_1)$, $\varphi(z_2)$ bzw. ${}_B\varphi_B\begin{pmatrix} -4\\ 1 \end{pmatrix}$ und ${}_B\varphi_B\begin{pmatrix} 3\\ 2 \end{pmatrix}$. Insbesondere gilt für die orientierte Fläche von $\varphi(P)$

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 4 & -1\\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3\\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} 4 & -1\\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} -4 & 3\\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 17\cdot(-11) = -187, \end{aligned}$$

die Fläche von $\varphi(P)$ ist also 187.

Aufgabe H 44.

Gegeben sei die Matrix $A = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & 4 & 0\\ \sqrt{5} & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\sqrt{5}\\ -2\sqrt{5} & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\det\left(AA^\intercal\right)$ und $\det\left(A^\intercal A\right)$.

(b) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto Ax$ und $\psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto A^\intercal x$. Entscheiden Sie für jede der Abbildungen $\alpha := \varphi\circ\psi$ und $\beta := \psi\circ\varphi$, ob sie injektiv oder surjektiv ist.

(c) Ist eine der beiden Abbildungen α, β eine Isometrie? Wenn ja, welche?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten

$$\begin{aligned} AA^\intercal &= \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & 4 & 0\\ \sqrt{5} & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\sqrt{5}\\ -2\sqrt{5} & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 & -2\sqrt{5}\\ 4 & -2 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{\mathsf{T}}A = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 & -2\sqrt{5} \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & 4 & 0 \\ \sqrt{5} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & -5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det AA^{\mathsf{T}} = \det\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\det A^{\mathsf{T}}A = 1.$$

(b) Die Darstellungsmatrix von α bzgl. der Standardbasis ist AA^{T}. Diese quadratische Matrix hat Determinante 0, sie ist nicht invertierbar und hat somit weder vollen Zeilen- noch vollen Spaltenrang. Also ist α weder injektiv noch surjektiv.
Die Darstellungsmatrix von β bzgl. der Standardbasis ist $A^{\mathsf{T}}A = E_3$. Somit ist α die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x$, welche offensichtlich bijektiv – also sowohl injektiv als auch surjektiv – ist.

(c) Wie bereits festgestellt, ist β gleich der identischen Abbildung, β ist also trivialerweise eine Isometrie.
α ist keine Isometrie: Der lineare Anteil einer Isometrie ist eine orthogonale Matrix und somit invertierbar. Da ferner Verschiebungen um einen konstanten Vektor ebenfalls bijektive Abbildungen sind, lässt sich folgern, dass jede Isometrie bijektiv ist. Dies trifft auf α nicht zu, da wir in (a) festgestellt haben, dass die Determinante der Darstellungsmatrix 0 wird.

Frischhaltebox

Aufgabe H 45.

(a) Sei $q(X) := X^2 + X - 1 \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ und $x_j = 2(j-1)$ für $j \in \mathbb{N}_0$. Stellen Sie q dar als Linearkombination der Vektoren $L_k(X) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$ mit $k \in \{0,1,2\}$.

(b) Sei V der von den Funktionen $b_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, $b_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ und $b_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ aufgespannte Funktionenraum.
Schreiben Sie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \mathrm{e}^{4-x^2} - (x+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ als Linearkombination von b_1, b_2, b_3.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hier handelt sich um die Lagrangepolynome zu den Knoten $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$, wie in den Vortragsübungen behandelt, siehe
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel/#vortragsuebungen .
Für $0 \leqq k \leqq 2$ gilt also $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$, wie in den Vortragsübungen können wir entsprechend aus den Bedingungen $q(x_j) = \sum_{k=0}^{2} \lambda_k L_k(x_j) = \lambda_j$ für $j = 0,1,2$ mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Lösung

$$q(X) = q(x_0)L_0(X) + q(x_1)L_1(X) + q(x_2)L_2(X)$$
$$= L_0(X) - L_1(X) + 5L_2(X)$$

ablesen.

(b) Es ist $\mathrm{e}^{4-x^2} - (x+1)\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^4\mathrm{e}^{-x^2} - x\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = \left(\mathrm{e}^4 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2} - x\mathrm{e}^{-x^2}$, mithin gilt $f = \left(\mathrm{e}^4 - 1\right) b_1 - b_2$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 46. *Darstellungsmatrizen*

Gegeben sei die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}$ sowie die Vektoren $f_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$ und $f_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Weisen Sie nach, dass $F\colon f_1, f_2, f_3$ eine ONB von $\operatorname{Bild}(\varphi)$ ist.

(b) Sei μ die Abbildung $\mu\colon \mathbb{R}^3 \to \operatorname{Bild}(\varphi) : x \mapsto \varphi(x)$. Geben Sie ${}_F\mu_E$ an, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

(c) Begründen Sie, warum die Umkehrabbildung $\mu^{-1}\colon \operatorname{Bild}(\varphi) \to \mathbb{R}^3$ existiert, und bestimmen Sie ${}_E{\mu^{-1}}_F$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir unterteilen den Nachweis in zwei Teilschritte:

(i) F ist ein Orthonormalsystem: Es gelten

$$\langle f_1 \mid f_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\langle f_1 \mid f_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\langle f_1 \mid f_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

also die notwendige Orthogonaliät, sowie

$$\langle f_1 \mid f_1 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{4} = 1$$

$$\langle f_2 \mid f_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

$$\langle f_3 \mid f_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1,$$

d. h. alle drei Vektoren sind normiert.

(ii) F ist eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$: Es gilt $\dim \mathrm{Bild}\,(\varphi) \leqq 3 = \dim \mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3)$. Wir müssen also nur $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3) \subseteqq \mathrm{Bild}\,(\varphi)$ nachweisen. Hierzu zeigen wir, dass f_1, f_2, f_3 als Linearkombination der Spalten $a_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Darstellungsmatrix $A := {}_E\varphi_E$ darstellbar sind. Da dies für $f_1 = \frac{1}{4}a_1$ und $f_2 = \frac{1}{2}a_2$ offensichtlich ist, müssen wir hierzu nur das das LGS $Ax = f_3$ lösen. Wir ersparen uns jedoch (vorerst) die Wurzelausdrücke und lösen $A\tilde{x} = \sqrt{2}f_3$, die Lösung von $Ax = f_3$ ist dann $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}$:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_1 + Z_2 : \\ Z_2 - Z_1 : \\ Z_4 - Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 1/2 \cdot Z_1 - 1/4 \cdot Z_2 + 1/4 \cdot Z_3 : \\ 1/2 \cdot Z_3 : \\ 1/2 \cdot Z_2 : \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Folglich ist f_3 ebenfalls in $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$, die Koordinatendarstellung bzgl. B: a_1, a_2, a_3 ist gegeben durch ${}_Bf_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathsf{T}}$. (Dass B eine Basis ist, folgt wegen $\mathrm{Bild}\,(\varphi) = \mathrm{L}\,(a_1, a_2, a_3)$ aus Dimensionsgründen.)

(b) Sei B wie in (a). Dann gilt:

$${}_F\mu_E = {}_F\mathrm{id}_B\,{}_B\mu_E.$$

Wir berechnen ${}_F\mathrm{id}_B$ als Inverse der Matrix ${}_B\mathrm{id}_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, welche wir in (a) schon (indirekt) mitberechnet haben:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 4Z_1 + Z_3 : \\ 2Z_2 + Z_3 : \\ \sqrt{2}Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right]$$

Die Matrix ${}_B\mu_E$ hat eine besonders einfache Gestalt: Es gilt $\mu(\mathrm{e}_j) = a_j$ für $1 \leqq j \leqq 3$, mithin ${}_B\mu_E = E_3$. Somit gilt

$$ {}_F\mu_E = {}_F\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. $$

Vorsicht: Die Gleichheit ${}_F\mu_E = {}_F\mathrm{id}_B$ gilt nur für die Matrizen, die Abbildung μ selbst ist nicht die Identität.

(c) Die Abbildung μ ist offensichtlich injektiv (${}_F\mu_E$ hat vollen Rang) und – gemäß Definition – surjektiv. Entsprechend existiert die Umkehrabbildung μ^{-1} und es gilt

$$ {}_E\mu^{-1}{}_F = \left({}_F\mu_E\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. $$

Aufgabe H 47. (*Bestimmung der Spiegelebene*)$^{-1}$

Sei S die Ebene, welche die Punkte $P = (3, -5, 8)^\intercal$, $Q = (6, -3, 2)^\intercal$, $R = (4, -9, -1)^\intercal$ enthält. Sie sollen nun eine Spiegelung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so bestimmen, dass S die Spiegelebene ist. Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

(a) Geben Sie ein *kartesisches* Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem S die y_1-y_2-Ebene ist.

(b) Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass φ die Darstellung ${}_\mathbb{F}\varphi_\mathbb{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A\ {}_\mathbb{F}v$ hat.

(c) Geben Sie φ bezüglich Standardkoordinaten an.

(d) Sei $v := \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie zur Kontrolle $u := \varphi(v)$, $\varphi(u)$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bestimmen zuerst ein Orthonormalsystem f_1, f_2, f_3 mit $\mathrm{L}(f_1) = \overrightarrow{PQ}$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$:

$$ \begin{aligned} f_1 &:= \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{1}{|(3,2,-6)^\intercal|}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9+4+36}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \\ f_2^* &:= \overrightarrow{PR} - \left\langle \overrightarrow{PQ} \,\middle|\, \overrightarrow{PR} \right\rangle \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} - \frac{1}{49}\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ f_2 &:= \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned} $$

Den dritten Vektor bestimmen wir mit 2.9.3 (5,7):

$$f_3 := f_1 \times f_2 = \frac{1}{49}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\-6\\-3\end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix}-42\\21\\-14\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-6\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Ein Koordinatensystem der gewünschten Form ist nun durch

$$\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3) = \left(\left(\begin{smallmatrix}3\\-5\\8\end{smallmatrix}\right); \tfrac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\-6\end{smallmatrix}\right), \tfrac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix}-2\\-6\\-3\end{smallmatrix}\right), \tfrac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix}-6\\3\\-2\end{smallmatrix}\right)\right)$$

gegeben: Kartesisch ist es in Folge der Orthogonalität/Normierung der Basisvektoren, ferner gilt nach Konstruktion

$$P + \mathrm{L}(f_1, f_2) = P + \mathrm{L}\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = S.$$

(b) Im Koordinatensystem $\mathbb{F}$ ist φ die Spiegelung an der y_1-y_2-Ebene, folglich ist

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(c) Wir verwendend Satz 4.7.12 in „umgekehrter Richtung“. (Man beachte die vertauschten Rollen von A und A' sowie $t = \mathbf{0}$ und t'.)
Wir haben $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A'v + t'$ gegeben in Koordinaten $\mathbb{F}$ mit ${}_{\mathbb{F}}\varphi_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A\ {}_{\mathbb{F}}v + \mathbf{0}$. Sei $F := (f_1, f_2, f_3)$, dann folgt aus

$$A = F^{-1}A'F$$
$$\mathbf{0} = t = F^{-1}(A'P - P + t')$$

wegen $F^{-1} = F^{\mathsf{T}}$:

$$A' = FAF^{\mathsf{T}} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}3 & -2 & -6\\2 & -6 & 3\\-6 & -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & -6\\-2 & -6 & -3\\-6 & 3 & -2\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix}3 & -2 & -6\\2 & -6 & 3\\-6 & -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & -6\\-2 & -6 & -3\\6 & -3 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}-23 & 36 & -24\\36 & 31 & 12\\-24 & 12 & 41\end{pmatrix}$$
$$t' = P - A'P = \begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix} - \frac{1}{49}\begin{pmatrix}-23 & 36 & -24\\36 & 31 & 12\\-24 & 12 & 41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix} - \frac{1}{49}\begin{pmatrix}-69-180-192\\108-155+96\\-72-60+328\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix} - \frac{1}{49}\begin{pmatrix}-441\\49\\196\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-9\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-6\\4\end{pmatrix}$$

Also ist φ bezüglich Standardkoordinaten gegeben durch

$$_{\mathbb{E}}\varphi_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -23 & 36 & -24 \\ 36 & 31 & 12 \\ -24 & 12 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Es gelten

$$\begin{aligned}
u = \varphi(v) &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -23 & 36 & -24 \\ 36 & 31 & 12 \\ -24 & 12 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -184 - 144 - 456 \\ 288 - 124 + 228 \\ -192 - 48 + 779 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -784 \\ 392 \\ 539 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} \\
\varphi(u) &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -23 & 36 & -24 \\ 36 & 31 & 12 \\ -24 & 12 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 92 + 72 - 360 \\ -144 + 62 + 180 \\ 96 + 24 + 615 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -196 \\ 98 \\ 735 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix} \\
\varphi\left(\tfrac{1}{2}(u+v)\right) &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -23 & 36 & -24 \\ 36 & 31 & 12 \\ -24 & 12 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -46 - 36 - 408 \\ 72 - 31 + 204 \\ -48 - 12 + 697 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -490 \\ 245 \\ 637 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(u+v)
\end{aligned}$$

Offenbar haben wir richtig gerechnet: Das Spiegelbild des Spiegelbilds von v, $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(u)$ ist wieder u selbst. Ferner ist das der Mittelpunkts von u und v sein eigenes Spiegelbild, was ebenfalls zu erwarten ist: Die Verbindungsgerade von u und v steht senkrecht auf der Spiegelebene, der Abstand beider Punkte zur Ebene ist gleich, folglich muss der Mittelpunkt in der Spiegelebene selbst liegen.

Aufgabe H 48. *Koordinatentransformationen im Komplexen*

Mit $\mathbb{F} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2+2\mathrm{i} \\ -3+\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)\right)$ und $\mathbb{G} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1-3\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ sind zwei Koordinatensysteme in $\mathbb{C}^2$ gegeben. Ferner sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem und X, Y seien die Punkte mit $_{\mathbb{E}}X := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)$ und $_{\mathbb{F}}Y = \left(\begin{smallmatrix} -1-2\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie:

(a) ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ **(b)** ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ **(c)** ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ **(d)** ${}_{\mathbb{G}}X$ und ${}_{\mathbb{G}}Y$

Lösungshinweise hierzu: Wir definieren $F := \begin{pmatrix} -1 & -2+2\mathrm{i} \\ -1 & -3+\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $G := \begin{pmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$, $P := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ und $Q := \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Es gelten ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Gv + Q$, mithin

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -2+2\mathrm{i} \\ -1 & -3+\mathrm{i} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \\
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Wir berechnen G^{-1}:

$$
\left[\begin{array}{cc||cc} 3 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1-3\mathrm{i} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} \\ 3Z_2 - (1-3\mathrm{i})Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cc||cc} 3 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & -1+3\mathrm{i} & 3 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} 1/3 \cdot (Z_1 + Z_2) : \\ \mathrm{i} \cdot Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cc||cc} 1 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1 & -3-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{array}\right]
$$

Entsprechend ist ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = G^{-1}(v - Q) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -3-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, mithin

$$
{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -3-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.
$$

(c) Nach 4.7.8 ist ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = G^{-1}F\left(v - {}_{\mathbb{F}}Q\right) = G^{-1}Fv - G^{-1}F\,{}_{\mathbb{F}}Q$.
Mit $(-2+2\mathrm{i})(-3-\mathrm{i}) = 8-4\mathrm{i}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
G^{-1}F &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -3-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2+2\mathrm{i} \\ -1 & -3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -5-\mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} & 5-13\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
G^{-1}F\,{}_{\mathbb{F}}Q &= G^{-1}F\,{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}Q\right) = G^{-1}F(F^{-1}(Q-P)) \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -3-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2+3\mathrm{i} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

folglich ist ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ gegeben durch

$$
{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -5-\mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} & 5-13\mathrm{i} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -2-3\mathrm{i} \end{pmatrix}.
$$

(d) Wir setzen ein:

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{G}}X = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}X\right) &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -3-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2\mathrm{i} \\ 7-3\mathrm{i} \end{pmatrix}, \\
{}_{\mathbb{G}}Y = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}Y\right) &= \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -5-\mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} & 5-13\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-2\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -2-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i}+11-3\mathrm{i} \\ -7-4\mathrm{i}+3+31\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -2-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 \\ -4+27\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -2-3\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+\mathrm{i} \\ -6+24\mathrm{i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 49. *Parameterabhängige Fixpunktmengen*

Sei $\varphi_{r,s}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & r & -1 \\ -2\sqrt{2} & -1 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4-s^2 \\ 3s^2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Menge $\mathrm{I} := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \varphi_{\alpha,s} \text{ ist eine Isometrie}\}$.

(b) Sei $F_{r,s} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_{r,s}(x) = x\}$ die Fixpunktmenge von $\varphi_{r,s}$.
Bestimmen Sie für alle $\alpha \in \mathrm{I}$ die Menge $\Lambda_\alpha := \{\beta \in \mathbb{R} \mid F_{\alpha,\beta} = \emptyset\}$.

(c) Bestimmen Sie für alle $\alpha \in \mathrm{I}$ die Fixpunktmengen $F_{\alpha,s}$ für alle $s \in \mathbb{R} \smallsetminus \Lambda_\alpha$.
Benutzen Sie Koordinaten bzgl. $\mathbb{F} = \left(P; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ mit einem Fixpunkt P, um zu zeigen, dass $\varphi_{\alpha,s}$ jeweils eine Drehung ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach 4.6.4 ist $\varphi_{\alpha,s}$ genau dann eine Isometrie, wenn der lineare Anteil orthogonal ist.
In diesem Falle gilt für den linearen Anteil $A_\alpha := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \alpha & -1 \\ -2\sqrt{2} & -1 & \alpha \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
A_\alpha^{\mathsf{T}} A_\alpha = A_\alpha A_\alpha &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \alpha & -1 \\ -2\sqrt{2} & -1 & \alpha \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \alpha & -1 \\ -2\sqrt{2} & -1 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & (2\alpha+8)\sqrt{2} & -(2\alpha+8)\sqrt{2} \\ (2\alpha+8)\sqrt{2} & 9+\alpha^2 & -2\alpha-8 \\ -(2\alpha+8)\sqrt{2} & -2\alpha-8 & 9+\alpha^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Folglich ist A_α genau dann orthogonal, wenn $\alpha = -4$ gilt, wir erhalten $\mathrm{I} = \{-4\}$.

(b) Die Fixpunktmenge $F_{-4,\beta}$ von $\varphi_{-4,\beta}$ ist genau dann leer, wenn kein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_{-4,\beta}(x) = x$ existiert. Dies ist aufgrund der Definition der Abbildung äquivalent dazu, dass es kein $x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4 & -1 \\ -2\sqrt{2} & -1 & -4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-\beta^2 \\ 3\beta^2 \end{pmatrix}
$$

gibt. Wir nutzen Gauß:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{2} & \frac{2}{5}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{2} & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & 4-\beta^2 \\ \frac{2}{5}\sqrt{2} & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & 3\beta^2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 5/2\cdot Z_1 : \\ Z_2+\sqrt{2}Z_1 : \\ Z_3-\sqrt{2}Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4-\beta^2 \\ 0 & 1 & 1 & 3\beta^2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_2+\sqrt{2}Z_2 : \\ \\ Z_3-Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta^2 \\ 0 & 1 & 1 & 4-\beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 4\beta^2-4 \end{array}\right]$$

Das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta^2 \\ 4-\beta^2 \end{pmatrix}$ ist immer – sprich für alle $\beta \in \mathbb{R}$ – lösbar, da die Matrix vollen Rang hat. Daher ist obiges LGS bzw. die Fixpunktgleichung genau dann unlösbar, wenn $4\beta^2 - 4 \neq 0$. Folglich gilt $\Lambda_{-4} = \{\beta \in \mathbb{R} \mid |\beta| \neq 1\}$.

(c) Da s nur quadratisch vorkommt, gilt $\varphi_{-4,-1} = \varphi_{-4,1}$, es handelt sich um die selbe Abbildung. Aus der Fixpunktgleichung erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Es gilt entsprechend

$$\begin{aligned} F_{-4,-1} = F_{-4,1} &= \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Sei nun $P \in F_{-4,-1}$ beliebig, aber fest. Wir definieren $\mathbb{F}$ entsprechend der Aufgabenstellung, $A := A_{-4}$ als den linearen Anteil und $t := (0,3,3)^\intercal$ als den Translationsanteil von $\varphi_{-4,\pm 1}$. Dann ist $\varphi_{-4,\pm 1}$ bzgl. $\mathbb{F}$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift ${}_{\mathbb{F}}v \mapsto A'\,{}_{\mathbb{F}}v + t'$ mit

$$\begin{aligned} A' &= E_3^{-1} A E_3 = A \\ t' &= E_3^{-1}(AP - P + t) = \underbrace{AP + t}_{=\varphi_{-4,\pm 1}(P)} - P = 0, \end{aligned}$$

also:

$${}_{\mathbb{F}}(\varphi_{-4,\pm 1})_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4 & -1 \\ -2\sqrt{2} & -1 & -4 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v$$

Wegen der Orthogonalität der Matrix und

$$\det\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4 & -1 \\ -2\sqrt{2} & -1 & -4 \end{pmatrix}\right) = \frac{48+8+8+32-3+32}{125} = 1$$

handelt es sich folglich um eine Drehung.

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Nullstellen von Polynomfunktionen*

Bestimmen Sie alle Nullstellen folgender Polynomfunktionen $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto p(z)$.

(a) $p_1(z) := z^4 - 1$

(b) $p_2(z) := z^2 - 4z + 5$

(c) $p_3(z) := z^3 - 4z + z^2 - 4$

(d) $p_4(z) := z^2 + (1-2\mathrm{i})z - 1 - \mathrm{i}$

Hinweis: Zur Berechnung komplexer Nullstellen dürfen Sie unser Zusatzmaterial verwenden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Nullstellen sind $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \mathrm{i}$ und $z_4 = -\mathrm{i}$.

(b) Wir wenden die Mitternachtsformel, die wir – wie im Zusatzmaterial beschrieben – auch in $\mathbb{C}$ verwenden dürfen:

$$z_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Wir setzen $\sqrt{t} = \sqrt{|t|}\cdot \mathrm{i}$ für $t \in \mathbb{R}$, $t < 0$ und erhalten die Nullstellen $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_2 = 2 - \mathrm{i}$.

(c) Da alle Koeffizienten ganzzahlig sind, wenden wir 1.8.10 an, und probieren sämtliche Teiler von -4 aus. Hierdurch erhalten wir die Nullstellen $z_1 = 2$, $z_2 = -1$ und $z_3 = -2$. Da der Grad des Polynoms 3 ist, sind dies auch alle.

(d) Wir wenden erneut die Mitternachtsformel an:

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{-1+2\mathrm{i} \pm \sqrt{(1-2\mathrm{i})^2 - 4(-1-\mathrm{i})}}{2} \\ &= \frac{-1+2\mathrm{i} \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}+4+4\mathrm{i}}}{2} = \frac{-1+2\mathrm{i} \pm \sqrt{1}}{2}, \end{aligned}$$

was die Nullstellen $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -1 + \mathrm{i}$ liefert.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 51. *Diagonalisierung und Potenzen*

Betrachten Sie die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ aus H 27.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A.

(b) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine reguläre Matrix T in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $T^{-1}AT = D$.

(c) Leiten Sie die in H 27 gegebene Darstellung $A^n = \left(\begin{smallmatrix} 2^n & 0 \\ 3\cdot(2^n-1) & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit Hilfe der Teilaufgaben (a) und (b) her.
Hinweis: Sie dürfen P 41 (b) ohne (erneuten) Beweis verwenden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Übertragen wir mit Lemma 3.12.4 Beispiel 5.1.10 auf untere Dreiecksmatrizen, sehen wir: Auch bei solchen können wir die Eigenwerte direkt ablesen, in diesem Falle $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Einen Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1$ können wir direkt als $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ identifizieren. Um einen Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2$ berechnen, müssen wir das System

$$\mathbf{0} = (A - 2E_2)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} v$$

lösen, woraus wir beispielsweise $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhalten. Entsprechend sind die Eigenräume gegeben durch

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$
$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(b) Wir nutzen Satz 5.3.1: Die Matrizen $T := (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben die gewünschten Eigenschaften.

(c) Gemäss P 41 (b) sind $\lambda_1^n = 2^n$ und $\lambda_2^n = 1^n = 1$ Eigenwerte von A^n, zugehörige Eigenvektoren sind v_1 und v_2. Wählen wir also T wie in Teilaufgabe (b) und setzen $D_n := \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so gilt $T^{-1}A^nT = D_n = D^n$. Wir berechnen T^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc||cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Z_2 - 3Z_1 : \left[\begin{array}{cc||cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right],$$

also ist $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} A^n = TD^nT^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3\cdot(2^n-1) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 52. *Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen*
Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu:

- Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix A und erhalten

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (1-\lambda)(-4-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 + 4 = \lambda(\lambda+3).$$

Lösen der Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$ liefert also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 0$. Für einen zugehörigen Eigenvektor zu λ_1 suchen wir ein nicht-triviales Element aus dem Kern der Matrix

$$A + 3 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ein solches Element können wir als $v_1 = (1, -2)^T$ ablesen, die Proble liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für den zugehörigen Eigenvektor zu λ_2 suchen wir ein Element aus dem Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ein solches Element ist gegeben durch $v_1 = (-2, 1)^T$, die Proble liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix B und erhalten

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) &= (3-\lambda)^2(2-\lambda) - 2 - 2 - (3-\lambda) - (3-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= (3-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(3-\lambda) - 4(1+2-\lambda) \\ &= (3-\lambda)((3-\lambda)(2-\lambda) - 6) \\ &= (3-\lambda)(6 - 5\lambda + \lambda^2 - 6) \\ &= (3-\lambda)\lambda(\lambda-5) \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung $\chi_B(\lambda) = 0$ liefert also die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 5$. Für den zugehörigen Eigenvektor zu λ_1 suchen wir ein Element aus dem Kern der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da alle Zeilensummen (Summe über die Einträge einer Zeile) 0 sind, ist ein solches Element $v_1 = (1,1,1)^T$, die Proble liefert

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den zugehörigen Eigenvektor zu λ_2 suchen wir ein Element aus dem Kern der Matrix

$$B - 3E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gauß liefert

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -1/2 \cdot Z_2 : \\ -1/2 \cdot Z_1 : \\ -2Z_3 + Z_1 + Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Folglich ist ein solches Element gegeben durch $v_2 = (1,1,-2)^T$, die Proble liefert

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für den zugehörigen Eigenvektor zu λ_3 suchen wir ein Element aus dem Kern der Matrix

$$B - 5E_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ein solches Element ist gegeben durch $v_3 = (1,-1,0)^T$, die Proble liefert

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Die Matrix C hat Blockdiagonalgestalt wobei die Blöcke auf der Diagonalen gerade die beiden Matrizen B und A sind. Für das charakteristische Polynom gilt daher

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda E_5) &= \det \begin{pmatrix} B - \lambda E_3 & 0 \\ 0 & A - \lambda E_2 \end{pmatrix} \\ &= \det(B - \lambda E_3) \cdot \det(A - \lambda E_2) = \chi_B(\lambda) \cdot \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $\chi_C(\lambda)$ sind also die Eigenwerte der Matrizen A und B, aufsteigend sortiert haben wir $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 2), $\lambda_3 = 3$ und

$\lambda_4 = 5$. Die zugehörigen Eigenvektoren erhalten wir aus den Eigenvektoren von A und B indem wir vorne, bzw. hinten mit der entsprechenden Anzahl Nullen ergänzen:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 53. *Parameterabhängige Matrix*
Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen das charakteristische Polynom durch Entwicklung nach der untersten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} \chi_{A_t}(\lambda) = \det(A_t - \lambda E_4) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t & 0 & 1 \\ -1 & t-\lambda & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}. \\ &= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t & 0 \\ -1 & t-\lambda & t \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nochmal entwickeln nach der untersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \chi_{A_t}(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t \\ -1 & t-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)^2((1-\lambda)(t-\lambda) - t) \\ &= (1-\lambda)^2 \lambda(\lambda - (1+t)). \end{aligned}$$

Es sind also drei interessante Fälle zu unterscheiden:

- Sei $t = 0$, so gibt es die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 1$ und $e_{\lambda_2} = 3$. Wegen $1 \leqq d_{\lambda_1} \leqq e_{\lambda_1} = 1$ (siehe Lemma 5.3.4 im Skript) folgt $d_{\lambda_1} = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $\operatorname{Rg}(A_0 - E_3)$. Es ist

$$\operatorname{Rg}(A_0 - E_3) = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 2 = 2$.

- Sei $t = -1$, so gibt es die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 2$ und $e_{\lambda_2} = 2$. Für d_{λ_1} berechnen wir den Rang der Matrix $\mathrm{Rg}\,(A_{-1})$. Es ist

$$\mathrm{Rg}\,(A_{-1}) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

  und daher $d_{\lambda_1} = 4-3 = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $\mathrm{Rg}\,(A_{-1} - E_3)$. Es ist

$$\mathrm{Rg}\,(A_{-1} - E_3) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 3 = 1$.
- Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ so gibt es die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + t$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 1$, $e_{\lambda_2} = 2$ und $e_{\lambda_3} = 1$. Wie im ersten Fall folgen $d_{\lambda_1} = 1$ und $d_{\lambda_3} = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $\mathrm{Rg}\,(A_t - E_3)$. Es ist

$$\mathrm{Rg}\,(A_t - E_3) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t-1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 3 = 1$.

Aufgabe H 54. *Eigenvektoren linearer Abbildungen*

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mu : V \to V$ linear. Analog zu Matrizen heißt $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektor von μ, wenn ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\mu(v) = \lambda v$ existiert. Wir betrachten nun für $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abbildung $\mathcal{S}_n : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} : A \mapsto \frac{1}{2}\left(A + A^\intercal\right)$.

(a) $\mathcal{S}_n$ hat genau zwei Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$. Rechnen Sie nach, dass sich die Eigenräume als $V(0) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = -A^\intercal\}$ und $V(1) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^\intercal\}$ ergeben.

(b) Bestimmen Sie ${}_B(\mathcal{S}_2)_B$ für die Basis $B:$ $b_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $b_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b_3 : \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $b_4 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Welchen der obigen EW können Sie an ${}_B(\mathcal{S}_2)_B$ ablesen und warum?

(c) Ist ${}_B(\mathcal{S}_2)_B$ diagonalisierbar?

Lösungshinweise hierzu: Um uns später die Arbeit zu erleichtern und (b) vollständig begründen zu können, halten wir zuerst fest, dass die Eigenwerte einer beliebigen linearen Abbildung $\mu : V \to V$ mit denen ihrer Darstellungsmatrix korrespondieren: Sei $B : b_1, ..., b_d$ mit $d := \dim V$ eine beliebige Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

- Ist v ein Eigenwert von μ zum Eigenwert λ, so gilt $\mu(v) = \lambda v$, insbesondere also ${}_B(\mu(v)) = {}_B(\lambda v) = \lambda\, {}_Bv$, somit ist ${}_Bv$ ein Eigenvektor von ${}_B\mu_B$ zum Eigenwert λ.
- Ist umgekehrt $x := (\xi_1, ..., \xi_d)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{K}^d$ ein Eigenvektor von ${}_B\mu_B$ zum Eigenwert λ, so folgt für den Vektor $v := \sum_{j=1}^d \xi_j b_j \in V$:

  $${}_B(\mu(v)) = {}_B\mu_B\, {}_Bv = {}_B\mu_B\, x = \lambda x,$$

  also $\mu(v) = \sum_{j=1}^d (\lambda \xi_j) b_j = \lambda \sum_{j=1}^d \xi_j b_j = \lambda v$.
- Es gilt ${}_Bv = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $v = \mathbf{0}$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ ist also genau dann Eigenwert der Abbildung $\mu : V \to V$ und v ein zugehöriger Eigenvektor, wenn der Koordinatenvektor ${}_Bv$ bzgl. einer beliebigen Basis B von V ein Eigenvektor von ${}_B\mu_B$ ist. (Dies verträgt sich mit Satz 5.4.2: Die Darstellungsmatrizen bzgl. verschiedener Basen sind konjugiert zueinander.)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir definieren die Mengen $\mathcal{M}_{schief} := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M = -M^{\mathsf{T}}\}$ und $\mathcal{M}_{sym} := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M = M^{\mathsf{T}}\}$. ($\mathcal{M}_{schief}$ ist die die Menge der *schiefsymmetrischen*, $\mathcal{M}_{sym}$ die der *symmetrischen* Matrizen). Dann gelten:

$$\begin{aligned}
A \in V(0) &\Leftrightarrow \mathcal{S}_n(A) = 0 \cdot A \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathsf{T}}\right) = \mathbf{0} \Leftrightarrow A + A^{\mathsf{T}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A = -A^{\mathsf{T}},\\
A \in V(1) &\Leftrightarrow \mathcal{S}_n(A) = 1 \cdot A \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathsf{T}}\right) = A \Leftrightarrow A + A^{\mathsf{T}} = 2A \Leftrightarrow A = A^{\mathsf{T}},
\end{aligned}$$

insbesondere also

$$\begin{aligned}
A \in V(0) &\Leftrightarrow A \in \mathcal{M}_{schief} ,\\
A \in V(1) &\Leftrightarrow A \in \mathcal{M}_{sym} ,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Aus Symmetriegründen gilt $\mathcal{S}_2(b_1) = b_1$, $\mathcal{S}_2(b_2) = b_2$ sowie $\mathcal{S}_2(b_4) = b_4$. Für b_3 gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(b_3) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_4,
\end{aligned}$$

folglich ist

$${}_B\left(\mathcal{S}_2\right)_B = \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

An dieser Matrix können mithilfe der anfangs gemachten Feststellung tatsächlich alle angegeben EW ablesen: Offensichtlich ist $\lambda_2 = 1$ ein Eigenwert, zugehörige Eigenvektoren der Matrix(!) sind $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_4$, welche den Eigenvektoren b_1, b_2, b_4 von μ entsprechen, siehe Vorbemerkung. Da die Matrix eine Nullzeile enthält, ist ihre Determinante – und somit ein Eigenwert – gleich 0, womit wir auch $\lambda_1 = 0$ ablesen können.

(c) Ja, ${}_B(\mathcal{S}_2)_B$ ist diagonalisierbar. Wie in (b) festgestellt, sind $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_4$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Insbesondere ist $\dim V_1 \geqq 3$. Aber 0 ist ebenfalls Eigenwert, es existiert also ein $x \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ mit ${}_B(\mathcal{S}_2)_B x = \mathbf{0}$. Da Eigenräume immer mindestens Dimension 1 haben, folgt aus Dimensionsgründen und Lemma 5.3.2, dass $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_4, x$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bestehend aus Eigenvektoren ist.

Bemerkung:

- Mit (b) und (c) können wir dank unserer Vorbemerkung auch die Angabe in (a), namentlich dass $\mathcal{S}_n$ genau zwei Eigenwerte hat, zumindest für $n = 2$ verifizieren – dies war aber nicht verlangt.
- Ebensowenig ist es hier notwendig, einen vierten Eigenraumbasisvektor explizit zu bestimmen. Falls man dies doch tun möchte, kann man ihn in diesem Falle an der Matrix ablesen: Für $x = (1, -1, -2, 1)^\intercal$ gilt ${}_B(\mathcal{S}_2)_B x = \mathbf{0}$, der hierzu korrespondierende Eigenvektor von μ ist die Matrix $b := b_1 - b_2 - 2b_3 + b_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 55. *Mengen zeichnen im $\mathbb{R}^2$*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

(a) $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+1)^2 = (y-1)^2 \right\}$,

(b) $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + y^2 - 2y = 3 \right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$(x+1)^2 = (y-1)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+1| = |y-1|$$

d.h. wir unterscheiden 4 Fälle:

- Sei $x \geqq -1$ und $y \geqq 1$, dann ist

$$|x+1| = |y-1| \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1 = y-1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x+2$$

.

- Sei $x < -1$ und $y < 1$, dann ist

$$|x+1| = |y-1| \qquad \Leftrightarrow \qquad -x-1 = -y+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x+2$$

.

- Sei $x \geqq -1$ und $y < 1$, dann ist

$$|x+1| = |y-1| \qquad \Leftrightarrow \qquad x+1 = -y+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -x$$

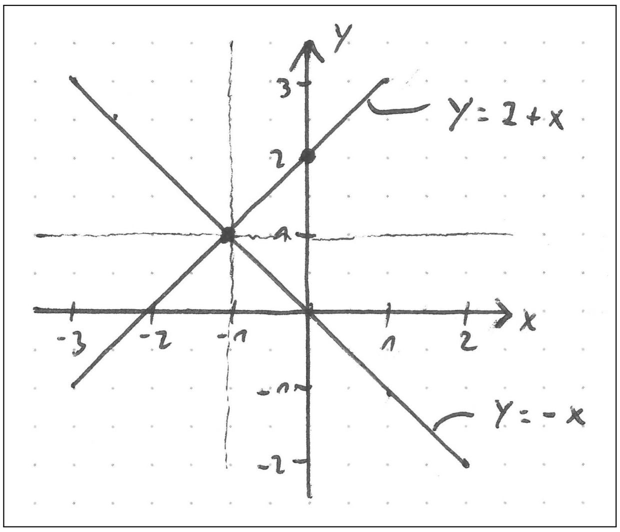
.

- Sei $x < -1$ und $y \geqq 1$, dann ist

$$|x+1| = |y-1| \qquad \Leftrightarrow \qquad -x-1 = y-1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -x$$

.

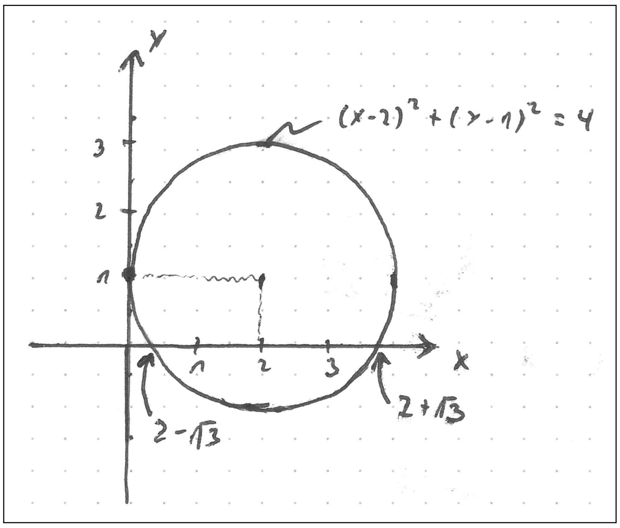
Zusammengefasst erhalten wir folgende Skizze:



(b) Quadratisches Ergänzen liefert

$$
\begin{aligned}
& (x-2)^2 + y^2 - 2y = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4.
\end{aligned}
$$

Alle Punkte der Menge liegen also auf einem Kreis mit Mittelpunkt $(2, 1)$ und Radius 2:



(Wichtig: Der Kreis berührt die y-Achse im Punkt $(0, 1)$!)

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 56. *Diagonalisierung*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Warum sind A und B diagonalisierbar? Berechnen Sie die Eigenwerte von A und B und finden Sie invertierbare Matrizen T und S so, dass $T^{-1}AT$ und $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben.

Lösungshinweise hierzu:

- A und B sind nach **Satz 5.4.2** aus dem Vorlesungsskript diagonalisierbar da sie symmetrisch mit reellen Einträgen sind.
- Eigenwerte von A:
  Das charakteristische Polynom ist gegeben durch
  $$\chi_A(\lambda) = -(6-\lambda)(6+\lambda) - 9 = \lambda^2 - 36 - 9 = \lambda^2 - 45$$
  und besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 3\sqrt{5}$ und $\lambda_2 = -3\sqrt{5}$. Diese sind die Eigenwerte von A.
- Matrix T:
  Eine mögliche Matrix ist $T = (v, w)$ deren Spaltenvektoren v und w gerade die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1 und λ_2 sind. Die Bedingung $(A - \lambda_1 E_2)v = 0$ führt dabei auf das LGS
  $$\begin{aligned} (2-\sqrt{5})v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 - (2+\sqrt{5})v_2 &= 0 \end{aligned}$$
  und wir lesen ab, dass $v = (-1, 2-\sqrt{5})^\intercal$ eine mögliche Lösung ist.
  Die Bedingung $(A - \lambda_2 E_2)w = 0$ führt auf das LGS
  $$\begin{aligned} (2+\sqrt{5})w_1 + w_2 &= 0 \\ w_1 - (2-\sqrt{5})w_2 &= 0 \end{aligned}$$
  und wir lesen ab, dass $w = (-1, 2+\sqrt{5})^\intercal$ eine mögliche Lösung ist.
  Die gesuchte Matrix T ist also
  $$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2-\sqrt{5} & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$
- Eigenwerte von B:
  Das charakteristische Polynom ist gegeben durch
  $$\chi_B(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda = \lambda^2(\lambda - 2)$$
  und besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ (doppelte NST!) und $\lambda_2 = 2$. Diese sind die Eigenwerte von B.

- Matrix S:
  Eine mögliche Matrix ist $S = (u, v, w)$ deren Spaltenvektoren u, v und w gerade die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1 und λ_2 sind. Die Bedingung $(A - \lambda_1 E_3)v = 0$ führt dabei auf das LGS

$$\begin{aligned} v_1 + v_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ v_1 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

  und wir lesen ab, dass $u = (1, 0, 1)^\intercal$ und $v = (0, 1, 0)^\intercal$ mögliche Lösungen sind.
  Die Bedingung $(A - \lambda_2 E_2)w = 0$ führt auf das LGS

$$\begin{aligned} -w_1 + w_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ w_1 - w_3 &= 0 \end{aligned}$$

  und wir lesen ab, dass $w = (1, 0, 1)^\intercal$ eine mögliche Lösung ist.
  Die gesuchte Matrix S ist also

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 57. *Definitheit quadratischer Formen*
Wir betrachten die durch $q_A(x) = x^\intercal A\, x$ gegebene quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ für $A \in \{B, C\}$ mit den parameterabhängigen Matrizen $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & d \end{smallmatrix}\right)$ und $C = \left(\begin{smallmatrix} -1 & d \\ d & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Für welche $d \in \mathbb{R}$ ist q_B positiv definit, negativ definit bzw. indefinit?

(b) Für welche $d \in \mathbb{R}$ ist q_C positiv definit, negativ definit bzw. indefinit?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x = (x_1, x_2)^\intercal$ ist

$$q_B(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + dx_2^2.$$

- Sei $d > 1$, dann ist

$$q_B(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + (d-1)x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + (d-1)x_2^2 > 0$$

  für alle $x \neq \mathbf{0}$ und q_B ist positiv definit.
- Sei $d = 1$, dann ist

$$q_B(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \geqq 0$$

  aber $q_B(1, -1) = 1 - 2 + 1 = 0$ und q_B ist weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit.
- Sei $d < 1$, dann ist $q_B(1, 0) = 1 > 0$ und

$$q_B(1, -1) = 1 - 2 + d = d - 1 < 0$$

  und q_B ist indefinit.

(b) Für $x = (x_1, x_2)^\intercal$ ist

$$q_C(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2dx_1x_2.$$

- Sei $|d| < \sqrt{2}$, dann ist

  $$q_C(x) < -x_1^2 - 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 = -(x_1^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2x_2^2) = -(x_1 - \sqrt{2}x_2)^2 \leqq 0$$

  und q_C ist negativ definit.
- Sei $d > \sqrt{2}$, dann ist $q_C(1,0) = -1 < 0$ und

  $$q_C(d,1) = -d^2 - 2 + 2d^2 = d^2 - 2 > 0.$$

  D.h. q_C ist indefinit.
- Es bleiben die Fälle $d = \pm\sqrt{2}$ zu untersuchen, dabei ist

  $$q_C(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 \pm 2\sqrt{2}x_1x_2 = -(x_1 \mp \sqrt{2}x_2)^2 \leqq 0.$$

  aber $q_C(\sqrt{2}, \pm 1) = 0$. D.h. q_C ist weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit.

Aufgabe H 58. *Grobeinteilung von Quadriken*

Geben Sie zu den folgenden Quadriken jeweils die erweiterte Matrix an und bestimmen Sie ihren Typ (kegelige Quadrik, Mittelpunktsquadrik oder parabolische Quadrik):

(a) $Q_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\right\}$,

(b) $Q_\beta := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0\right\}$,

(c) $Q_\gamma := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 1 = 0\right\}$,

(d) $Q_\delta := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x_1^2 + 12x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 6x_3 + 1 = 0\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 2$ schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

haben wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine Mittelpunktsquadrik.

(b) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 1$ schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\mathsf{erw}} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

haben wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine parabolische Quadrik.

(c) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 1$ schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\mathsf{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

haben wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine kegelige Quadrik.

(d) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 3$ (wegen $\det A = -40$) schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\mathsf{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

haben wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine kegelige Quadrik.

Aufgabe H 59. *Quadrik als Fixpunktmenge*

Sei $P := \binom{1}{1}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}\colon x \mapsto \frac{x-P}{|x-P|^2} + P$$

(a) Skizzieren Sie die Fixpunktmenge $F := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \mid \varphi(x) = x\}$ von φ.

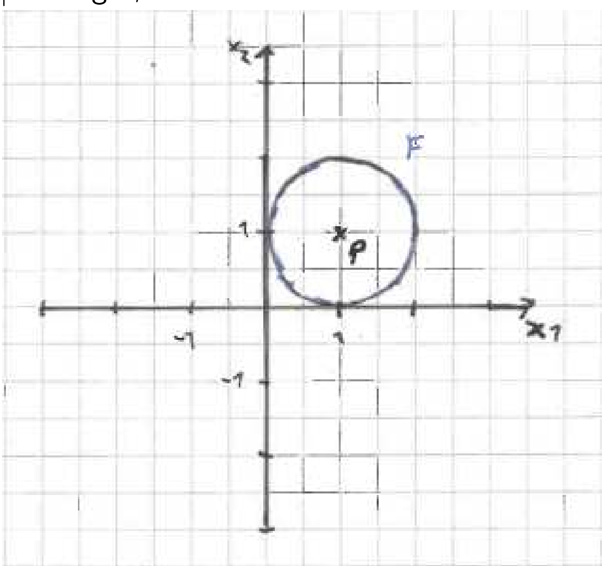
(b) Bei F handelt es sich um eine Quadrik der Form $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Bestimmen Sie die erweiterte Matrix A_{erw} und den Typ der Quadrik nach 6.2.6.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $x \in F$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} x &=& \frac{x-P}{|x-P|^2} + P & \quad | -P \\ x-P &=& \frac{x-P}{|x-P|^2} & \quad | \cdot |x-P|^2 \\ |x-P|^2(x-P) &=& x-P & \quad | -|x-P|^2(x-P) \\ 0 &=& \left(1-|x-P|^2\right)(x-P) & \end{array}$$

Da alle obigen Umformungen Äquivalenzumformungen waren, gilt also $x \in F$ genau dann, wenn $|x-P|^2 = 1$ gilt, F ist ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt P:



(b) Sei $x = \binom{x_1}{x_2}$, dann ist $1 = \left|\binom{x_1}{x_2} - \binom{1}{1}\right|^2$ äquivalent zu

$$0 = (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1 \\ &= x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c \end{aligned}$$

mit $A = E_2$, $a = -P$, $c = 1$. Die erweiterte Matrix ist also

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det A_{\text{erw}} = -1$ hat $\det A_{\text{erw}}$ Rang 3. Da ferner offensichtlich $\operatorname{Rg} A = 2$ ist, handelt es sich nach 6.2.6 um eine Mittelpunktsquadrik, wie wir es bei einem Kreis erwarten.

Frischhaltebox

Aufgabe H 60. *Ungleichungen II*

Skizzieren Sie die Menge aller $v \in \mathbb{C}$ mit

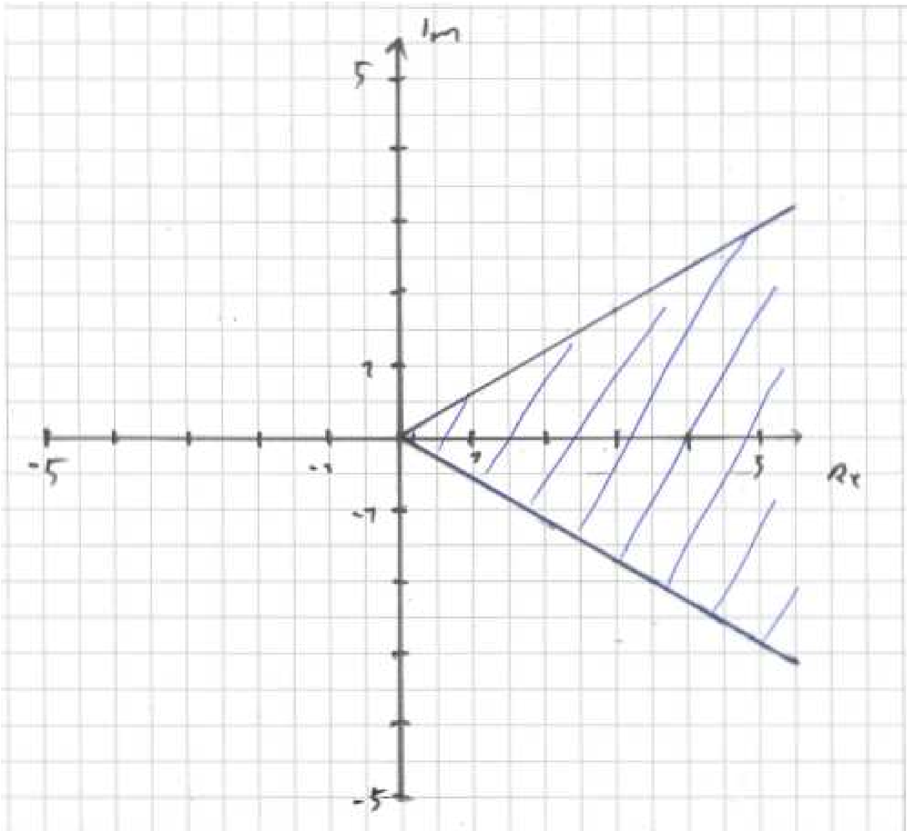
(a) $\operatorname{Re} v \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}\,|v|$ **(b)** $-21 < v\bar{v} - (3-4\mathrm{i})\bar{v} - (3+4\mathrm{i})v \leqq -16.$

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben in beiden Teilaufgaben $v = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Mit obiger Notation lautet die Bedingung $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2+y^2} \leqq x$. Da $|v| \geqq 0$ und somit $x \geqq 0$ gilt, können wir Quadrieren als eine Äquivalenzumformung betrachten. Entsprechend ist obige Ungleichung äquivalent zu $\frac{3}{4}\left(x^2+y^2\right) \leqq x^2$ bzw.

$$y^2 \leqq \frac{1}{3}x^2$$

Hieraus erhalten wir schließlich $-\frac{1}{\sqrt{3}}x \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}x$, es ergibt sich folgendes Bild:



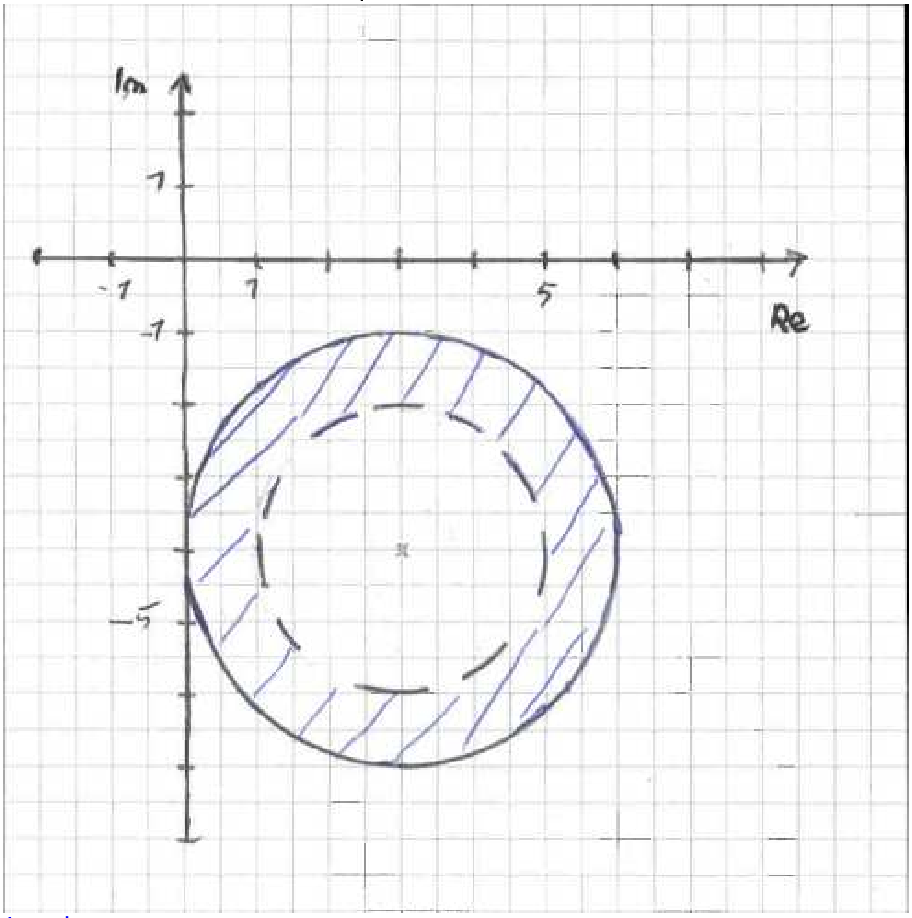
(b) Wir berechnen mit Hilfe quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned}
v\bar{v} - (3-4\mathrm{i})\bar{v} - (3+4\mathrm{i})v &= x^2 + y^2 - (3-4\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) - (3+4\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) \\
&= x^2 + y^2 - 3x + 4\mathrm{i}x + 3\mathrm{i}y + 4y - 3x - 4\mathrm{i}x - 3\mathrm{i}y + 4y \\
&= x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 8y + 16 - 16 \\
&= (x-3)^2 + (y+4)^2 - 25.
\end{aligned}$$

Addieren wir auf allen „Seiten“ der Ungleichung also 25, führt dies auf

$$4 < (x-3)^2 + (y+4)^2 \leqq 9.$$

Die Gleichung beschreibt also alle Punkte innerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt $3-4\mathrm{i}$ und Radius 3, welche nicht Teil der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius 2 um den selben Mittelpunkt sind:



Alternativer Lösungsweg:

Wir schreiben $m :=3-4\mathrm{i}$ und addieren auf alle Seiten $25=|m|^2=m\bar{m}$, womit wir die äquivalente Darstellung

$$4 < v\bar{v} - m\bar{v} - \bar{m}v + m\bar{m} \leqq 9$$

erhalten. Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} v\bar{v} - m\bar{v} - \bar{m}v + m\bar{m} &= (v-m)\bar{v} - (v-m)\bar{m} = (v-m)(\bar{v}-\bar{m}) \\ &= (v-m)\,\overline{(v-m)} = |v-m|^2 . \end{aligned} \tag{5}$$

Auch hier können wir sofort erkennen, dass die Ränder der durch die Ungleichung gegebenen Punktmenge Kreise um den Mittelpunkt m mit den Radien $r_1=2$ und $r_2=3$ sind.

Bemerkung: Wegen (5) nennt

$$v\bar{v} - m\bar{v} - \bar{m}v + \gamma = 0, \quad v \in \mathbb{C}$$

mit beliebigen, aber festen $m \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma < m\bar{m}$ die *betragsfreie Form der Kreisgleichung*. Der Mittelpunkt des entsprechenden Kreises ist m, der Radius r ergibt sich mittels $\gamma = m\bar{m} - r^2$ als $r = \sqrt{m\bar{m} - \gamma}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die Quadrik $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_2 - 12x_3 + 1 = 0\}$ die Matrixbeschreibung und den Typ. Bestimmen Sie außerdem eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$ und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem an, in dem die Quadrik diese euklidische Normalform annimt.

Lösungshinweise hierzu: Schreibt man die Quadrik in Matrixgestalt $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad c = 1,$$

so hat die Matrix A bereits Diagonalgestalt. Der Schritt A zu diagonalisieren entfällt hier also und man fährt mit quadratischem Ergänzen fort. Es ist

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_2 - 12x_3 + 1 =& 2x_1^2 + 3(x_2+1)^2 - 12x_3 - 2 \\ =& 2x_1^2 + 3(x_2+1)^2 - 12\left(x_3 + \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

Durch die Verschiebung $y = x - P$ mit

$$_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$2y_1^2 + 3y_2^2 - 12y_3 = 0$$

und nach Division durch -6 auf beiden Seiten die euklidische Normalform

$$-\frac{1}{3}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_3 = 0$$

bzgl. des Koordinatensystems $(P; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$. Bei der Quadrik handelt es sich also um ein elliptisches Paraboloid bzw. um eine parabolische Quadrik. Letzteres sieht man auch anhand der erweiterten Matrix

$$A_{\mathsf{erw}} = \left(\begin{array}{c|c} c & a^\intercal \\ \hline a & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 3 & -6 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit $\operatorname{Rg} A_{\mathsf{erw}} - \operatorname{Rg} A = 4 - 2 = 2$.

Aufgabe H 62. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_3 = 0\}$$

die Matrixbeschreibung und den Typ. Bestimmen Sie außerdem eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$ und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem an, in dem die Quadrik diese euklidische Normalform annimt.

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben die Quadrik in Matrixgestalt

$$x^{\mathsf{T}}Ax + 2a^{\mathsf{T}}x + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad c = 0.$$

Für den Typ betrachten wir die erweiterte Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|c} c & a^{\mathsf{T}} \\ \hline a & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

wobei $\operatorname{Rg} A = 1$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = 3 = \operatorname{Rg} A + 2$. Wir haben also eine parabolische Quadrik. Aus der Bedingung $\det(A - \lambda \cdot E_3) = 0$ erhalten wir mit

$$\det(A - \lambda \cdot E_3) = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3)$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 2). Man beachte, dass wir dabei den Eigenwert Null “nach hinten” sortiert haben. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ ist $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathsf{T}}$ wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein zugehöriger Eigenvektor, diesen haben wir gleich normiert. Entsprechend sind wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die beiden Vektoren $v_2 = (1, -1, 0)^{\mathsf{T}}$ und $v_3 = (1, 0, -1)^{\mathsf{T}}$ Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 0$. Wir suchen nun zwei orthonormale Eigenvektoren f_2 und f_3 sodass zusätzlich $a^{\mathsf{T}} f_3 = 0$ gilt. Um die letzte Bedingung zu erfüllen lösen wir das Gleichungssystem

$$\left\langle t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, a \right\rangle = 0.$$

Mit

$$\left\langle t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, a \right\rangle = 3t_3$$

folgt $t_3 = 0$ und nach Normierung $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^\intercal$. Nach Gram-Schmidt erhalten wir f_2 nach Normierung von

$$\tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d.h. $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^\intercal$. Also diagonalisiert die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix A und die Quadrik hat nach Transformation in das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (\mathbf{0}; f_1, f_2, f_3)$ mit $y = F^\intercal x$ die Gestalt

$$3y_1^2 + 2\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{6}y_2 = 0$$

Quadratisches Ergänzen liefert

$$\begin{aligned} 3y_1^2 + 2\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{6}y_2 =& 3\left(y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{3}\right) - 1 - 2\sqrt{6}y_2 \\ =& 3\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 - 2\sqrt{6}y_2. \end{aligned}$$

Mit $z = y - {}_{\mathbb{F}}P$,

$${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

transformieren wir in das Koordinatensystem $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2, f_3)$ in dem die Quadrik die Gestalt

$$3z_1^2 - 1 - 2\sqrt{6}z_2 = 0$$

hat. Offenbar ist die Quadrik parabolisch (siehe auch oben), die verbleibende Konstante können wir mit einer weiteren Verschiebung elliminieren. Dazu bemerken wir, dass

$$3z_1^2 - 1 - 2\sqrt{6}z_2 = 3z_1^2 - 2\sqrt{6}\left(z_1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6}}\right),$$

d.h. wir transformieren $w = z - {}_{\mathbb{G}}Q$ mit

$${}_{\mathbb{G}}Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/(2 \cdot \sqrt{6}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten bzgl. $\mathbb{H} = (Q; f_1, f_2, f_3)$ die Darstellung

$$3w_1^2 - 2\sqrt{6}w_2 = 0$$

und nach Division durch $-\sqrt{6}$ auf beiden Seiten die euklidische Normalform

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}w_1^2 + 2w_2 = 0.$$

Zusammenfassung: Die gegebene Quadrik $\mathcal{Q}$ hat bzgl. des Koordinatensystems $(Q; f_1, f_2, f_3)$ mit

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$_{\mathbb{E}}Q = F(_{\mathbb{G}}Q + {}_{\mathbb{F}}P) = \begin{pmatrix} -5/12 \\ -5/12 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

die euklidische Normalform

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} w_1^2 + 2w_2 = 0.$$

Der Typ von $\mathcal{Q}$ ist eine parabolische Quadrik, genauer ein parabolischer Zylinder.

Aufgabe H 63. *Paralleles Ebenenpaar*

Gegeben ist die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3 - 4x_1 + 4x_3 - 1 = 0 \right\}.$$

Die Gestalt von $\mathcal{Q}$ ist ein paralleles Ebenenpaar. Bestimmen Sie Ebenen $E_1 \neq E_2$, die in $\mathcal{Q}$ liegen. Bestimmen Sie den Abstand zwischen E_1 und E_2.

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben die Quadrik in Matrixgestalt

$$x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad c = -1.$$

Aus der Bedingung $\det(A - \lambda \cdot E_3) = 0$ erhalten wir mit

$$\det(A - \lambda \cdot E_3) = -\lambda(-1/2 - \lambda)^2 + \lambda/4 = -\lambda^2(\lambda + 1)$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 2). Man beachte, dass wir dabei den Eigenwert Null "nach hinten" sortiert haben. Zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\intercal$ wegen

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein zugehöriger Eigenvektor, diesen haben wir gleich normiert. Entsprechend sind wegen

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die beiden Vektoren $f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\intercal$ und $f_3 = (0,1,0)^\intercal$ Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 0$. Man beachte, dass diese bereits orthonormiert gewählt sind und $a^\intercal f_2 = a^\intercal f_3 = 0$ gilt. D.h. die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert A und die Quadrik hat nach Transformation in das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (\mathbf{0}; f_1, f_2, f_3)$ mit $y = F^\intercal x$ die Gestalt

$$-y_1^2 - 4\sqrt{2}y_1 + 1 = 0.$$

Quadratisches Ergänzen liefert

$$\begin{aligned} -y_1^2 - 4\sqrt{2}y_1 - 1 &= -\left(y_1^2 + 4\sqrt{2}y_1 + 8\right) + 8 - 1 \\ &= -\left(y_1 + 2\sqrt{2}\right)^2 + 7. \end{aligned}$$

Aus der Darstellung $-(y_1 + 2\sqrt{2})^2 + 7 = 0$ erhalten wir also die beiden Ebenengleichungen

$$y_1 = \sqrt{7} - 2\sqrt{2}, \qquad \text{bzw.} \qquad y_1 = -\sqrt{7} - 2\sqrt{2}.$$

Mit $x = Fy$ lassen sich diese auch bzgl. der Standardkoordinaten darstellen, dabei erhalten wir

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = \sqrt{7} - 2\sqrt{2} \right\}, \\ E_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = -\sqrt{7} - 2\sqrt{2} \right\}. \end{aligned}$$

Den Ebenendarstellungen im Koordinatensystem $\mathbb{F}$ entnehmen wir, dass E_1 und E_2 den Abstand $2\sqrt{7}$ haben. Dieser ändert sich nicht unter der Koordinatentransformation durch F.

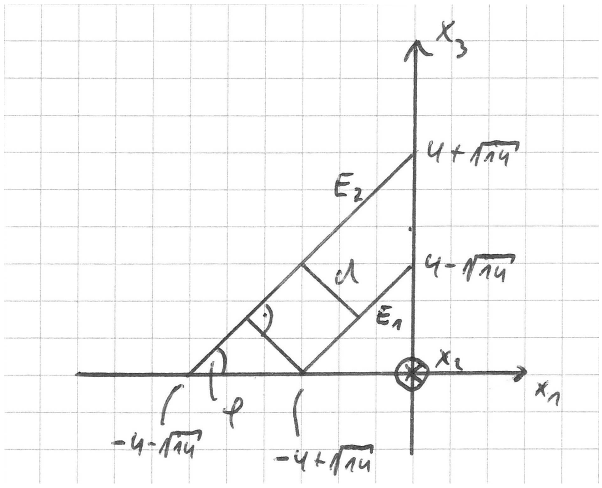
Alternative Lösung: Den Typ der Quadrik kann man auch anhand der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|c} c & a^\intercal \\ \hline a & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & -2 & 0 & 2 \\ \hline -2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

mit $\operatorname{Rg} A = 1$ und$\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = 2 = \operatorname{Rg} A + 1$ bestimmen: $\mathcal{Q}$ ist damit eine Mittelpunktsquadrik. Man sieht sehr schnell, dass A den Eigenwert $\lambda = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 2 hat, die zugehörigen Eigenvektoren sind $(1,0,1)^\intercal$ und $(0,1,0)^\intercal$. Damit ist $\mathcal{Q}$ entweder die leere Menge (kein Punkt), ein paralleles Ebenenpaar oder eine Doppelebene.
Wir bestimmen die Schnittpunkte mit den Achsen in dem wir $x_3 = 0$ bzw. $x_1 = 0$ einsetzen und erhalten die Bedingungen

$$-\frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1 - 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad -\frac{1}{2}x_3^2 + 4x_3 - 1 = 0$$

mit den Lösungen $(-4 \pm \sqrt{14}, x_2, 0)^\intercal$ bzw. $(0, x_2, 4 \pm \sqrt{14})$. Insbesondere hängt die Gleichung, welche $\mathcal{Q}$ beschreibt nicht von x_2 ab, die Ebenen verlaufen also parallel zur x_2-Achse. Die leere Menge als Typ von $\mathcal{Q}$ können wir durch diese Lösungen ebenfalls ausschließen. Zeichnen wir diese Punkte in der x_1-x_3-Ebene so erhalten wir folgendes Bild:



Insbesondere kann $\mathcal{Q}$ auch keine Doppelebene sein. Den Abstand beider Ebenen kann man mit elementarer Geometrie bestimmen. Es ist

$$\tan\varphi = \frac{4-\sqrt{14}}{4-\sqrt{14}} = 1$$

und damit $\varphi = \pi/4$, bzw.

$$d = 2\sqrt{14}\,\sin\varphi = 2\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{7}.$$

Aufgabe H 64. *Spannende Geraden*

Für jedes $\varphi \in [0, 2\pi[$ betrachten wir die Gerade

$$g_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} + (1-t)\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t\in\mathbb{R} \right\}.$$

(a) Jede der Geraden verbindet Punkte zweier Kreislinien miteinander, nämlich

$$K_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi\in[0,2\pi[\right\}, \text{ und } K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi\in[0,2\pi[\right\}.$$

Skizzieren Sie die Geraden für $\varphi \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

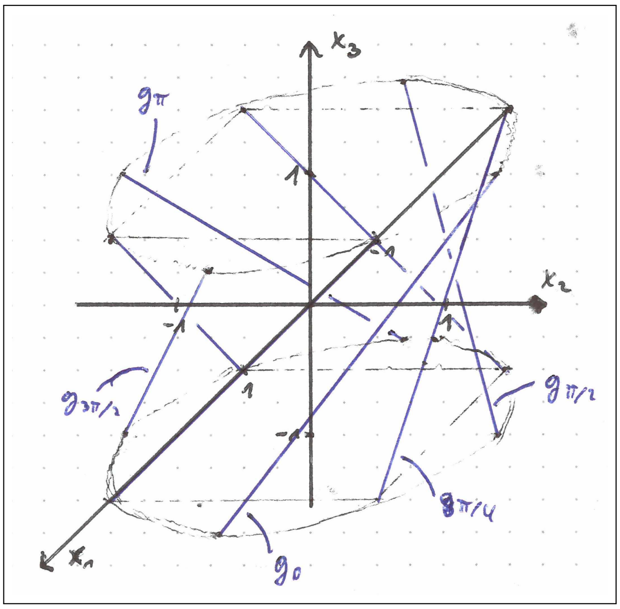
(b) Setzen Sie die Punkte $(x_1, x_2, x_3)^\intercal$ der Geraden g_φ in die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$$

ein. Was fällt auf? Welche Quadrik beschreibt die Gleichung? Schauen Sie sich dazu auch folgendes Video an:
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Videos-LA/hyperboloid-schnurmodell.mp4

Lösungshinweise hierzu:

(a) Als Hilfe kann man sich die beiden Kreise K_{-1} und K_1 sowie deren einbeschriebene Einheitsquadrate zeichnen und erhält dann:



(b) Ist eine der Geraden g_φ gegeben, so erfüllen deren Punkte die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir diese in die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\
&= (\sqrt{2}t\cos\varphi - \sqrt{2}(1-t)\sin\varphi)^2 + (\sqrt{2}t\sin\varphi + \sqrt{2}(1-t)\cos\varphi)^2 - (-t+1-t)^2 \\
&= 2t^2\cos^2\varphi - 4t(1-t)\sin\varphi\cos\varphi + 2(1-t)^2\sin^2\varphi \\
&\quad + 2t^2\sin^2\varphi + 4t(1-t)\sin\varphi\cos\varphi + 2(1-t)^2\cos^2\varphi - (1-2t)^2 \\
&= 2t^2 + 2(1-t)^2 - (1-2t)^2 \\
&= 2t^2 + 2 - 4t + 2t^2 - 1 + 4t - 4t^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit erfüllen alle Punkte von g_φ für beliebiges $\varphi \in [0, 2\pi[$ die Gleichung, die Geraden verlaufen damit auf dem einschaligen Hyperboloid welches durch $x_1^2+x_2^2-x_3^2 = 1$ bzgl. der Standardkoordinaten beschrieben wird. Das spiegelt auch den im Video verschanschaulichten Sachverhalt auf: Das einschalige Hyperboloid entsteht im Schnurmodell, wenn wenn eine Kreisscheibe gegenüber der anderen "verdreht" wird. Man beachte, dass hinsichtlich ihrer Parametrisierungen K_{-1} und K_1 genauso um den Winkel $\pi/4$ zueinander verdreht sind.

Frischhaltebox

Aufgabe H 65.

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, dass $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

(b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Beweis durch vollständige Induktion: Es sei $A(n)$ die Aussage

$$A(n) \; : \qquad \textit{Für alle } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \textit{ gilt } \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

IA Die Aussage $A(1)$ ist wahr. In der Tat ist

$$\left.\sum_{j=0}^{n} q^j\right|_{n=1} = \sum_{j=0}^{1} q^j = 1 + q$$

und

$$\left.\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right|_{n=1} = \frac{q^2-1}{q-1} = q+1$$

für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

IH Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ gelte für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.

IS Wir zeigen: Wenn $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr. Hierfür:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^j + q^{n+1} &\overset{\text{IH}}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\end{aligned}$$

Damit ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Die Aussage folgt aus dem Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

mit $a = 1$ und $b = -1$, d.h. es ist

$$0 = (1-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j.$$

Alternativ kann man die Gleichung auch direkt mit der Rechenregel

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}$$

für $n, j \geqq 1$ nachrechnen. Es ist

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \left[\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \right] + (-1)^n \binom{n}{n} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} + (-1)^n \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \binom{n-1}{j} + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} + (-1)^n \\
&= \underbrace{1-1}_{=0} + \sum_{j=1}^{n-2} [\underbrace{(-1)^{j+1} + (-1)^j}_{=0}] \binom{n-1}{j} + \underbrace{(-1)^{n-1} + (-1)^n}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 66. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

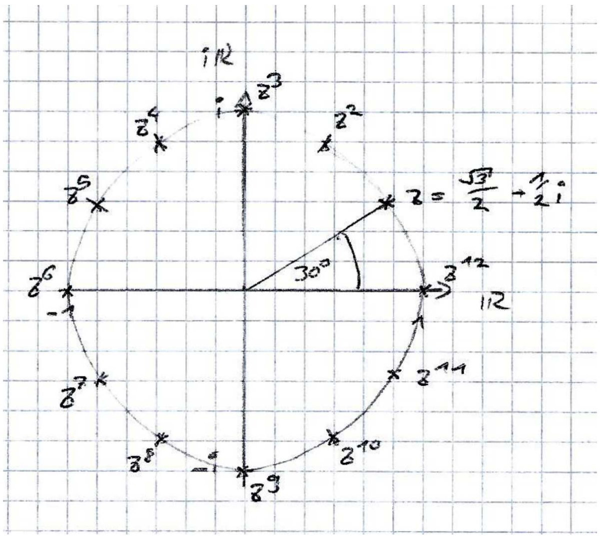
(a) $a_n = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n\right)$ **(b)** $a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k!}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da hier eine komplexe Zahl potenziert wird, lohnt es sich, in Polarkoordinatendarstellung zu wechseln. Es ist

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1 \quad \text{und daher} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Einige Potenzen dieser Zahl sind in der folgenden Skizze abgebildet:



Insbesondere erhalten wir

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n\right) = \operatorname{Re}\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^n\right) = \operatorname{Re}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 12k, k\in\mathbb{N} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{falls } n = 12k+1, k\in\mathbb{N} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } n = 12k+2, k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } n = 12k+3, k\in\mathbb{N} \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } n = 12k+4, k\in\mathbb{N} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{falls } n = 12k+5, k\in\mathbb{N} \\ -1 & \text{falls } n = 12k+6, k\in\mathbb{N} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{falls } n = 12k+7, k\in\mathbb{N} \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } n = 12k+8, k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } n = 12k+9, k\in\mathbb{N} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } n = 12k+10, k\in\mathbb{N} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{falls } n = 12k+11, k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Da jeder der Werte $0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ unendlich oft angenommen wird, sind das Häufungspunkte der Folge. Da wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oben vollständig in Teilfolgen zerlegt haben, gibt es auch keine weiteren Häufungspunkte.

(b) Es gilt

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_{n^2} - S_n,$$

wobei $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ genau die Folgenglieder der Folge der Partialsummen der Exponentialreihe bilden. Wir wissen bereits dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen e konvergiert. Die Folge $(S_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ bildet eine Teilfolge dieser konvergenten Folge und muss daher gegen den selben Grenzwert konvergieren. Insbesondere konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathrm{e}-\mathrm{e} = 0$ und 0 ist dann auch der einzige Häufungspunkt.

Alternativ kann man beispielsweise auch sehen, dass für $n \geqq 3$ gilt:

$$|a_n - 0| = \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k!} \leqq \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{n!} = \frac{n^2 - (n+1) + 1}{n!} = \frac{n(n-1)}{(n-2)!(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)!} \to 0$$

für $n \to \infty$. Damit konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Bemerkung: Für das Folgenglied $a_1 = \sum_{k=1+1}^{1^2} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{1} \frac{1}{k!}$ ist die Summation leer, und bekommt deswegen den Wert $a_1 = 0$ zugewiesen.

Streng formal lässt sich die Summenschreibweise durch eine Vorschrift der folgenden Art definieren: *Für $\sum_{k=a}^{b} x_k$ bildet man zuerst die Menge $B := \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, a \leqq k \leqq b\right\}$ aller ganzen Zahlen, die mindestens so groß wie a und höchstens so groß wie b sind. Dann addiert man alle x_k mit $k \in B$.*
Wenn $a > b$ ist, wird die Menge B leer, und es gibt nichts zu summieren: Solchen Summen gibt man sinnvollerweise den Wert 0; nach dem Prinzip *"nichts addieren sollte nichts ändern, und 0 dazu addieren ändert auch nichts"*.

Analog setzt man das Produkt $\prod_{k=a}^{b} x_k$ gleich 1, wenn es nichts zu multiplizieren gibt (wenn also die Menge $B := \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, a \leqq k \leqq b\right\}$ leer ist) nach dem Prinzip *"nichts multiplizieren sollte nichts ändern, und 1 dazu multiplizieren ändert auch nichts"*.

Aufgabe H 67. *Sandwichsatz*

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes die Grenzwerte der folgenden Folgen:

(i) $\left(\sqrt[n]{2^n + 5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(ii)** $\left(\dfrac{1}{n + n! - 2^n - \frac{1}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(iii)** $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen 0 konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen 0 konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion gilt

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leqq \sqrt[n]{2^n + 5^n} \leqq \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ folgt mit dem Sandwichsatz aus obiger Ungleichung $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n} = 5$.

(ii) Nach Aufgabe **P 7** gilt
$$n! > 2^n \quad \text{für alle} \quad n \geqq 4$$
womit sich die folgende Abschätzung ergibt:
$$n + n! - 2^n - \frac{1}{2} > n - \frac{1}{2} > 0 \quad \text{für alle} \quad n \geqq 4.$$
Insbesondere folgt daraus $\frac{1}{n+n!-2^n-\frac{1}{2}} > 0$, und wir erhalten insgesamt
$$0 < \frac{1}{n + n! - 2^n - \frac{1}{2}} < \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \quad \text{für alle} \quad n \geqq 4.$$
Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} = 0$ folgt mit dem Sandwichsatz aus obiger Ungleichung $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+n!-2^n-\frac{1}{2}} = 0$.

(iii) Es gilt
$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Mit dem Sandwichsatz folgt daher $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} = 0$.

(b) Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es Konstanten $S, s \in \mathbb{R}$ mit $s \leqq a_n \leqq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt auch
$$s|b_n| \leqq a_n|b_n| \leqq S|b_n| \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ist natürlich auch $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir können deswegen den Sandwichsatz benutzen und folgern $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot |b_n| = 0$. Wegen
$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| = |a_n \cdot |b_n| - 0| \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$
liefert dies auch $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Aufgabe H 68. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$.

(a) $a_n = \dfrac{n^2 - 5}{4n^2}$

(b) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4 \left(\frac{1}{5}\right)^k$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist
$$a_n = \frac{n^2 - 5}{4n^2} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4n^2}.$$
Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$. Es ist
$$\left| a_n - \frac{1}{4} \right| \overset{!}{<} 10^{-10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{4n^2} < 10^{-10} \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{5}{4} \cdot 10^{10}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 10^5.$$
Da $\sqrt{5} < \sqrt{16} = 4$, ist zum Beispiel $n_\varepsilon = 2 \cdot 10^5$ eine geeignete Wahl.

(b) Es ist nach der geometrischen Summenformel

$$a_n = 4\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k = 4\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = 4\cdot\frac{5-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{4} = 5-\left(\frac{1}{5}\right)^n .$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} |a_n-5| \overset{!}{<} 10^{-10} \quad &\Leftrightarrow \quad 5^{-n} < 10^{-10} = \quad \Leftrightarrow \quad 10^{10} < 5^n \quad \Leftrightarrow \quad 10\ln(10) < n\ln(5) \\ &\Leftrightarrow \quad n > 10\frac{\ln(10)}{\ln(5)} = 10\frac{\ln(2)+\ln(5)}{\ln(5)} = 10\left(\frac{\ln(2)}{\ln(5)}+1\right). \end{aligned}$$

Aus $2=\sqrt{4}<\sqrt{5}$ ergibt sich $\ln(2)<\frac{1}{2}\ln(5)$ und wir erhalten $\frac{\ln(2)}{\ln(5)}+1<\frac{3}{2}$. Damit können wir zum Beispiel $n_\varepsilon = 15$ wählen.

Aufgabe H 69. *Grenzwerte für Folgen von Matrizen*

Analog zum Betrag für reelle Zahlen kann man durch $\|A\| := \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|a_{k\ell}|$ eine Norm für Matrizen $A=(a_{k\ell})\in\mathbb{R}^{m\times m}$ definieren. Eine Folge von Matrizen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt dann konvergent gegen den Grenzwert $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$, falls es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ gibt mit $\|A_n-A\|<\varepsilon$ für alle $n>n_\varepsilon$.

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert A der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt[n]{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{n} \\ 1 & \frac{2n+1}{n+1} & \frac{1}{n^2}+\sqrt[n]{5} \end{pmatrix}$.

(b) Seien A und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in **(a)**. Bestimmen Sie $\operatorname{Sp}(A)$, $\det(A)$, $\operatorname{Rg}(A)$, sowie die Grenzwerte der Folgen

$$\big(\operatorname{Sp}(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \big(\det(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \big(\operatorname{Rg}(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die einzelnen Einträge von A_n sind unabhängig von n oder bilden leichte Modifikationen von bekannten Folgen mit den nachstehenden Grenzwerten:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1, \quad \lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\sqrt[n]{5}=1.$$

Wir vermuten daher, dass

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

der Grenzwert der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Um dies zu beweisen berechnen wir die Norm

$$\begin{aligned} \|A_n-A\| &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt[n]{5}-1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{2n+1}{n+1}-2 & \frac{1}{n^2}+\sqrt[n]{5}-1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= |\sqrt[n]{5}-1| + \left|-\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| + \left|\frac{1}{n^2}+\sqrt[n]{5}-1\right| \end{aligned}$$

und beobachten, dass jeder Summand in dem letzten Ausdruck gegen 0 konvergiert für $n\to\infty$. Insbesondere finden wir also zu jedem $\varepsilon>0$ Zahlen $n_{\varepsilon 1},\dots,n_{\varepsilon 4}\in\mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |\sqrt[n]{5}-1| &< \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } n>n_{\varepsilon 1}, & \left|-\frac{1}{n}\right| &< \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } n>n_{\varepsilon 2}, \\ \left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| &< \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } n>n_{\varepsilon 3}, & \left|\frac{1}{n^2}+\sqrt[n]{5}-1\right| &< \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } n>n_{\varepsilon 4}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\|A_n - A\| = |\sqrt[n]{5} - 1| + \left| -\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| + \left|\frac{1}{n^2} + \sqrt[n]{5} - 1\right| < \varepsilon$$

für alle $n > \max\{n_{\varepsilon 1}, n_{\varepsilon 2}, n_{\varepsilon 3}, n_{\varepsilon 4}\}$.

(b) Es gelten

$$\mathrm{Sp}(A) = 3 \text{ und } \mathrm{Sp}(A_n) = 2 + \frac{1}{n^2} + \sqrt[n]{5} \to 2 + 0 + 1 = 3 \text{ für } n \to \infty.$$

Mit Hilfe von wenigen Schritten aus dem Gaußalgorithmus erhalten wir weiter

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) = 2$$

und wegen $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^2+n+1}{n^2(n+1)} \neq 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}(A_n) &= \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt[n]{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{n}\\ 1 & \frac{2n+1}{n+1} & \frac{1}{n^2} + \sqrt[n]{5}\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt[n]{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n^2}\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt[n]{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{n}\\ 0 & 0 & \frac{n^2+n+1}{n^2(n+1)}\end{pmatrix}\right) = 3 \to 3 \text{ für } n \to \infty.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(\lim_{n\to\infty} A_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mathrm{Rg}(A_n)$!
Schließlich folgt aus $\mathrm{Rg}(A) = 2 \neq 3$, dass $\det(A) = 0$ gelten muss. Weiter bekommen wir mit der Regel von Sarrus

$$\det(A_n) = \frac{1}{n^2} + \sqrt[n]{5} - \frac{1}{n} + 0 - \sqrt[n]{5} + \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{2 + \frac{1}{n}}{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

In diesem Fall gilt also wieder $\det(\lim_{n\to\infty} A_n) = \det(A) = \lim_{n\to\infty} \det(A_n)$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 70. *Alles auf einmal?!*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} e_2(A) & e_1(A) & -\mathrm{Rg}(A)\\ \chi_A(1) & -\mathrm{Sp}(A) & \mathrm{Rg}(-A)\\ -d_2(A) & -2d_1(A) & \frac{3}{2}\det(A)\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}|b|\\ 8\\ -|b|\end{pmatrix} \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet $e_\lambda(A)$ die algebraische und $d_\lambda(A)$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ von A.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst beobachten wir folgendes:

- Da A eine dreieckige Matrix ist, können wir die algebraischen Vielfachheiten einfach ablesen: $e_2(A) = 1$, $e_1(A) = 2$.
- Da A eine dreieckige 3×3 Matrix ist und kein Diagonaleintrag Null ist, gilt $\operatorname{Rg}(A) = 3$. Außerdem gilt immer $\operatorname{Rg}(-A) = \operatorname{Rg}(A)$.
- Die Spur von A ist die Summe der Diagonaleinträge, also $\operatorname{Sp}(A) = 4$.
- Da A eine dreieckige Matrix ist, ist ihre Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, also $\det(A) = 2$.
- Da $1 \leqq d_2(A) \leqq e_2(A) = 1$ ist, muss $d_2(A) = 1$ sein. Weiter sieht man schnell, dass $\operatorname{Rg}(A - 1 \cdot \mathrm{E}_3) = 2$ ist, woraus $d_1(A) = 1$ folgt.
- Da 1 ein Eigenwert von A ist, muss charakteristische Polynom χ_A an dieser Stelle verschwinden, also $\chi_A(1) = 0$.
- Schließlich gilt $|b| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

Damit erhalten wir also das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden dann die erweiterte Koeffizientenmatrix und führen den Gaußalgorithmus durch:

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right] \\
Z_3 + Z_1 : \;&\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
Z_1 + \tfrac{1}{2} Z_2 : \;&\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
Z_2 \cdot (-\tfrac{1}{4}) : \;&\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Daraus bekommen wir die Lösungsmenge mit 3.7.6:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$