Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

Zu Aufgabe H1:

(a) Es gilt

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2(2+(-1)^k)}{2^k}\right|} = \frac{1}{2},$$

d. h. die Reihe ist konvergent nach dem Wurzel-Kriterium. Aufgrund des alternierenden Terms $2+(-1)^k$ läßt sich mit dem Quotienten-Kriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe gewinnen.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1})} \\ &= \frac{1}{2(k+1)}\end{aligned}$$

und nach dem Minoranten-Kriterium die Reihe also divergent.

(c) Mit der Abschätzung

$$\frac{1}{k^2-k} \leqq \frac{2}{k^2} \iff k^2 \leqq 2k^2-2k \iff 2 \leqq k$$

ist die Reihe nach dem Majoranten-Kriterium absolut konvergent.

(d) Wegen

$$\lim_{k\to+\infty}(1-\cos(1/k)) = 0$$

bilden die

$$\frac{1}{1-\cos(1/k)}$$

keine Nullfolge, die Reihe ist also divergent.

(e) Es ist

$$\frac{1}{(3k+1)(3k-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$$

und damit

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k-2)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{3k-2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3k+1}}_{=0} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

Zu Aufgabe H2: Wir zeigen zuerst, dass die Funktion f an der Stelle 1 unstetig ist. Dazu verwenden wir die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k := 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k := 1 + \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt $\lim_{k\to+\infty} x_k = 1 = \lim_{k\to+\infty} y_k$. Die beiden Folgen besitzen also denselben Grenzwert. Wäre nun f an der Stelle 1 stetig, so müsste $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \lim_{k\to+\infty} f(y_k)$ gelten. Die Folge der x_k ist konstant, also gilt $f(x_k) = f(1) = 42$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = 42$.

Andererseits ist $f(y_k) = f(1 + \frac{1}{k}) = \ldots = \frac{2}{k} + 3$, damit $\lim_{k\to+\infty} f(y_k) = 3$ und folglich $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) \neq \lim_{k\to+\infty} f(y_k)$. Die Funktion f ist also an der Stelle 1 nicht stetig.

Für die Stelle -1 können wir zeigen, dass f stetig ist. Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen nun ein δ finden – das durchaus von dem gegebenen ε abhängt –, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - (-1)| < \delta$ auch $|f(x) - f(-1)| < \varepsilon$ gilt. Wir wählen $\delta := \frac{1}{2}\varepsilon$. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - (-1)| < \delta$ gilt dann

$$|f(x) - f(-1)| = \ldots = |2x + 2| = 2\,|x + 1| < 2\delta = \varepsilon\,.$$

Also ist f an der Stelle -1 stetig.

Analog zeigt man, dass f auch an der Stelle 0 stetig ist.

Zu Aufgabe H3: An dieser Stelle sollte der Hinweis auf „Mathematik Online“ genügen
`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs1/seite63.html`

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

Zu Aufgabe H4: In beiden Fällen greift für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ die Abschätzung $\sin x < x < \tan x$ aus der Vorlesung. Es gilt sicherlich $\frac{1}{k} < \frac{\pi}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(a) Mit obiger Vorüberlegung gilt $\frac{1}{k} < \tan \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit sind alle Partialsummen der zu untersuchenden Reihe echt größer als die entsprechenden Partialsummen der harmonischen Reihe. Demnach divergiert nach dem Minorantenkriterium die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k}$.

(b) Aus $\sin x < x$ folgt $\left(\sin \frac{1}{k}\right)^2 < \left(\frac{1}{k}\right)^2$. Mit dem Majorantenkriterium und der Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k}\right)^2 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ergibt sich die Konvergenz der zu untersuchenden Reihe.

Zu Aufgabe H5:

(a) Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

Alternativ: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \cdot 1 = 1$.

(b) Eine vorausgehende Betrachtung der Verhältnisse führt zu der Vermutung $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, denn $-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} -\infty$ und $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.

Diese Vermutung gilt es nun zu beweisen. Es ist $e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{(-x)^2}}$, also reicht es aus, $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ zu untersuchen. Weiter ist aus der Vorlesung bekannt

$$\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to +\infty} e^{-t^2}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für Konvergenzuntersuchungen reicht es, sich auf „kleine" ε zu beschränken. Deshalb sei zusätzlich $\varepsilon < 1$ gefordert. Bekanntlich gilt: $a < b$ impliziert $e^{-b} < e^{-a}$ und $0 < c < d$ impliziert $c^2 < d^2$. Für $s := \sqrt{-\ln \varepsilon}$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < s < t$ ergibt sich:

$$\left|e^{-t^2} - 0\right| < \left|e^{-s^2} - 0\right| = \left|e^{\ln \varepsilon}\right| = \varepsilon$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

(c) Laut Vorlesung gilt: $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Für $\varepsilon := \frac{1}{2}$ gibt es denmach ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in U := U_\delta(0) \cap \mathbb{R}^+$ gilt: $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{1}{2}$. Für $x \in U$ ist weiterhin $\frac{\sin x}{x} < 1$ und folglich auch $\frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2}$; deswegen gilt die Abschätzung:

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}\,.$$

Mit $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = +\infty$ folgt somit $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x^2} = +\infty$.
Aus der Vorlesung ist bekannt:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{t\to x_0+0} f(2x_0 - t)\,.$$

Dies liefert:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{t\to 0+0} \frac{\sin(-t)}{(-t)^2} = \lim_{t\to 0+0} -\frac{\sin t}{t^2} = -\infty\,.$$

(d) In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{\tan t}{t} = 1\,.$$

Unter Verwendung der Grenzwertsätze für Funktionen ergibt sich:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x \tan \frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0+0} \left(\left(\tfrac{1}{t}\right) \tan \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)}\right) = \lim_{t\to 0+0} \frac{\tan t}{t} = 1\,.$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

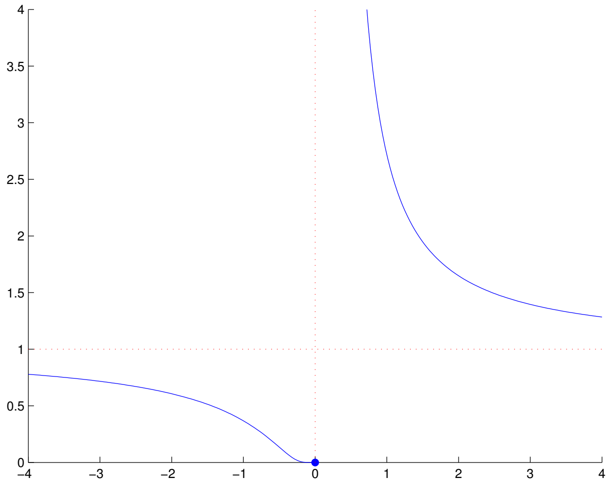
Prof. Dr. M. Stroppel

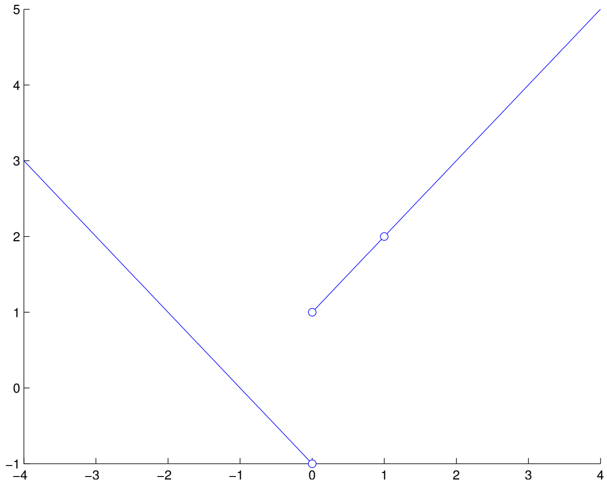
Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

Zu Aufgabe H6:

(a)





(b) Es ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(c) Für beide Funktionen ist der Abschluss des Definitionsbereichs jeweils die Menge der reellen Zahlen.

(d) Die Exponentialfunktion und rationale Funktionen sind stetig. Die Funktionen f und g sind als Verkettung solcher Funktionen stetig.

(e) Die Funktion f lässt sich bei $x = 0$ mit $f(0) = 0$ nur linksseitig stetig fortsetzen, da $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$ ist.

Die Funktion g lässt sich bei $x = 1$ mit $g(1) = 2$ stetig fortsetzen. Bei $x = 0$ kann dies wahlweise linksseitig mit $g(0) = -1$ oder rechtsseitig mit $g(0) = 1$ geschehen.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

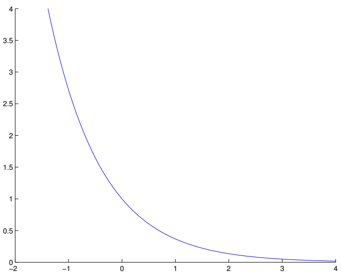
Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

Zu Aufgabe H7:

(a) Wie bei der Exponentialfunktion ist für f der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und der Wertebereich $W = \mathbb{R}^+$.

(b)



(c) Die Potenzreihe von e^x liefert für f um den Entwicklungspunkt 0 die Potenzreihe

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \,,$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dieser Konvergenzradius lässt sich wahlweise mit dem Quotienten- oder mit dem Wurzelkriterium bestimmen.

(d) Aus der Potenzreihe erhält man für $x = 1$ die alternierende Reihe

$$\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

mit $a_k = \frac{1}{k!}$. Die ersten Glieder der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sind dabei

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1/6,\ a_4 = 1/24,\ a_5 = 1/120,\ a_6 = 1/720.$$

Diese Folge ist eine monoton fallende Nullfolge und mit dem Leibnizkriterium gilt somit

$$\left| \frac{1}{e} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leqq |a_{n+1}| \,.$$

Speziell ergibt sich

$$\frac{1}{e} \approx \sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = \frac{11}{30} = 0{,}3\bar{6}$$

mit

$$\left| \frac{1}{e} - \frac{11}{30} \right| \leqq \frac{1}{720} = 0{,}0013\bar{8} \,.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H8:

(a) Das Quotientenkriterium liefert $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\left|(k+1)^2\right|}{|k^2|} = 1$ und damit den Konvergenzradius $\rho = 1$.

(b) Das Wurzelkriterium liefert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^k} = 2$ und damit den Konvergenzradius $\rho = 1/2$.

(c) Das Wurzelkriterium liefert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^k} = \infty$ und damit den Konvergenzradius $\rho = 0$.

(d) Das Wurzelkriterium liefert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = 0$ und damit den Konvergenzradius $\rho = \infty$.

Zu Aufgabe H9:

(a) Nach der *Formel von Euler und de Moivre* ist $e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ und damit gilt $e^{-\mathrm{i}z} = \cos(-z) + \mathrm{i}\sin(-z) = \cos(z) - \mathrm{i}\sin(z)$. Daraus folgt

$$\frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} = \frac{\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) + \cos(z) - \mathrm{i}\sin(z)}{2} = \cos(z)$$

und

$$\frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) - \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)}{2\mathrm{i}} = \sin(z)\,.$$

(b) Mit obigen Formeln ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2\mathrm{i}z} + 2 + e^{-2\mathrm{i}z} - e^{2\mathrm{i}z} + 2 - e^{-2\mathrm{i}z}}{4} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

Zu Aufgabe H10: Unter Verwendung von Summen-, Produkt-, Quotienten und Kettenregel ergibt sich:

- $f'(x) = 4(x-1)$
- $g'(x) = x(3x-4)$
- $h'(x) = -\frac{1}{e^x}$
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 3x^2 - 4$
- $(g+h)'(x) = g'(x) + h'(x) = 3x^2 - 4x - \frac{1}{e^x}$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 10x^4 - 32x^3 + 30x^2 - 4x - 4$
- Im Definitionsbereich $\mathbb{R} \smallsetminus \{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\}$ ist
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = -\frac{2(x^2-2x+2)}{(x^2-x-1)^2}$$
- $(f \cdot h)'(x) = -2\,\dfrac{x^2-4x+3}{e^x}$
- $\left(\dfrac{g}{h}\right)'(x) = e^x(x^3 + x^2 - 4x + 1)$
- $(f \circ h)'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = -4\,\dfrac{1-e^x}{e^{2x}}$
- Im Definitionsbereich $\mathbb{R} \smallsetminus \{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\}$ ist
$$\left(h \circ \frac{f}{g}\right)'(x) = h'\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \cdot \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = 2\,\frac{x^2-2x+2}{(x^2-x-1)^2}\,e^{\frac{-2(x-1)}{x^2-x-1}}$$

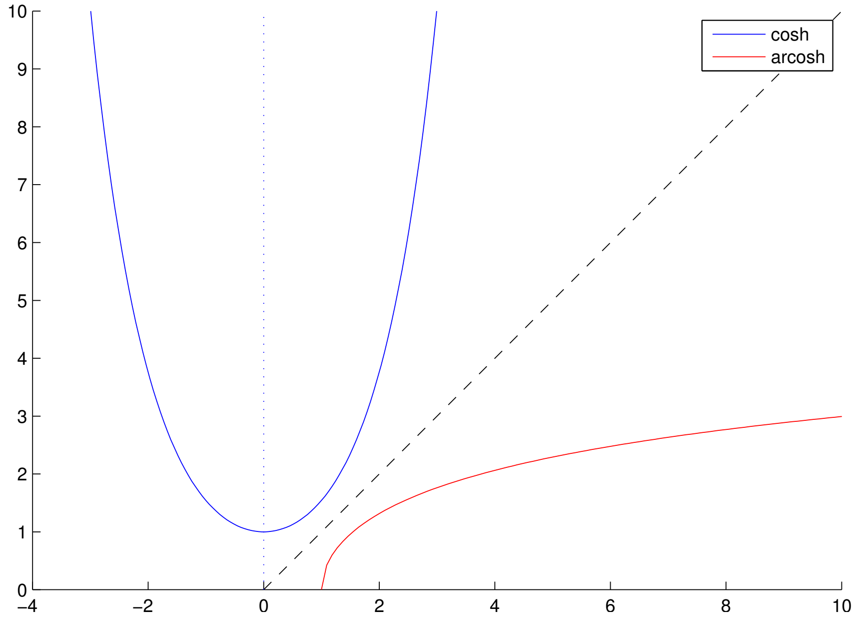
Zu Aufgabe H11:

(a) Es ist für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$

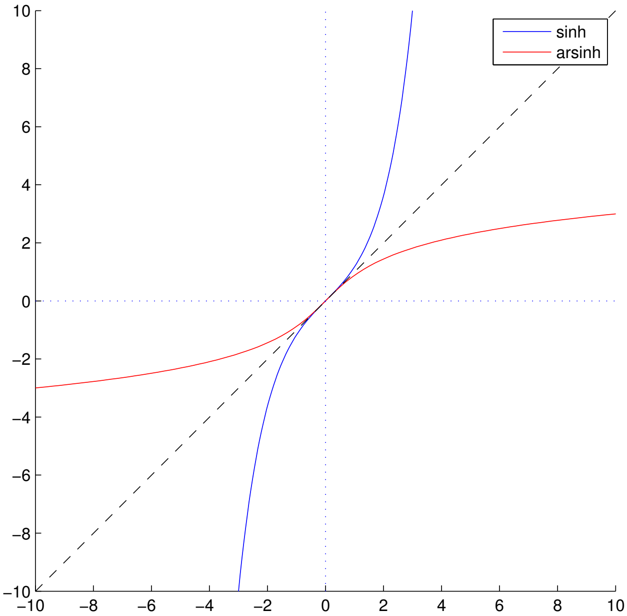
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big|_{x=x_0} = \sinh(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big|_{x=x_0} = \cosh(x_0)\,.$$

(b) Die Funktion $\cosh$ ist auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton und stetig mit dem Wertebereich $[1, \infty)$, deshalb existiert die Umkehrfunktion arcosh auf $[1, \infty)$ mit dem Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$.



Die Funktion $\sinh$ ist auf gesamt $\mathbb{R}$ streng monoton und stetig mit dem Wertebereich $\mathbb{R}$, deshalb existiert die Umkehrfunktion arsinh ebenfalls auf gesamt $\mathbb{R}$ mit dem Wertebereich $\mathbb{R}$.



(c) Aufgabe P 10 hat gezeigt

$$(\cosh(y))^2 - (\sinh(y))^2 = 1$$

also auch

$$(\sinh(y))^2 = (\cosh(y))^2 - 1$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Ist nun $y \in \mathbb{R}_0^+$, so folgt $\sinh(y) \in \mathbb{R}_0^+$, also erhält man in diesen Fällen

$$\sinh(y) = \sqrt{(\cosh(y))^2 - 1}\,.$$

Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion liefert dies

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}(x)\bigg|_{x=x_0} &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cosh(y)\Big|_{y=\operatorname{arcosh}(x_0)}} = \frac{1}{\sinh(y)|_{y=\operatorname{arcosh}(x_0)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\cosh(y))^2-1}\Big|_{y=\operatorname{arcosh}(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2-1}}\,.\end{aligned}$$

Da $\cosh(y) \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ergibt sich aus obigem Additionstheorem

$$\cosh(y) = \sqrt{(\sinh(y))^2 + 1}\,.$$

Wieder liefert die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)\bigg|_{x=x_0} &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sinh(y)\Big|_{y=\operatorname{arsinh}(x_0)}} = \frac{1}{\cosh(y)|_{y=\operatorname{arsinh}(x_0)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\sinh(y))^2+1}\Big|_{y=\operatorname{arsinh}(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\,.\end{aligned}$$

(d) Für $y \in [1, \infty)$ erhält man aus

$$y = \cosh(x) = \frac{e^x + 1/e^x}{2}$$

durch die Substitution $\tilde{x} := e^x$ und nach Multiplikation mit $\tilde{x}$

$$\tilde{x}y = \frac{\tilde{x}^2+1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\tilde{x}^2 - y\tilde{x} + \frac{1}{2} = 0$$

Letztere Gleichung lässt sich mit der Mitternachtsformel lösen. Es ergeben sich Lösungen

$$\tilde{x} = \frac{y + \sqrt{y^2-1}}{1} \quad \text{oder} \quad \tilde{x} = \frac{y - \sqrt{y^2-1}}{1}$$

Anhand des Schaubilds erkennt man, dass nur die erste Lösung im Betracht kommt und somit ist

$$x = \operatorname{arcosh}(y) = \ln(\tilde{x}) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) .$$

Entsprechend erhält man für beliebige $y \in \mathbb{R}$ aus

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - 1/e^x}{2}$$

durch die Substitution $\tilde{x} = e^x$ und nach Multiplikation mit $\tilde{x}$

$$\tilde{x}y = \frac{\tilde{x}^2 - 1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\tilde{x}^2 - y\tilde{x} - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Wieder erhält man Lösungen

$$\tilde{x} = \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{1} \quad \text{oder} \quad \tilde{x} = \frac{y - \sqrt{y^2 + 1}}{1}\,.$$

Wie oben erkennt man anhand des Schaubilds, dass nur die erste Lösung zu berücksichtigen ist, und somit ergibt sich

$$x = \operatorname{arsinh}(y) = \ln(\tilde{x}) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) .$$

(e) Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\bigg|_{x=x_0} = \frac{1 + \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2-1}}}{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x)\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\bigg|_{x=x_0} = \frac{1 + \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2+1}}}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}}\,.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 12 Es berechnet sich das Volumen V der Dose durch $V = \pi r^2 h$, wobei $r \in \mathbb{R}_0^+$ der Radius und $h \in \mathbb{R}_0^+$ die Höhe der Dose ist. Aus dieser Beziehung ergibt sich $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

(a) Die Oberfläche O der Dose berechnet sich durch $O = 2D + M = 2\pi(r^2 + rh)$, wobei D die Oberfläche eines Deckels ist und M die Mantelfläche. Mit der obigen Formel für h ergibt sich also $O = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$.
Die Oberfläche soll minimert werden, also ist das globale Minimum der Funktion

$$o\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon r \mapsto 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$$

zu suchen. Für die ersten beiden Ableitungen von o berechnet man

$$o'(r) = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) \quad \text{und} \quad o''(r) = 4\left(\pi + \frac{V}{r^3}\right) .$$

Um die lokalen Extrema zu bestimmen, ist es nötig, die Nullstellen der ersten Ableitung o' zu finden. Es ist $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ die einzige Nullstelle von o'. Da $o''(r_0) > 0$ liegt an der Stelle r_0 in der Tat ein lokaler und insgesamt ein globaler Tiefpunkt vor. Die Höhe der so optimierten Dose ist dann $h_0 = \frac{V^3 \sqrt[3]{2\pi}}{\pi \sqrt[3]{V}}$.

(b) Die Mantelfläche wird durch $M = 2\pi r h = 2\frac{V}{r}$ berechnet. Gesucht ist also das Minimum der Funktion

$$m\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon r \mapsto 2\frac{V}{r} .$$

Es gilt $m'(r) = -2\frac{V}{r^2}$. Da aber m' keine Nullstellen besitzt, gibt es keine lokalen Extrema. Anderseits gilt $\lim\limits_{r\to 0+0} m(r) = +\infty$ und $\lim\limits_{r\to+\infty} m(r) = 0$. Fazit: Je größer der Radius der Dose wird, desto kleiner wird auch die Mantelfäche. Dieses Problem hat also keine vernünftig praktisch umsetzbare Lösung.

(c) Unter Beibehaltung der Bezeichnung h für die innere Höhe der Dose, die das enthaltene Volumen bestimmt, ergibt sich für die Höhe h_ε der Mantelfläche nun $h_\varepsilon = h + 2\varepsilon$ (der Versatz ist jeweils für den oberen und den unteren Deckel angesetzt; qualitativ ändert sich an dem Problem aber nichts, wenn man den Versatz einfach statt doppelt ansetzt). Die Oberfläche setzt sich damit zusammen aus den beiden Deckeln D, der Mantelfläche M sowie den beiden Rändern an der Innenseite R, also

$$O = 2D + M + 2R = 2\pi r^2 + 2\pi r h_\varepsilon + 2\cdot 2\pi r\varepsilon = 2\pi\left(r^2 + 4r\varepsilon + \frac{V}{\pi r}\right) .$$

Zu optimieren ist damit die Funktion

$$o\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon r \mapsto 2\pi\left(r^2 + 4r\varepsilon + \frac{V}{\pi r}\right) .$$

Für die Ableitung berechnet man $o'(r) = 2\pi\left(2r + 4\varepsilon - \frac{V}{\pi r^2}\right)$. Das Nullstellenproblem $o'(r) = 0$ ist nun nicht mehr so einfach zu lösen, aber man kann sich mit einer eingehenden Kurvendikussion der Funktion o' mit Hilfe des Zwischenwertsatzes der Existenz einer Nullstelle r_0 versichern. Dieselbe Kurvendiskussion zeigt dann auch, dass sich an dieser Stelle r_0 das globale Minimum der Funktion o befindet. Dieses modifizierte Problem bleibt also weiterhin lösbar; allerdings ist gegebenenfalls zu einer expliziten Bestimmung der Lösung r_0 ein numerisches Verfahren nötig, wie zum Beispiel die Intervallhalbierungsmethode oder das Newtonverfahren.

Bei der Untersuchung der Mantelfläche spielt es zunächst, was das qualitative Verhalten der Lösung angeht, keine Rolle, ob man den hinzukommenden Rand mit zur Mantelfläche rechnet oder nicht. Lediglich die Zahlenwerte verändern sich. Die folgende Betrachtung untersucht nur die „äußere" Mantelfäche (entsprechend zum Beispiel einem aufzuklebenden Etikett). Demnach ist die Mantelfläche

$$M = 2\pi r h_\varepsilon = 2\pi\left(\frac{V}{\pi r} + 2\varepsilon r\right).$$

Die Funktion

$$m\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon r \mapsto 2\pi\left(\frac{V}{\pi r} + 2\varepsilon r\right)$$

liefert

$$m'(r) = 2\pi\left(-\frac{V}{\pi r^2} + 2\varepsilon\right) \quad \text{und} \quad m''(r) = \frac{2V}{\pi r^3}.$$

Die Ableitung m' besitzt die einzige Nusstelle $r_0 = \sqrt{\frac{V}{2\pi\varepsilon}}$. Diese Nullstelle ist ein lokales Minimum von m, da $m''(r_0) > 0$. Im Intervall $(0, r_0]$ fällt m monoton und in $[r_0, +\infty)$ wächst m monoton. Also ist r_0 das globale Minimum. Im Unterschied zum ursprünglichen Problem ergibt dieses modifizierte Problem eine praktikable Lösung.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

Zu Aufgabe H 13: Da f zweimal stetig differenzierbar ist, existiert eine Umgebung von x_0, in der f' keine und f'' außer x_0 keine weitere Nullstelle besitzt. In dieser Umgebung existiert also die Umkehrfunktion f^{-1} mit den Ableitungen

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

für $y = f(x)$. Für $y_0 = f(x_0)$ ist also

$$(f^{-1})''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3} = 0$$

und da f'' einen Vorzeichenwechsel bei x_0 besitzt, hat auch $(f^{-1})''$ einen Vorzeichenwechsel bei y_0, d. h. f^{-1} hat einen (echten) Wendepunkt bei y_0.

Zu Aufgabe H 14: Nach gliedweiser Differentiation erhält man

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1} \qquad g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, b_k x^{k-1}$$

sowie

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k x^{k-2} & \qquad g''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, b_k x^{k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k & &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, b_{k+2} x^k . \end{aligned}$$

Aus den Differentialgleichungen ergibt sich

$$f(x) + f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}\right) x^k = 0$$

und

$$g(x) + g''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_k + (k+2)(k+1)b_{k+2}\right) x^k = 0$$

und damit die Rekursionsgleichungen

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+1)(k+2)} \qquad b_{k+2} = -\frac{b_k}{(k+1)(k+2)}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

für $k \in \mathbb{N}_0$. Mit den Anfangsbedingungen

$$f(0) = a_0 = 0 \qquad g(0) = b_0 = 1$$
$$f'(0) = a_1 = 1 \qquad g'(0) = b_1 = 0$$

folgt

$$a_{2k} = 0 \qquad b_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$
$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \qquad b_{2k+1} = 0$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, d. h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin(x) \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x)\,,$$

wobei die Potenzreihen jeweils auf gesamt $\mathbb{R}$ konvergieren.

Zu Aufgabe H 15: Aus der Taylorreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

erhält man durch die Substitution $x \to x^2 - 2x$

$$e^{x^2-2x} = 1 + x^2 - 2x + \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{2} + \frac{x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3}{6} + \dots$$

und damit

$$T_3(f, x, 0) = 1 - 2x + 3x^2 - \frac{10}{3}x^3\,.$$

Mit der Taylorreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \dots$$

ergibt sich durch Multiplikation

$$e^x \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + \dots$$

und damit

$$T_3(g, x, 0) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\,.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H16:

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Wegen $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4} = f(x)$ ist f eine gerade Funktion und somit achsensymmetrisch.

Die Funktion ist als Polynom stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Mit einer quadratischen Ergänzung

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}\left(\left(x^2-4\right)^2 - 4^2 + 7\right) = \frac{1}{4}\left(\left(x^2-4\right)^2 - 9\right)$$

ergeben sich die Nullstellen

$$\left(x^2-4\right)^2 = 9 \qquad \iff \qquad x = \pm\sqrt{4 \pm 3} \qquad \iff \qquad x \in \left\{\pm\sqrt{7}, \pm 1\right\} .$$

Als Polynom ist f unendlich oft differenzierbar, und die ersten drei Ableitungen lauten

$$f'(x) = x^3 - 4x\,, \qquad f''(x) = 3x^2 - 4\,, \qquad f'''(x) = 6x\,.$$

Nullstellen der ersten Ableitung sind demnach

$$x^3 - 4x = x(x^2-4) = 0 \qquad \iff \qquad x = 0 \text{ und } x = \pm 2\,.$$

Die zweite Ableitung nimmt an diesen Stellen die Werte

$$f''(-2) = 8, \qquad f''(0) = -4, \qquad f''(2) = 8$$

an, also befindet sich bei $x = \pm 2$ je ein lokales Minimum $(\pm 2,\ -9/4)$ und an $x = 0$ ein lokales Maximum $(0,\ 7/4)$.

Nullstellen der zweiten Ableitung sind

$$3x^2 - 4 = 0 \qquad \iff \qquad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Die dritte Ableitung nimmt an diesen Stellen die Werte

$$f'''\left(-2/\sqrt{3}\right) = -4\sqrt{3}, \qquad f'''\left(2/\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

an. Die Funktion nimmt an diesen Stellen die Werte

$$f(\pm 2/\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\,\frac{16}{9} - 2\frac{4}{3} + \frac{7}{4} = \frac{4}{9} - \frac{8}{3} + \frac{7}{4} = \frac{16 - 96 + 63}{36} = \frac{17}{36}$$

an, also befinden sich Wendepunkte in $\left(-2/\sqrt{3},\ 17/36\right)$ und $\left(2/\sqrt{3},\ 17/36\right)$.

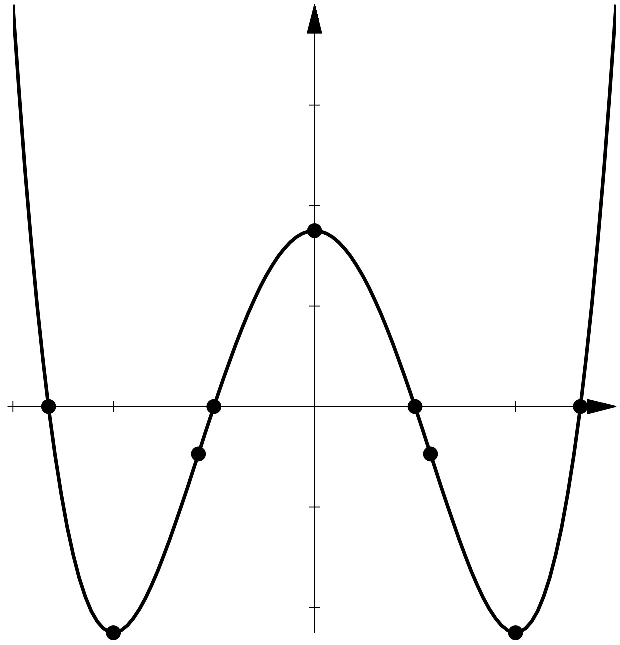
Des weiteren gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



$$g(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x+2} = \frac{x(x^2-2x+1)}{x^2-3x+2} = \frac{x(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = x\,\frac{x-1}{x-2} \qquad x \neq 1$$

Der Definitionsbereich von g ist $D = \mathbb{R} \smallsetminus \{1,2\}$.

Die Nullstelle $x = 0$ lässt sich aus der gekürzten Fassung einfach ablesen, die Stelle $x = 1$ liegt nicht im Definitionsbereich.

Als Quotient von Polynomen ist g in D differenzierbar und besitzt die Ableitungen

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(2x-1)(x-2)-x^2+x}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2} \\ g''(x) &= \frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x^2-4x+2)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x+2)}{(x-2)^3} \\ &= \frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x-4)}{(x-2)^3} = \frac{4}{(x-2)^3}\,. \end{aligned}$$

Die Extremstellen befinden sich also bei

$$0 = g'(x) = \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2} \quad\iff\quad 0 = x^2-4x+2 = (x-2)^2-2 \quad\iff\quad x = 2 \pm \sqrt{2}$$

mit

$$g''(2\pm\sqrt{2}) = \frac{4}{(2\pm\sqrt{2}-2)^3} = \pm\frac{4}{\sqrt{8}} = \pm\sqrt{2}$$

und

$$g(2\pm\sqrt{2}) = \frac{(2\pm\sqrt{2})^2-(2\pm\sqrt{2})}{(2\pm\sqrt{2})-2} = \frac{4\pm4\sqrt{2}+2-2\mp\sqrt{2}}{\pm\sqrt{2}} = \frac{4\pm3\sqrt{2}}{\pm\sqrt{2}} = 3\pm2\sqrt{2}\,.$$

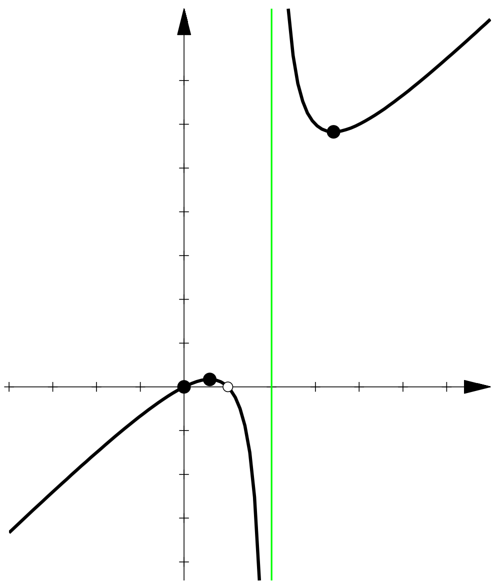
Die Funktion g besitzt also das lokale Maximum $(2-\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$ und das lokale Minimum $(2+\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2})$.

Da $g''(x) \neq 0$ ist, hat g keine Wendepunkte.

Als Grenzwerte der Funktion ergeben sich

$$\begin{array}{rclcrcl}
\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) & = & -\infty & & & & \\
\lim\limits_{x\to1-0} g(x) & = & 0 & & \lim\limits_{x\to1+0} g(x) & = & 0 \\
\lim\limits_{x\to2-0} g(x) & = & -\infty & & \lim\limits_{x\to2+0} g(x) & = & +\infty \\
\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) & = & +\infty & & & &
\end{array}$$

Es gibt also eine senkrechte Asymptote an $x = 2$. Außerdem ist g an $x = 1$ durch $g(1) = 0$ stetig ergänzbar.



$h(x) = \dfrac{x}{2} + \sin(x)$

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$.

Wegen $h(-x) = (-x)/2 + \sin(-x) = -\left(x/2 + \sin(x)\right) = -h(x)$ liegt eine Symmetrie zum Ursprung vor.

h ist als Summe stetiger Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Zur Berechnung der Nullstellen lässt sich zunächst feststellen, dass $h(0) = 0/2 + \sin(0) = 0$ gilt, der Graph von h geht also durch den Ursprung. Aus den Eigenschaften der Sinusfunktion erhält man die Abschätzungen

$$-\sin(x) < 0 < \frac{x}{2} \quad \text{für } x \in (0,\pi] \qquad \text{und} \qquad -\sin(x) \leqq 1 < \frac{x}{2} \quad \text{für } x \in [\pi,\infty)\,.$$

Insgesamt ist also $h(x) > 0$ für $x > 0$ und wegen der Symmetrie ist $h(x) \neq 0$ genau dann, wenn $x \neq 0$. Demnach ist $x = 0$ die einzige Nullstelle.

Die beiden Funktionen, aus denen h zusammengesetzt ist, sind beliebig oft differenzierbar, also gilt dies auch für h.

$$h'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)\,, \qquad h''(x) = -\sin(x)\,, \qquad h'''(x) = -\cos(x)$$

Extrema finden sich also bei

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left\{ 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die zweite Ableitung an diesen Stellen ist

$$h''\left(2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \mp\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

An den Stellen $x = 2\pi k + 2\pi/3$ befinden sich also Hochpunkte, an $x = 2\pi k - 2\pi/3$ befinden sich Tiefpunkte mit den Funktionswerten

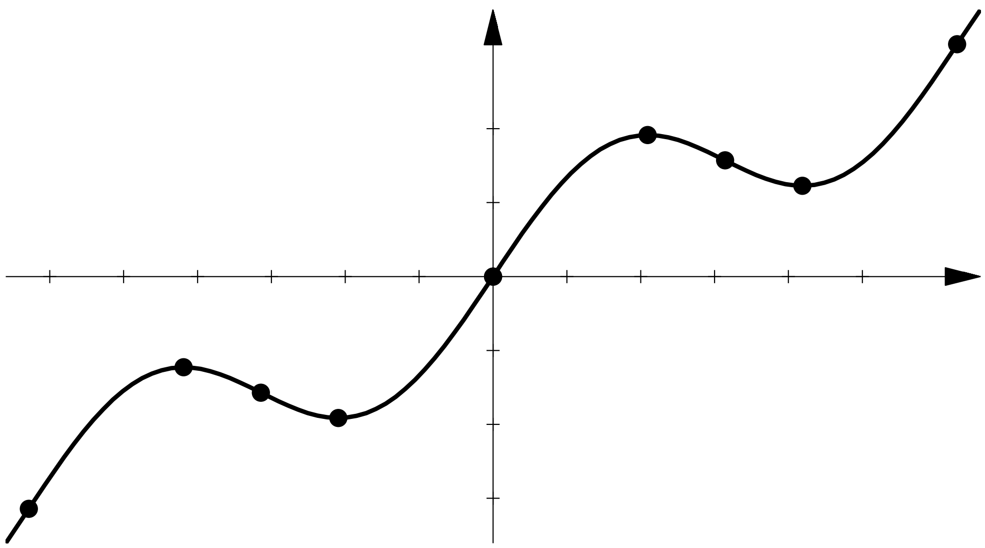
$$h\left(2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \pi k \pm \left(\frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \pi k \pm \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Mit $h''(x) = -\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und $h'''(k\pi) = (-1)^{k+1}$ hat h die Wendepunkte

$$\left\{ \left(k\pi,\ \frac{k\pi}{2}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Abschließend gilt

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty\,.$$



Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

zu Aufgabe H 17 Für geeignete Intervalle $I_1, I_2 \subseteqq \mathbb{R}$ und eine geeignete Substitutionsfunktion $u\colon I_1 \to I_2\colon x \mapsto u(x)$ gilt bekanntlich bei der Integration der Funktion $f\colon I_2 \to \mathbb{R}$ mit der zugehörigen Stammfunktion F:

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = \big[F \circ u\big]$$

(a) Für $f_1\colon u \mapsto e^u$ und die Substitution $u_1\colon x \mapsto 1 - x^2$ erhält man $u_1'(x) = -2x$ und damit

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{u_1}\,\mathrm{d}u_1 = -\frac{1}{2}\int f_1(u)\,\mathrm{d}x \left[-\frac{1}{2}e^{u_1}\right] = \left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right].$$

(b) Für $f_2\colon u \mapsto e^u$ und die Substitution $u_2\colon x \mapsto \sin(x)$ erhält man $u_2'(x) = \cos(x)$ und damit

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int e^{u_2}\,\mathrm{d}u_2 = [e^{u_2}] = \big[e^{\sin(x)}\big].$$

(c) Für $f_3\colon u \mapsto u^n$ und die Substitution $u_3\colon x \mapsto \ln(x)$ erhält man $u_3'(x) = \frac{1}{x}$ und damit

$$\int \frac{\big(\ln(x)\big)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \int u_3^n\,\mathrm{d}u_3 = \left[\frac{1}{n+1}u_3^{n+1}\right] = \left[\frac{1}{n+1}\big(\ln(x)\big)^{n+1}\right].$$

(d) Für $f_4\colon u \mapsto \cos(u)$ und die Substitution $u_4\colon x \mapsto x^2$ erhält man $u_4'(x) = 2x$ und damit

$$\int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos(u_4)\,\mathrm{d}u_4 = \left[\frac{1}{2}\sin(u_4)\right] = \left[\frac{1}{2}\sin(x^2)\right].$$

zu Aufgabe H 18

(a) Mit partieller Integration für den Ansatz $u'(x) = 1$ und $v(x) = f(x)$ folgt $u(x) = x$ und $v'(x) = f'(x)$ und man erhält:

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[u(x)v(x)\big] - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[xf(x)\big] - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

(b) Mit obiger Formel erhält man

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \big[x\ln(x)\big] - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[x\ln(x) - x\big]\,.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= \big[x\arctan(x)\big] - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\,,\end{aligned}$$

da der letzte Integrand von der Form $f'(x)/f(x)$ ist.
Schließlich ist mit Aufgabe P 20:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= \big[x\arcsin(x)\big] + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right]\,.\end{aligned}$$

zu Aufgabe H 19

(a) Mit partieller Integration für den Ansatz $f'(x) = \cos(x)$ und $g(x) = x$ erhält man $f(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = 1$ und somit ist:

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \big[x\sin(x)\big]_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \big[\cos(x)\big]_{x=0}^{\pi} = -2\,.$$

(b) Mit partieller Integration für den Ansatz $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2$ erhält man $f(x) = -\cos(x)$ und $g'(x) = 2x$ und somit ist:

$$\int_0^\pi x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x = \big[-x^2\cos(x)\big]_{x=0}^{\pi} + 2\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \pi^2 - 4$$

unter Verwendung des obigen Ergebnises.

(c) Mit partieller Integration für den Ansatz $f'(x) = \sqrt{x-1}$ und $g(x) = x$ erhält man $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ und $g'(x) = 1$ und somit ist:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_{x=1}^{2} - \frac{2}{3}\int_1^2 (x-1)^{3/2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}\right]_{x=1}^{2} = \frac{16}{15}\,.\end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

zu Aufgabe H 20

(a)

$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \big[x - \ln|x+1|\big]\,.$$

(b)

$$\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]\,.$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \big[\ln|x|\big] - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)\right]\,.\end{aligned}$$

(d) Mit der Substitution $u\colon x \mapsto x^2$ erhält man $u'(x) = 2x$ und damit

$$\begin{aligned}\int \frac{12x^5}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = 6\int \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \big[6\arctan(u)\big] - 3\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \left[\frac{3u}{1+u^2}\right] = \left[3\arctan(u) - \frac{3u}{1+u^2}\right] \\ &= \left[3\arctan(x^2) - \frac{3x^2}{1+x^4}\right]\,.\end{aligned}$$

zu Aufgabe H 21

(a) Zu untersuchen ist, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösung x der Gleichung $f(x) = g_\alpha(x)$ im Intervall $[0,2]$ liegt. Es gilt:

$$f(x) = g_\alpha(x) \iff -x^2 + 2x = 2x + \alpha \iff x^2 = -\alpha\,.$$

Dies ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$ lösbar, nämlich durch $x = \sqrt{-\alpha}$ oder $x = -\sqrt{-\alpha}$. Letzteres braucht nicht weiter verfolgt zu werden, da nur Lösungen $x \in [0,2]$ interessant sind. Für $\alpha \in [-4,0]$ folgt dann $x \in [0,2]$. Daher gilt für festes $\alpha \in [-4,0]$:

$$\{x \in [0,2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} = \{\sqrt{-\alpha}\}\,.$$

(b) Die Fläche F_α ist gegeben durch:

$$F_\alpha = \int_0^2 \big|f(x) - g_\alpha(x)\big|\,\mathrm{d}x\,.$$

Um F_α berechnen zu können ist es nötig zu untersuchen, für welche $x \in [0,2]$ die Ungleichung $f(x) - g_\alpha(x) \leqq 0$ erfüllt ist und für welche $x \in [0,2]$ gilt $f(x) - g_\alpha(x) \geqq 0$. Die Funktion $f - g_\alpha$ ist als Differenz stetiger Funktionen stetig, also befinden sich diese Vorzeichenwechsel nur an Nullstellen von $f - g_\alpha$. Unter **(a)** wurde gezeigt, dass für $\alpha \in [-4,0]$ gilt:

$$\{x \in [0,2] \mid f(x) - g_\alpha(x) = 0\} = \{x \in [0,2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} = \{\sqrt{-\alpha}\}\,.$$

Für $x \in \left[0, \sqrt{-\alpha}\right]$ ist $f(x) - g_\alpha(x) \geqq 0$ und für $x \in \left[\sqrt{-\alpha}, 2\right]$ ist $f(x) - g_\alpha(x) \leqq 0$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= \int_0^2 \left|f(x) - g_\alpha(x)\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{-\alpha}} \left|f(x) - g_\alpha(x)\right| \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{-\alpha}}^2 \left|f(x) - g_\alpha(x)\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{-\alpha}} f(x) - g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{-\alpha}}^2 -(f(x) - g_\alpha(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{-\alpha}} -x^2 - \alpha\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{-\alpha}}^2 x^2 + \alpha\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \alpha x\right]_0^{\sqrt{-\alpha}} + \left[\frac{1}{3}x^3 + \alpha x\right]_{\sqrt{-\alpha}}^2 \\
&= \frac{8}{3} + 2\alpha + \frac{4}{3}\left(\sqrt{-\alpha}\right)^3\,.
\end{aligned}$$

(c) Es sind die Parameter α gesucht, für die die zugehörige Fläche F_α maximal beziehungsweise minimal wird. Es ist also die Funktion $F\colon [-4,0] \to \mathbb{R}\colon \alpha \mapsto F_\alpha$ auf Extremalstellen zu untersuchen. Dazu wird

$$F'(\alpha) = 2 - 2\sqrt{-\alpha} \quad \text{und} \quad F''(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$$

bestimmt.

An der Stelle -1 besitzt F demnach einen lokalen Tiefpunkt mit $F(-1) = 2$. Da im Inneren des Intervalls $[-4,0]$ keine weiteren lokalen Extrema liegen, befinden sich an den Rändern des Intervalls lokale Hochpunkte, nämlich mit $F(-4) = \frac{16}{3}$ und $F(0) = \frac{8}{3}$. Die Fläche F_α wird also für $\alpha = -\frac{1}{2}$ minimal und für $\alpha = -4$ maximal.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

zu Aufgabe H 22 Mit Aufgabe **P 24** erhält man

(a)

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{u(\pi/3)}^{u(2\pi/3)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln|u|\Big]_{u(\pi/3)}^{u(2\pi/3)} = \Big[\ln\Big(\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)\Big]_{x=\pi/3}^{2\pi/3}$$
$$= \ln(3^{1/2}) - \ln(3^{-1/2}) = \ln(3)\,,$$

(b)

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{u(\pi/2)}^{u(\pi)} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[-\frac{1}{u}\Big]_{u(\pi/2)}^{u(\pi)} = \lim_{t\to\pi-0}\Big[-\frac{1}{\tan\big(\frac{x}{2}\big)}\Big]_{x=\pi/2}^{t}$$
$$= \lim_{t\to\pi-0}\left(-\frac{1}{\tan\big(\frac{t}{2}\big)}+1\right) = 1\,,$$

(c)

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}x = \int_{u(\pi/3)}^{u(\pi/2)} \frac{u}{2}+1+\frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \Big[\frac{u^2}{4}+u+\frac{1}{2}\ln|u|\Big]_{u(\pi/3)}^{u(\pi/2)}$$
$$= \left[\frac{\big(\tan\big(\frac{x}{2}\big)\big)^2}{4} + \tan\Big(\frac{x}{2}\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)\right]_{x=\pi/3}^{\pi/2}$$
$$= \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\ln(3)\,.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

zu Aufgabe H 23

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0+0} \frac{\sin(y)}{y} = 1\,.$$

Mit der Regel von l'Hospital ergibt sich:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 1\,.$$

(b) Für $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $\alpha>1$ gilt:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^t = \frac{1}{\alpha-1}\,.$$

(c) Es seien:

$$\begin{aligned} f_1\colon [1,+\infty) &\to \mathbb{R}\colon x\mapsto \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \\ f_2\colon [1,+\infty) &\to \mathbb{R}\colon x\mapsto \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \\ g\colon [1,+\infty) &\to \mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{1}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Mit **(a)** ergibt sich für $i\in\{1,2\}$ jeweils

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_i(x)}{g(x)} = 1 > 0\,.$$

Da die Funktionen f_1, f_2, g auf $[1,\infty)$ positiv sind, folgt für $\alpha>1$ aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals in **(b)** mit dem Grenzwertkriterium die Konvergenz der Integrale

$$\int\limits_1^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \mathrm{d}\,x \quad\text{und}\quad \int\limits_1^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \mathrm{d}\,x\,.$$

zu Aufgabe H 24

(a) Für $\alpha\in\mathbb{R}^+$ folgt mit partieller Integration:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_{0+0}^{+\infty} e^{-t}t^\alpha\,\mathrm{d}\,t = \underbrace{\lim_{s\to\infty}\left[-t^\alpha e^{-t}\right]_{t=0}^s}_{=0} + \int\limits_{0+0}^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

(b) Für $\alpha = 1$ erhält man

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}\, t = \lim_{s\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{s} = 1\,.$$

(c) Die Behauptung $\Gamma(n+1) = n!$ ist für $n = 1$ wahr, denn in **(b)** wurde gezeigt:

$$\Gamma(1+1) = 1 = 1!$$

Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt, dass $\Gamma(n+1) = n!$ gilt. Damit und mit **(a)** ergibt sich:

$$\Gamma(n+1+1) = (n+1)\,\Gamma(n+1) = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$$

womit die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen ist.

zu Aufgabe H 25

Es sei

$$f\colon [2,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\big(\ln(x)\big)^{\alpha}}{x}\,.$$

Damit ergibt sich

$$f'(x) == \frac{\big(\ln(x)\big)^{\alpha-1}\big(\alpha - \ln(x)\big)}{x^2}\,.$$

Da $\alpha < -1$ vorausgesetzt ist, gilt $f'(x) < 0$, das heißt die Funktion f ist (streng) monoton fallend. Außerdem ist f positiv. Daher haben nach dem Integralkriterium die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\big(\ln(k)\big)^{\alpha}}{k}$$

und das Integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^{\alpha}}{x} \,\mathrm{d}\, x$$

das gleiche Konvergenzverhalten. Analog zu Aufgabe H 17 (c) erhält man für $\alpha < -1$ eine Stammfunktion von f. Damit ergibt sich die Konvergenz des folgenden Integrals:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^{\alpha}}{x} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\big(\ln(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_2^t = -\frac{\big(\ln(2)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,;$$

folglich konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\big(\ln(k)\big)^{\alpha}}{k}.$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

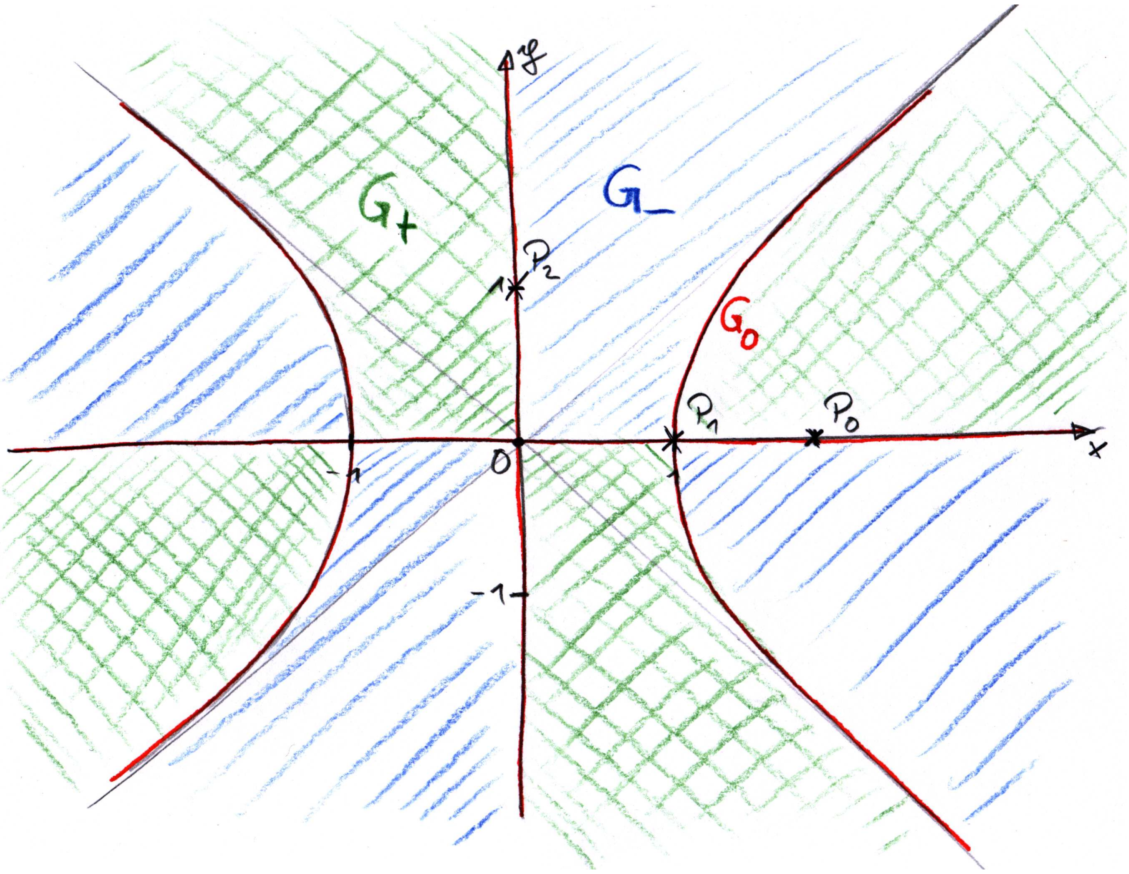
Sommer 2006

Zu Aufgabe H 26

(a) Es ist $p(x,y) = x^3y - xy^3 - xy = x \cdot y \cdot (x^2 - y^2 - 1)$. Damit ist $p(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x^2 - y^2 - 1 = 0$. In der Koordinatenebene skizziert entsprechen die ersten beiden Fälle horizontalen beziehungsweise vertikalen Geraden. Der letzte Fall beschreibt eine Quadrik, die bereits in Normalform angegeben ist: Es handelt sich um eine Hyperbel. Also:

$$G_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 1 = 0\}$$

Die Menge G_0 unterteilt $\mathbb{R}^2$ in einzelne Gebiete. Da p stetig ist, reicht es anhand eines einzelnen Funktionswertes im Inneren des jeweiligen Gebietes zu entscheiden, ob das Gebiet zu G_- oder zu G_+ gehört.



(b) Da p eine Polynomfunktion ist, sind auch alle partiellen Ableitungen von p Polynomfunktionen. Diese sind nach Lemma 10.2.10 aus der Vorlesung auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Nach Definition ist p also beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Nach Satz 10.4.4 aus der Vorlesung ist damit p in jedem Punkt total differenzierbar.

(c) Die Ableitung von p im Punkt (x_0, y_0) längs v ist gegeben durch:

$$\partial_v p(x_0,y_0) = \left\langle \operatorname{grad} p(x_0,y_0), v \right\rangle .$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Der Gradient ist:

$$\operatorname{grad} p(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 3x^2y - y^3 - y \\ x^3 - 3xy^2 - x \end{pmatrix} .$$

Also:

$$\operatorname{grad} p(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} p(P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} p(P_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich die Ableitungen von p längs v_1, v_2, v_3 bestimmen:

$$\begin{array}{lll} \partial_{v_1} p(P_0) = 0 & \partial_{v_2} p(P_0) = 6 & \partial_{v_3} p(P_0) = 6 \\ \partial_{v_1} p(P_1) = 0 & \partial_{v_2} p(P_1) = 0 & \partial_{v_3} p(P_1) = 0 \\ \partial_{v_1} p(P_2) = -2 & \partial_{v_2} p(P_2) = 0 & \partial_{v_3} p(P_2) = -2 \end{array}$$

Da $|v_1| = 1$ und $|v_2| = 1$ sind die Ableitungen von p längs v_1 und längs v_2 bereits Richtungsableitungen. Die zu v_3 gehörige Richtung w wird bestimmt durch:

$$w = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist die Richtungsableitung von p in Richtung w zu berechnen via

$$\partial_w p(x_0,y_0) = \left\langle \operatorname{grad} p(x_0,y_0), w \right\rangle = \left\langle \operatorname{grad} p(x_0,y_0), \frac{v_3}{|v_3|} \right\rangle = \frac{1}{|v_3|} \left\langle \operatorname{grad} p(x_0,y_0), v_3 \right\rangle$$

und es ergibt sich damit:

$$\partial_w p(P_0) = 3\sqrt{2} \qquad \partial_w p(P_1) = 0 \qquad \partial_w p(P_2) = -\sqrt{2} .$$

zu Aufgabe H 27

(a) Es ist $0 = f(x,y) = (x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)$ genau dann, wenn $x^2+y^2 = 0$ oder $\sqrt{x^2+y^2} - 1 = 0$. Im ersten Fall bedeutet dies $\big|(x,y)\big|^2 = 0$, im zweiten $\big|(x,y)\big| = 1$. Also ist

$$G_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) = 0\right\} = \{(0,0)\} \cup \left\{v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |v| = 1\right\} .$$

Da f stetig ist, lassen sich die Gebiete G_- und G_+ durch einzelne Punkte in ihrem Inneren identifizieren. Es ist $f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$ und $f(0,2) = 4$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} G_+ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\big((x,y)\big) > 0\right\} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |v| > 1\right\} \\ G_- &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\big((x,y)\big) < 0\right\} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < |v| < 1\right\} \end{aligned}$$

(b) Es sei $K_r\big((0,0)\big)$ der Kreis um $(0,0)$ mit Radius $r \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$K_r\big((0,0)\big) = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |v| = r\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} = r\right\} .$$

Sei nun $(x_0, y_0) \in K_r\big((0,0)\big)$ beliebig gewählt. Wegen

$$f(x_0, y_0) = \left(x_0^2 + y_0^2\right)\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 1\right) = r^2(r-1) = r^3 - r^2$$

besitzen alle Punkte des Kreises $K_r\big((0,0)\big)$ dasselbe Niveau. Demnach ist

$$\nu \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \colon r \mapsto r^3 - r^2$$

und $K_r\big((0,0)\big) \subseteqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = r^3 - r^2\right\}$ also Teil einer Niveaulinie.

(c) Eine Kurvendiskussion zeigt, dass ν eingeschränkt auf das Intervall $[0, \frac{2}{3}]$ oder ν eingeschränkt auf das Intervall $[\frac{2}{3}, +\infty)$ jeweils injektiv ist. Jeder Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ liegt also auf genau einem Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und dieser Kreis ist der einzige Teil der Niveaulinie, auf dem (x_0, y_0) liegt.

Ist nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, dann ist $(y_0, -x_0)$ senkrecht dazu. Die zugehörige Richtung der Tangente an den Kreis und damit die Niveaulinie durch diesen Punkt ist demnach $v := \frac{1}{|(y_0, -x_0)|}\big(y_0, -x_0\big)$.

Es ist

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0\left(\frac{3}{2}\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} - 1\right) \\ 2y_0\left(\frac{3}{2}\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} - 1\right) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_v f(x_0, y_0) &= \big\langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), v \big\rangle \\ &= \frac{1}{|(y_0, -x_0)|}\left(2x_0 y_0\left(\frac{3}{2}\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} - 1\right) - 2y_0 x_0\left(\frac{3}{2}\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} - 1\right)\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir werden später auch noch sehen, dass dies ein allgemeines Prinzip ist, nämlich dass die Ableitung längs einer Tangenten an eine Niveaulinie stets 0 ist.

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

zu Aufgabe H 28

(a) Der Definitionsbereich von g ist $\mathbb{R}^2 \setminus Q_g$ wobei

$$\begin{aligned} Q_g &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + 2uv + v^2 + 2v = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A_g x + 2a_g^\intercal x + c_g = 0\} \end{aligned}$$

mit

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_g^\intercal = (0,1) \qquad c_g = 0$$

Mit Hilfe der Hauptachsentransformation bestimmt man die Normalform der Quadrik Q_g und stellt fest, dass es sich hierbei um eine Parabel handelt.
Der Definitionsbereich von h ist $\mathbb{R}^2 \setminus Q_h$ mit

$$Q_h = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r\varphi - 1 = 0\} \ .$$

Auch hier könnte man durch eine Hauptachsentransformation den Typ der Quadrik bestimmen. Alternativ dazu:

$$r\varphi - 1 = 0 \iff r = \frac{1}{\varphi} \,.$$

Es handelt sich also um eine Hyperbel.

(b) Unter Anwendung der bekannten Differentiationsregeln ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_u(u,v) &= \frac{u^4 + 4u^3v + 3u^2v^2 + 5u^2v + v^3 + 2v^2}{(u^2 + 2uv + v^2 + 2v)^2} \\ g_v(u,v) &= \frac{u(u^2 + v^2 + 2u^3 + 2u^2v)}{(u^2 + 2uv + v^2 + 2v)^2} \\ h_r(r,\varphi) &= -\frac{\varphi}{r\varphi - 1} \\ h_\varphi(r,\varphi) &= -\frac{r}{r\varphi - 1} \\ h_{rr}(r,\varphi) &= \frac{\varphi^2}{(r\varphi - 1)^2} \\ h_{r\varphi}(r,\varphi) &= \frac{1}{(r\varphi - 1)^2} \\ h_{\varphi\varphi}(r,\varphi) &= \frac{r^2}{(r\varphi - 1)^2} \\ h_{\varphi r}(r,\varphi) &= \frac{1}{(r\varphi - 1)^2} \end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

zu Aufgabe H 29 Die Matrix A besitzt die Eigenwerte 1, 2 und 3. Sie ist also positiv definit.

Die Matrix B besitzt die Eigenwerte -1, -2 und 3. Sie ist also indefinit.

Die Matrix C besitzt die Eigenwerte 1, 2 und 0. Sie ist also weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit.

zu Aufgabe H 30

(a) Man berechnet

$$\operatorname{grad} f = (\cos(x+y), \cos(x+y))^{\intercal}$$

und

$$\mathrm{H}f = \begin{pmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{pmatrix}.$$

(b) Damit erhält man das Taylorpolynom zweiter Stufe

$$T_2\big(f, (x,y), (0,0)\big) = x + y$$

und

$$T_2\left(f, (x,y), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 .$$

Im Punkt $(0,0)$ erhält man die Schmiegquadrik

$$z = x + y$$

also eine Ebene.

Im Punkt $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ erhält man die Schmiegquadrik

$$z = 1 - \frac{1}{2}\left(x + y - \frac{\pi}{2}\right)^2 .$$

Dies ist einen parabolischen Zylinder.

zu Aufgabe H 31

(a) Es ist

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2zx(y^2-1) \\ z(3y^2 + 2yx^2 - 2y - 1) \\ (x^2 + y - 1)(y^2 - 1) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z(y^2-1) & 4zxy & 2x(y^2-1) \\ 4zxy & 2z(3y + x^2 - 1) & 3y^2 + 2yx^2 - 2y - 1 \\ 2x(y^2-1) & 3y^2 + 2yx^2 - 2y - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

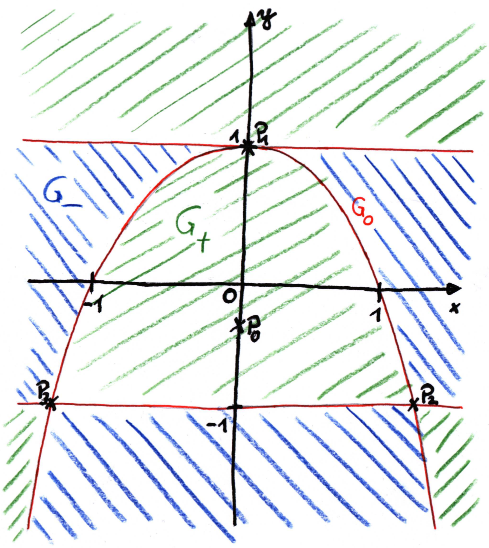
(durch Ausmultiplizieren kann man die Terme auf eine zum Ableiten angenehmere Form bringen).

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

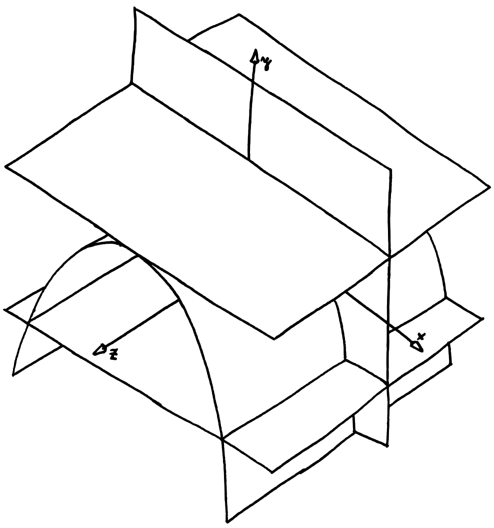
(b) Es ist $0 = \tilde{g}(x,y) = (x^2+y-1)(y^2-1)$ genau dann, wenn $(x^2+y-1) = 0$ oder wenn $y^2-1=0$ ist. Die erste Gleichung lässt sich umformen in $y = -x^2+1$, beschreibt also eine „nach unten geöffnete" Parabel mit Scheitelpunkt $(0,1)$. Die zweite Gleichung ist bereits in der Normalform für Quadriken angegeben und beschreibt ein Paar paralleler „horizontaler" Geraden durch die Punkte $(0,1)$ und $(0,-1)$.

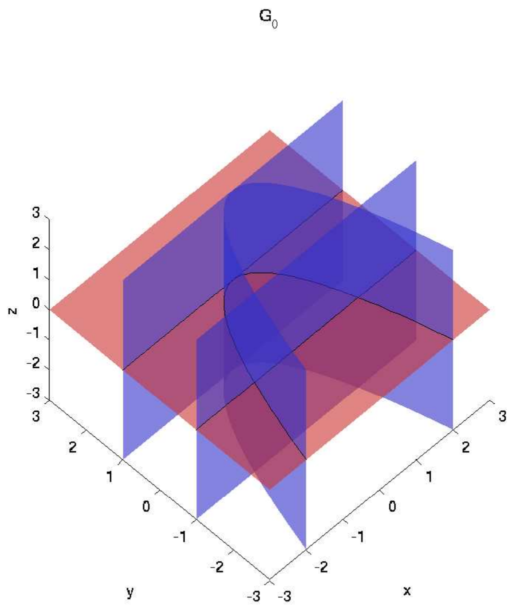


$$\widetilde{G}_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -x^2+1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| = 1\right\}$$

Es ist $0 = g(x,y,z) = z\,\tilde{g}(x,y)$ genau dann, wenn $z = 0$ oder wenn $\tilde{g}(x,y) = 0$ (und $z \in \mathbb{R}$ beliebig) ist. Die Gleichung $z = 0$ beschreibt die x-y-Koordinatenebene. Außerdem besteht die Nullstellenmenge aus einer zylindrischen Fläche mit oben beschriebenem Querschnitt.

$$G_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0\right\} \cup \left(\widetilde{G}_0 \times \mathbb{R}\right)$$





(c) Die Menge $\widetilde{G}_0$ unterteilt $\mathbb{R}^2$ in einzelne Gebiete. Da p stetig ist, reicht es, anhand eines einzelnen Funktionswertes im Inneren des jeweiligen Gebietes zu entscheiden, ob das Gebiet zu $\widetilde{G}_-$ oder zu $\widetilde{G}_+$ gehört.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Das ergibt:

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_+ = \ & \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y>1\right\} \\ & \cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (|y|<1)\wedge(y<-x^2+1)\right\} \\ & \cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (y<-1)\wedge(y>-x^2+1)\right\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_- = \ & \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (|y|<1)\wedge(y>-x^2+1)\right\} \\ & \cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (y<-1)\wedge(y<-x^2+1)\right\}\end{aligned}$$

(d) Es sind die kritischen Punkte zu bestimmen, also die $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, für die $\operatorname{grad}\tilde{g}(x,y)=0$ gilt. Es ist

$$\operatorname{grad}\tilde{g}(x,y)=\begin{pmatrix}2x(y^2-1)\\ 3y^2+2yx^2-2y-1\end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $\operatorname{grad}\tilde{g}(x,y)=0$ führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}2x(y^2-1)&=0\\ 3y^2+2yx^2-2y-1&=0\end{aligned}$$

die beide erfüllt sein müssen. Die Gleichung $2x(y^2-1)=0$ ist genau dann erfüllt, wenn $x=0$ oder wenn $y^2-1=0$.

Der Fall $x=0$ führt in die Gleichung $3y^2+2yx^2-2y-1=0$ eingesetzt auf die Gleichung $3y^2-2y-1=0$ und die Lösungen $y=-\frac{1}{3}$ oder $y=1$. Dieser Fall liefert also die kritischen Punkte $P_0=(0,-\frac{1}{3})$ und $P_1=(0,1)$.

Die Gleichung $y^2-1=0$ führt auf die Lösungen $y=1$ oder $y=-1$. Setzt man $y=1$ in die Gleichung $3y^2+2yx^2-2y-1=0$ ein, so erhält man die Lösung $x=0$ und damit den bereits ermittelten kritischen Punkt P_1. Setzt man $y=-1$ in die Gleichung $3y^2+2yx^2-2y-1=0$ ein, so erhält man die Lösungen $x=\sqrt{2}$ oder $x=-\sqrt{2}$ und damit die kritischen Punkte $P_2=(\sqrt{2},-1)$ und $P_3=(-\sqrt{2},-1)$.

Die Punkte P_1 bis P_3 sind Nullstellen von $\tilde{g}$. Anhand der Skizze erkennt man, dass an diese Punkte jeweils Gebiete angrenzen, in denen $\tilde{g}$ positive sowie negative Werte annimmt: Diese Punkte sind also Sattelpunkte.

Ebenfalls anhand der Skizze erkennt man, dass P_0 der einzige kritische Punkt der stetigen Funktion $\tilde{g}$ im Inneren des kompakten Gebietes $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (|y|\leqq 1)\wedge(y\geqq -x^2+1)\right\}$ ist, dessen Rand aus Nullstellen von $\tilde{g}$ besteht. Im Inneren des Gebiets nimmt $\tilde{g}$ ausschließlich positive Werte an. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum besitzt $\tilde{g}$ in dem Gebiet ein Maximum, das aus Mangel an Alternativen an der einzigen kritischen Stelle im Inneren liegen muss. Bei P_0 besitzt $\tilde{g}$ also einen Hochpunkt.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

zu Aufgabe H 32

(a) Die Jacobi-Matrizen sind

$$\mathrm{J}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{J}g(s,t) = \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ te^s & e^s \end{pmatrix}.$$

(b) Mit der Kettenregel erhält man daraus

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(g\circ f)(x,y,z) = \mathrm{J}g(f(x,y,z))\,\mathrm{J}f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2\ln(x)+2y & 2yz \\ xyze^y & xe^y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\frac{\ln(x)+y}{x} & 2\ln(x)+2y+2yz^2 & 2y^2z \\ yze^y & x(y+1)ze^y & xye^y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

zu Aufgabe H 33 Um die Lagrange-Multiplikatoren-Methode anwenden zu können, ist zunächst eine geeignete Funktion g, die die Nebenbedingungen beschreibt, zu finden. Dies ist mit

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-1$$

gegeben, denn es gilt $g(x_0,y_0,z_0)=0$ genau dann, wenn die Gleichung $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ erfüllt ist.

Mit der Lagrange-Multiplikatoren-Methode werden nun die kritischen Stellen, an denen Extrema vorliegen können, bestimmt. Die Bedingungen

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= 0 \\ \operatorname{grad} f(x,y,z) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

führen auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-1 &= 0 && (1)\\ 1+2\lambda x &= 0 && (2)\\ 1+2\lambda y &= 0 && (3)\\ -1+2\lambda z &= 0 && (4)\end{aligned}$$

Der Fall $\lambda = 0$ stünde im Widerspruch zu den Gleichungen (2), (3) und (4). Unter der Annahme $\lambda \neq 0$ ergibt sich aus diesen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x = y &= -\frac{1}{2\lambda} \\ z = -y &= \frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Diese Werte in Gleichung (1) eingesetzt liefern:

$$0 = x^2+y^2+z^2-1 = 3\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = \frac{3}{4\lambda^2} - 1$$

und damit
$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$
Der Fall $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ führt auf die kritische Stelle $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, der Fall $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ führt auf die kritische Stelle $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Da die Menge $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(v) = 0\}$ kompakt ist, nimmt die Funktion f dort unter der gegebenen Nebenbedingung nach dem *Satz vom Minimum und Maximum* auch ein Minimum und ein Maximum an. Dies kann nur an den oben berechneten kritischen Stellen geschehen. Ein Vergleich der Funktionswerte von f an diesen kritischen Stellen zeigt:

An der Stelle $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ liegt ein Minimum vor, an der Stelle $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ liegt ein Maximum vor.

zu Aufgabe H 34

(a) Mit der Kettenregel ergibt sich
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} f(g(t))\right|_{t=0} = \mathrm{J}f(g(0))\,\mathrm{J}g(0) = (\operatorname{grad} f(0))^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

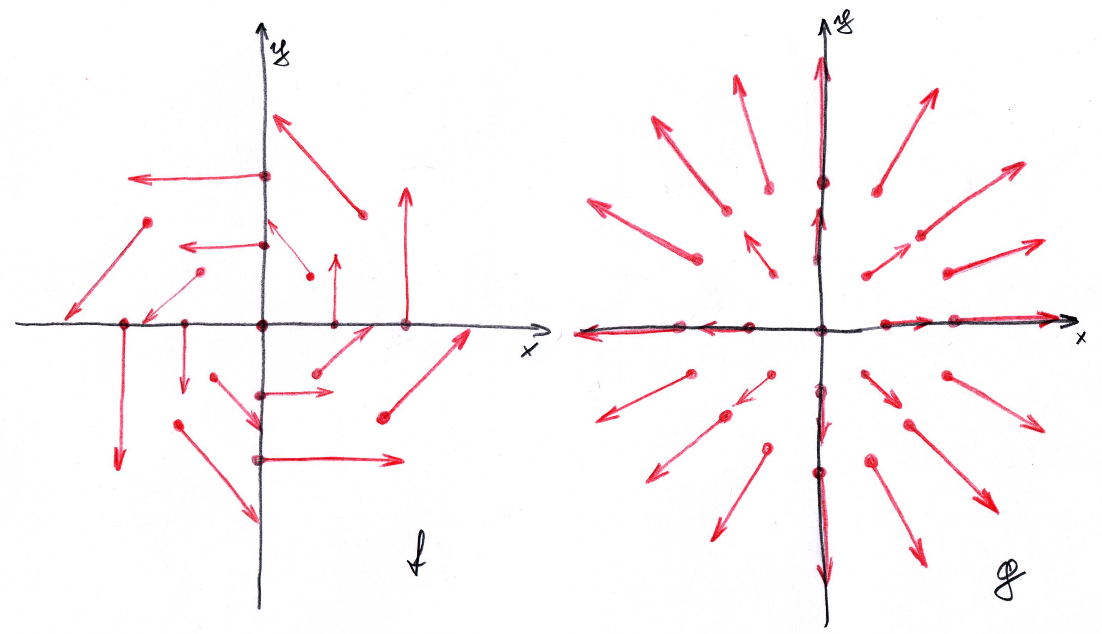
(b) Obiges läßt sich auch als
$$\operatorname{grad} f(0) \bullet v$$
schreiben, was mit der Ableitung $\partial_v f(0)$ von f längs v im Punkt 0 übereinstimmt.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2006

zu Aufgabe P 43

(a) Es ist an einer repräsentativen Auswahl von Stellen im Definitionsbereich der Funktionswert zu bestimmen. Die gewonnenen Funktionswerte werden als Pfeile mit entsprechender Richtung und Länge abgetragen. Dabei kann es manchmal hilfreich sein und die Übersichtlichkeit der Skizze fördern, die Länge der Vektoren um ein gewisses Maß zu skalieren. Dies ist bei der Skizze zur Funktion g geschehen.



(b) Es ist

$$\mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{J}g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f(x,y) &= 0 \\ \operatorname{rot} f(x,y) &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div} g(x,y) &= 2 \\ \operatorname{rot} g(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

(c) Für die Parametrisierung C von K gilt:

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $|C'(t)| = 1$. Als Normalenvektor an die Kurve K ergibt sich für die gewählte Parametrisierung:

$$n(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Nun lässt sich berechnen:

$$Z(f,K) = \int_0^{2\pi} f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

$$A(f,K) = \int_0^{2\pi} f(C(t)) \bullet n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

$$Z(g,K) = \int_0^{2\pi} g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

$$A(g,K) = \int_0^{2\pi} g(C(t)) \bullet n(t)\,\mathrm{d}t == \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi\,.$$

zu Aufgabe P 44

(a) Man berechnet

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha-1}{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\operatorname{div} f = -\frac{\alpha z}{x^2} - \frac{z}{y^2}\,.$$

(b) Nur für $\alpha = 1$ ist $\operatorname{rot} f = 0$. Für diesen Fall erhält man

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto z\ln(xy)$$

als ein Potential von f.

(c) Da C eine reguläre und – bis auf den Anfangs- bzw. Endpunkt – doppelpunktfreie Parametrisierung ist, erhält man für $\alpha = 0$ für das Kurvenintegral von f längs K

$$\int_K f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi t) \\ t^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2te^{(t^2)} \\ 0 \\ \pi\cos(\pi t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi t^2 \cos(\pi t)\,\mathrm{d}\,t = \underbrace{\left[t^2 \sin(\pi t)\right]_{t=-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} 2t\sin(\pi t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}\,t\cos(\pi t)\right]_{t=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi}\cos(\pi t)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{4}{\pi} - \underbrace{\left[\frac{2}{\pi^2}\sin(\pi t)\right]_{t=-1}^{1}}_{=0} = -\frac{4}{\pi}\,.$$

Für $\alpha = 1$ besitzt f ein Potential, und da K eine geschlossene Kurve ist, ergibt sich für das Kurvenintegral von f längs K

$$\int_K f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0\,.$$

zu Aufgabe P 45 Nach Aufgabe P 41 gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} F \times \operatorname{grad} G) = (\operatorname{grad} G \bullet \operatorname{rot}(\operatorname{grad} F)) - (\operatorname{grad} F \bullet \operatorname{rot}(\operatorname{grad} G))$$

und mit Aufgabe P 42 (a) folgt

$$= (\operatorname{grad} G \bullet 0) - (\operatorname{grad} F \bullet 0) = 0\,.$$