PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

**Höhere Mathematik II**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H1:**

**(a)** Wegen $|\frac{5+(-1)^k}{7^{k+2}}| \leqq \frac{1}{7^{k+1}}$ liegt Konvergenz nach dem Majorantenkriterium vor.

**(b)** Wegen

$$\frac{\sqrt{k^2+2}-\sqrt{k^2+1}}{k} = \frac{1}{k(\sqrt{k^2+2}+\sqrt{k^2+1})} \leqq \frac{1}{k^2}$$

liegt Konvergenz nach dem Majorantenkriterium vor.

**(c)** Schreibe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = T_n + U_n$$

mit

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

Dann wächst $T_n$ als Partialsumme der harmonischen Reihe über alle Schranken, während $U_n$ nach dem Leibnizkriterium Partialsumme einer konvergenten Reihe ist, also insbesondere beschränkt ist. Somit wächst auch $S_n$ über alle Schranken, die vorgelegte Reihe ist also divergent.

**(d)** Es gilt

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2},$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$

somit konvergiert die vorgelegte Reihe gegen $1$.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H2:**

Für $x \neq 5$ ist die Stetigkeit von $f$ klar, da Quotienten stetiger Funktionen außerhalb der Nennernullstellen stetig sind und Polynome stetig sind. Ferner gilt

$$\frac{3x^2 - 13x - 10}{x - 5} = 3x + 2,$$

also ist $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$ und damit $f(x)$ auch in $x = 5$ stetig.

**Zu Aufgabe H3:**

**(a)** Offensichtlich muß $q \leqq \frac{1}{3}$ gelten.

**(b)** Die Zahl der Kanten im $i$-ten Schritt ist $4 \cdot 5^i$; also ist die Zahl der Quadrate im $i$-ten Schritt $4 \cdot 5^{i-1}$. Für den Flächeninhalt ergibt sich damit

$$\sum_{i=1}^{\infty} 4 \cdot 5^{i-1} \cdot q^{2i} = \frac{4q^2}{1 - 5q^2}.$$

Er ist unter der Nebenbedingung $0 \leqq q \leqq \frac{1}{3}$ genau dann $1$, wenn $4q^2 = 1 - 5q^2$, also $q = \frac{1}{3}$ ist, was anschaulich auch klar ist.

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

## Zu Aufgabe H4:

**(a)** Da die drei Teilfolgen konvergieren, sind die Häufungspunkte $H$ der Folge die Grenzwerte der drei Teilfolgen, wobei der Grenzwert der zweiten und dritten Teilfolge übereinstimmen

$$H = \{e,\, 1\}\ .$$

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \sqrt[k]{|a_k|}$ ist der größte Häufungpunkt und $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \sqrt[k]{|a_k|}$ ist der kleinste Häufungpunkt. Damit ergibt sich

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \sqrt[k]{|a_k|} = e \quad \text{und} \quad \underline{\lim_{k\to\infty}}\ \sqrt[k]{|a_k|} = 1\,.$$

**(b)** Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist somit

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{e}$$

## Zu Aufgabe H5:

**(a)** Für $\left|e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n}\right|$ gilt mit der Formel von Euler und de Moivre

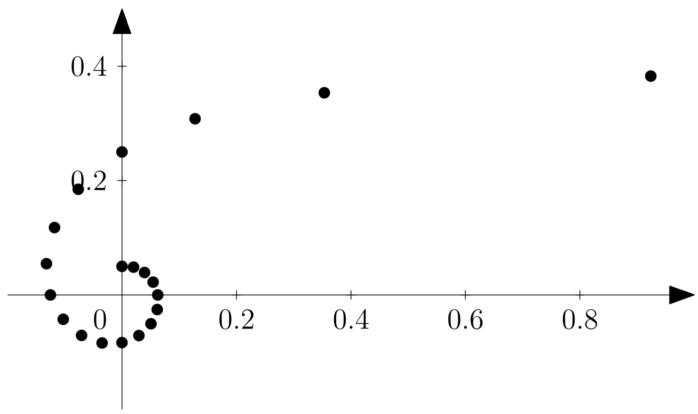
$$\left|e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right| = \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right) + \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right) = 1\,.$$

Damit erhält man

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right|\left|e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right| = 0\,.$$

Daher konvergiert die Folge und der Grenzwert ist Null.

**(b)** Skizze der Folgenglieder in der komplexen Zahlenebene:



# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H6:**

Den Konvergenzradius der ersten Potenzreihe erhält man z. B. mit dem Quotienten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

$$a = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k!\,(k+1)^{k+1}}{k^k\,(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k\,(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$$

Damit ergibt sich der Konvergenzkreis $\mathcal{U}_{1/e}(0)$ mit dem Ursprung als Mittelpunkt, da die Reihe um diesen entwickelt wurde, und dem Radius $\rho = \frac{1}{a} = \frac{1}{e}$.

Bei der zweiten Potenzreihe muss der Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium berechnet werden, da $a_k = 0$ für gerade $k \in \mathbb{N}$ gilt.

$$a = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{\left|\frac{(-1)^k\,k}{2k+1}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{\frac{k}{2k+1}} = 1$$

Diesesmal wurde die Potenzreihe um $\mathrm{i}$ entwickelt, daher ist der Konvergezkreis $\mathcal{U}_1(\mathrm{i})$.

**Zu Aufgabe H7:**

**(a)** Für $\cosh(x)$ erhält man den folgenden Definitions- und Wertebereich:

$$D = (-\infty,\,\infty)\ , \quad W = [1,\,\infty)$$

Für $\sinh(x)$ erhält man den folgenden Definitions- und Wertebereich:

$$D = (-\infty,\,\infty)\ , \quad W = (-\infty,\,\infty)$$

**(b)** Für $\cosh(x)$ bekommt man für $f(-x)$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x\,,$$

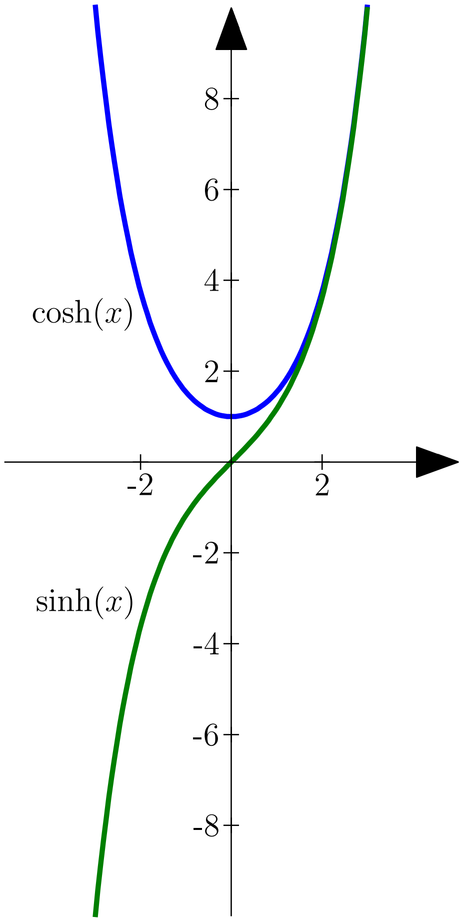
also ist $\cosh(x)$ symmetrisch zur $y$-Achse. $\sinh(x)$ ist mit

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

punktsymmetrisch zum Ursprung.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

**(c)** Bild von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$:




**(d)** Man berechnet die Potenzreihen mit der Reihendarstellung von

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \,.$$

Damit erhält man

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \,.$$

Es fallen die ungeraden Potenzen weg und die geraden Potenzen stehen bei beiden Summen, insgesamt bekommt man die Potenzreihe

$$\cosh(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \,.$$

Bei $\sinh(x)$ verläuft die Rechnung analog, nur hier fallen die geraden Potenzen weg und die ungeraden Potenzen bleiben bei beiden Summanden stehen:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



**(e)** Man ersetzt $\cosh(x)$ durch $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x)$ durch $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ und vereinfacht diesen Term:

$$
\begin{aligned}
(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}{2} \\
&= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1
\end{aligned}
$$

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



**Zu Aufgabe H8:**

**(a)** $f_1'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$,

**(b)** $f_2(x) = x^{1/8}$, also $f_2'(x) = \frac{1}{8}x^{-7/8}$,

**(c)** $f_3(x) = e^{x \ln x}$, also $f_3'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$,

**(d)** $f_4(x) = x^3$ für $x \geqq 0$ und $f_4(x) = -x^3$ für $x \leqq 0$;

Ableitungen sind jeweils $3x^2$ (für $x \geqq 0$) bzw. $-3x^2$ (für $x \leqq 0$), die in $x = 0$ übereinstimmen. Also ist $f_4(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f_4'(x) = 3x|x|$.

**(e)** $f_5'(x) \equiv 0$,

**(f)** $f_6'(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

**Zu Aufgabe H9:**

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach $n$. Die Aussage für $n = 1$ ist gerade die Produktregel, damit ist der Induktionsanfang für $n = 1$ erledigt. Wir schließen nun aus der Gültigkeit der Aussage für $n$ die Gültigkeit für $n + 1$: Es gilt

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(fg)^{(n)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)} \quad \text{[Induktionsvoraussetzung!]} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right) \quad \text{[Linearität der Ableitung]} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-k+1)}\right) \quad \text{[Produktregel]} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}g^{(n+1-(k+1))} + f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right) \\
&= f^{(0)}g^{(n+1)}\underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}} + \sum_{l=1}^{n} f^{(l)}g^{(n+1-l)}\left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right) + f^{(n+1)}g^{(0)}\underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}} \\
&\qquad \text{[Umsummieren]} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1} f^{(l)}g^{(n+1-l)}\binom{n+1}{l} \quad \text{[Pascalsches Dreieck!]},
\end{aligned}
$$

was zu zeigen war.

---

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



**Zu Aufgabe H10:**

**(a)** Mit

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

folgt

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

und

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leqq \sum_{k=2}^{\infty} |x|^{k-1} = \frac{|x|}{1-|x|}$$

für $|x| < 1$. Wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{1-|x|} = 0$$

folgt somit

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**(b)** Es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

nach (a), also

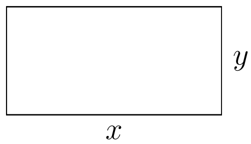
$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H11:** Für die Querschnittsfläche $A$ gilt

$$A = xy \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{A}{x}\,.$$




Damit erhält man für den Umfang $U$ des Rohrs mit rechteckigem Querschnitt

$$U = 2x + 2y\,.$$

Ersetzt man nun $y$, bekommt man den Umfang als Funktion in Abhängigkeit von $x$

$$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + \frac{2A}{x}$$

Die erste und zweite Ableitung ist damit

$$\begin{aligned} U' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2 - \frac{2A}{x^2}\,, \\ U'' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{4A}{x^3}\,. \end{aligned}$$

**(a)** Der Extremwert wird entweder für $U'(x) = 0$ oder an den Randstellen angenommen. Setzt man die Ableitung Null erhält man

$$U'(x) = 2 - \frac{2A}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \sqrt{A}\,.$$

Nun setzt man $x_1$ in die zweite Ableitung ein

$$U''\left(\sqrt{A}\right) = \frac{4}{\sqrt{A}} > 0$$

daher liegt hier ein Tiefpunkt vor. Der minimale Unfang ist somit $f\left(\sqrt{A}\right) = 4\sqrt{A}$.

**(b)** Der maximale Umfang wird an den Intervallgrenzen angenommen. Der Umfang geht gegen unendlich, wenn eine Seitenlänge gegen Null geht, da dann die andere Seitenkante gegen unendlich gehen muss. Dieser Fall ist in der Praxis nicht umsetzbar.

**Zu Aufgabe H12:** Damit für die Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto (\cos x)^3$ auf dem entsprechenden Intervall eine Umkehrfunktion existiert, muss die Funktion in dem Intervall streng monoton und stetig sein. Die Funktion ist auf dem Intervall streng monoton fallend, wegen

$$f' : (0,\, \pi) \to \mathbb{R} : x \mapsto -3\,(\cos x)^2\, \sin x \leqq 0$$

---

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

und stetig. Daher ist die Existenz der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi] : x \mapsto \arccos \sqrt[3]{x}$$

mit $f\left(([0,\pi]\right) = [-1,1]$ gesichert. Für $y_0 = (\cos x_0)^3$ und $x_0 = \arccos \sqrt[3]{y_0}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \arccos\left(\sqrt[3]{y}\right)\bigg|_{y=y_0} &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\cos x_0)^3} = \frac{1}{3(\cos x_0)^2(-\sin x_0)} \\
&= \frac{-1}{3(\cos x_0)^2\sqrt{1-(\cos x_0)^2}} \\
&= \frac{-1}{3\left(\cos\left(\arccos\sqrt[3]{y_0}\right)\right)^2\sqrt{1-\left(\cos\left(\arccos\sqrt[3]{y_0}\right)\right)^2}} \\
&= \frac{-1}{3\left(\sqrt[3]{y_0}\right)^2\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{y_0}\right)^2}} = \frac{-1}{3y_0^{2/3}\sqrt{1-y_0^{2/3}}}
\end{aligned}$$

mit $y_0 \notin \{0,\,1,\,-1\}$. Die Formel $\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$ erhält man, falls $\sin x$ größer 0 ist, also für alle Intervalle $[2\,k\,\pi,\,(2k+1)\,\pi]$ mit $k \in \mathbb{N}$.

**Zu Aufgabe H13:** Der Grenzwert von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ ist von der Form „$\frac{0}{0}$“. Den Grenzwert bekommt man mit l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(e^x - e^{-x}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2\,.$$

Der Grenzwert von $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x + \cos x}{x}$ ist von der Form „$\frac{1}{0}$“. Daher ist hier l'Hospital nicht anwendbar und der Grenzwert existiert nicht.

Der Grenzwert von $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{\ln x^5}$ ist „$\frac{\infty}{\infty}$“. Daher kann hier l'Hospital wieder angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{\ln x^5} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln(x^3+1)\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\ln x^5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3+1}}{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{5(x^3+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^3)/x^3}{(5(x^3+1))/x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{5(1+1/x^3)} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

**Zu Aufgabe H14:** Für die Funktion $f$ werden die ersten vier Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1-x)\,e^{-x} \\
f^{(2)}(x) &= (-2+x)\,e^{-x} \\
f^{(3)}(x) &= (3-x)\,e^{-x} \\
f^{(4)}(x) &= (-4+x)\,e^{-x}
\end{aligned}$$

Da das Taylorpolynom um den Punkt 0 entwickelt wird, setzt man in die ersten drei Ableitungen und in die Funktion Null ein:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f^{(2)}(0) &= -2 \\ f^{(3)}(0) &= 3 \end{aligned}$$

Damit erhält man das Taylorpolynom und das Restglied:

$$\begin{aligned} T_3(f,x,0) &= x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \\ R_3(f,x,0) &= \frac{1}{24}\left(-4 + (\vartheta_{x,0}x)\right) e^{-(\vartheta_{x,0}x)} x^4 \end{aligned}$$

Für die Funktion $g$ werden nur die ersten drei Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 + x\ln 3)\, 3^x \\ g^{(2)}(x) &= \left(2\ln 3 + x(\ln 3)^2\right) 3^x \\ g^{(3)}(x) &= \left(3(\ln 3)^2 + x(\ln 3)^3\right) 3^x \end{aligned}$$

Nun setzt man in die Funktion und in die ersten beiden Ableitungen den Entwicklungspunkt 1 ein:

$$\begin{aligned} g(1) &= 3 \\ g'(1) &= 3 + 3\ln 3 \\ g^{(2)}(1) &= 6\ln 3 + 3(\ln 3)^2 \end{aligned}$$

Damit erhält man die Taylorpolynom und das Restglied:

$$\begin{aligned} T_2(g,x,1) &= 3 + (3 + 3\ln 3)(x-1) + \left(3\ln 3 + \frac{3}{2}(\ln 3)^2\right)(x-1)^2 \\ R_2(g,x,1) &= \frac{1}{6}\left(3(\ln 3)^2 + (1 + \vartheta_{x,1}(x-1))(\ln 3)^3\right) 3^{(1+\vartheta_{x,1}(x-1))}(x-1)^3 \end{aligned}$$

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H15:**

**(a)** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx = -\cos\sqrt{x} + c$ (Substitution $u = \sqrt{x}$),

**(b)** $\int(\sin x)^3\,dx = \int \sin x(1-(\cos x)^2)\,dx = \int \sin x\,dx - \int \sin x(\cos x)^2\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}(\cos x)^3 + c$ (Substitution $u = \cos x$ im hinteren Integral),

**(c)** $\int \frac{7x^6+5x^4}{x^7+x^5+1}\,dx = \ln|x^7+x^5+1| + c$ (Zähler ist Ableitung des Nenners!),

**(d)** Wegen $(\cosh u)^2 - (\sinh u)^2 = 1$ substituieren wir $x = \sinh u$ (umkehrbar auf ganz $\mathbb{R}$!) und erhalten (beachte: stets $\cosh x \geqq 0$, also positives Vorzeichen bei der Wurzel!) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int(\cosh u)^2\,du = \sinh u\cosh u - \int(\sinh u)^2\,du + c$ (partielle Integration) $= \sinh u \cosh u - \int((\cosh u)^2 - 1)\,du + c$, also $\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\sinh u\cosh u + u) + c = \frac{1}{2}(x\cosh arsinh\, x + arsinh\, x) + c$. Mit $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $arsinh\ x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ kann man diesen kompakten Ausdruck noch durch einen längeren, aus "elementareren" Funktionen bestehenden ersetzen.

**Zu Aufgabe H16:** Durch Substitution $u = x^2$ in die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k = \frac{1}{1-u}\ (|u| < 1)$$

folgt sofort

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} \tag{1}$$

für $|x| < 1$; für $|x| \geqq 1$ divergiert die Reihe, da $x^{2k}$ für $|x| \geqq 1$ nicht gegen $0$ konvergiert. Nach dem Eindeutigkeitssatz 2.6.9 für Potenzreihen stellt (1) bereits die Taylorreihe von $f$ zum Entwicklungspunkt $0$ dar.

**Zu Aufgabe H17:** Da $x = 1$ sowohl Zähler- als auch Nennernullstelle ist, dividieren wir durch $x-1$ und erhalten

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}.$$

Somit ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, bei $x = -1$ liegt ein Pol, bei $x = 0$ und $x = 1$ Nullstellen von $f$ vor. Ferner gilt

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

Somit ist $f'(x) = 0$ genau für $x_1 = -1-\sqrt{2}$, $x_2 = -1+\sqrt{2}$. Da offensichtlich ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ bei $f'(x_2)$ vorliegt, hat $f(x)$ bei $x = x_2$ ein lokales Minimum, in analoger Weise bei $x = x_1$ ein lokales Maximum. Wegen $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ hat $f$ weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum. Die Formel für $f'(x)$ zeigt noch, daß $f(x)$ für $x \leqq x_1$ und $x \geqq x_2$ streng monoton wachsend und für $x_1 \leqq x < -1$ und $-1 < x \leqq x_2$ streng monoton fallend ist. Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $f(x)$ für $x \in D$ sind klar, da $f$ eine gebrochen rationale Funktion ist. Eine Skizze des Graphen von $f$ kann nun ohne Mühe angefertigt werden.

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H18:**

**(a)** Für die Funktion gilt

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \,.$$

Damit erhält man für das Integral

$$\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}\, x = [x - \ln|x+1|] \ .$$

**(b)** Die beiden Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Mit dem Ansatz

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

erhält man für $A = 2$ und $B = -1$, und somit

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}\, x = \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) \mathrm{d}\, x = [2\ln|x-2| - \ln|x-1|] \ .$$

**(c)** Eine Nullstelle des Nenners ist $x_1 = 2$. Man erhält mit Polynomdivision $x^3-2x^2+x-2 = (x-2)(x^2+1)$. Dies hat keine weitere Nullstelle im Reellen. Hier macht man den Ansatz

$$\frac{5x}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \,.$$

Daher muss $A = 2$, $B = -2$ und $C = 1$ sein. Somit ist das Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{5x}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}\, x &= \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{-2x+1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}\, x \\ &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}\, x \\ &= \left[2\ln\ln|x-2| - \ln\left(x^2+1\right) + \arctan(x)\right] \ .\end{aligned}$$

**Zu Aufgabe H19:** Die Nullstellen der Funktion sind $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$. Für den Flächeninhalt $A$ muss das Gebiet in zwei Intervalle unterteilt werden, in $I_1 = [-1,1]$ und $I_2 = [1,3]$, da man nicht einfach über die Nullstellen integrieren darf. An dieser Stelle findet ein Vorzeichenwechsel statt. Das zweite Integral wird abgezogen, da die Funktion hier unterhalb der $x$-Achse liegt und daher das Integral negativ ist. Man könnte auch die Beträge der beiden Integrale addieren.

$$\begin{aligned}A &= \int\limits_{-1}^{1} \left(2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\right) \mathrm{d}\, x - \int\limits_{1}^{3} \left(2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\right) \mathrm{d}\, x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x\right]_{1}^{3} = 8 - (-8) = 16\end{aligned}$$

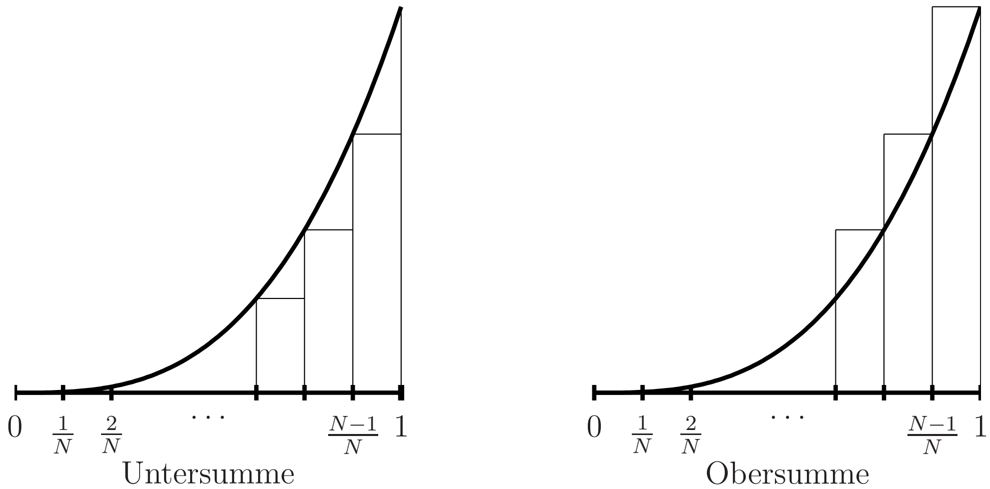
# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



Beim Quadrat dieser Funktion sind die Funktionswerte immer positiv, daher kann in einem Schritt über das gesamte Intervall integriert werden.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{3} \left(2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\right)^2 \,\mathrm{d}\,x \\ &= \pi \int_{-1}^{3} \left(4x^6 - 24x^5 + 28x^4 + 48x^3 - 68x^2 - 24x + 36\right) \,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\pi \left(\frac{4}{7}x^7 - 4x^6 + \frac{28}{5}x^5 + 12x^4 - \frac{68}{3}x^3 - 12x^2 + 36x\right)\right]_{-1}^{3} \\ &= \frac{8192\pi}{105} \,. \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe H20:** Die Intervalllänge ist konstant $x_{k+1} - x_k = \dfrac{1}{N}$. Die Funktion $f$ ist monoton wachsend.




Daher wird bei der Obersumme die rechte Intervallgrenze und bei der Untersumme die linke Intervallgrenze genommen. Man benötigt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{N^2\,(N+1)^2}{4} \,.$$

Die Obersumme ist somit

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{N} f\left(k\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N} = \sum_{k=1}^{N} k^3 \frac{1}{N^4} = \frac{1}{N^4}\sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{1}{N^4}\frac{N^2\,(N+1)^2}{4}$$

und die Untersumme

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{N-1} f\left(k\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N} = \sum_{k=1}^{N-1} k^3 \frac{1}{N^4} = \frac{1}{N^4}\sum_{k=1}^{N-1} k^3 = \frac{1}{N^4}\frac{N^2\,(N-1)^2}{4} \,.$$

Für $N \to \infty$ erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,P) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N^4}\frac{N^2\,(N+1)^2}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{N^4+2N^3+N^2}{4N^4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(N^4+2N^3+N^2)\,/N^4}{4N^4/N^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/N+1/N^2}{4} = \frac{1}{4} \\
\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,P) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N^4}\frac{N^2\,(N-1)^2}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{N^4-2N^3+N^2}{4N^4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(N^4-2N^3+N^2)\,/N^4}{4N^4/N^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2/N+1/N^2}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit erhält man den Integralwert

$$\int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\,.$$

*Zusatz:* Beweis der Formel mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $N = 1$:

linke Seite: $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$

rechte Seite: $\dfrac{1^2\,(1+1)^2}{4} = 1$

Rechte Seite=linke Seite, daher gilt die Aussage für ein festes aber beliebiges $N$.

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N+1} k^3 &= (N+1)^3 + \sum_{k=1}^{N} k^3 = (N+1)^3 + \frac{N^2\,(N+1)^2}{4} \\
&= \frac{4\,(N+1)^3 + N^2\,(N+1)^2}{4} = \frac{(N+1)^2\,(4\,(N+1)+N^2)}{4} \\
&= \frac{(N+1)^2\,(4N+4+N^2)}{4} = \frac{(N+1)^2\,(N+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

### Zu Aufgabe H21:

**(a)** Der Mittelwersatz kann auf die Funktion $f$ angewendet werden, da sie auf dem vorgegebenen Intervall stetig ist. Das Integral hat den Wert

$$\int_{-2}^{2} \left(x^3 - x + 5\right)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_{-2}^{2} = 20\,.$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung sagt aus, dass ein $\xi \in [a,b]$ existiert, für dass gilt

$$\int_a^b \left(x^3 - x + 5\right) \,\mathrm{d}\,x = f(\xi)(b-a) ,$$

mit $a = -2$ und $b = 2$. Daher soll nun für $\xi \in [-2,2]$ gelten

$$\begin{aligned} f(\xi)(2-(-2)) &= 20 \\ f(\xi)\,4 &= 20 \\ f(\xi) &= 5 \\ \xi^3 - \xi + 5 &= 5 \\ \xi^3 - \xi &= 0 \\ \xi\left(\xi^2 - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ und $\xi_3 = 1$, die alle im vorgegebenen Intervall liegen.

**(b)** Mit dem erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \,\mathrm{d}\,x \leqq M \int_0^1 \sqrt{x} \,\mathrm{d}\,x = M\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = M\frac{2}{3}$$

mit $M = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{x+1}} \mid x \in [0,1]\right\}$. Die Funktion $f$ ist auf dem Intervall $[0,1]$ streng monoton fallend, nimmt sein Maximum also an der linken Intervallgrenze an. Daher ist $M = f(0) = 1$. Nun folgt die Abschätzung des Integrals.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \,\mathrm{d}\,x \leqq 1 \cdot \frac{2}{3}$$

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

**Höhere Mathematik II**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H22:**

**(a)** Wegen
$$\int_2^N \frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^N = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln N} \to \frac{1}{\ln 2}\ (N\to\infty)$$
existiert das uneigentliche Integral und hat den Wert $\frac{1}{\ln 2}$.

**(b)** Für $x \geqq 1$ sind $x$ und $\ln x$ nicht-negativ und streng monoton wachsend, also ist auch das Produkt von $x$, $\ln x$ und $\ln x$ streng monoton wachsend.

**(c)** Die Reihe konvergiert wegen (a), (b) und der Positivität des Summanden nach Satz 3.8.1..

**Zu Aufgabe H23:**

**(a)** Die Konvergenz der Reihe für $|x|<1$ folgt sofort z.B. mit dem Quotientenkriterium. Für $|x| \geqq 1$ divergiert die Reihe, da $n^2x^n$ dann für $n\to\infty$ nicht gegen $0$ konvergiert.

**(b)** Nach 3.8.8 erhält man durch gliedweises Differenzieren der geometrischen Reihe
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$$
für $|x|<1$. Diese Reihe konvergiert für $|x|<1$ absolut (Quotientenkriterium!), also dürfen wir dort nach Satz 3.8.4 erneut gliedweise differenzieren und erhalten
$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$$
für $|x|<1$. Da alle beteiligten Reihen für $|x|<1$ konvergieren, folgt durch Aufspalten
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= x^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}\end{aligned}$$
für $|x|<1$.

**Zu Aufgabe H24:** Wegen
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$
kann die Summe als Untersumme für
$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

mit $n$ äquidistanten Teilintervallen aufgefaßt werden. Mit

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \ln 2$$

folgt dann sofort die Behauptung.

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H25:**

**(a)** Für die Funktion berechnet man zuerst

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(1,2)$ und bildet das Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$. Mit der Bedingung, dass der Richtungsvektor die Länge eins haben muss, erhält man den zweiten Eintrag.

$$\nabla f_1\,(1,2) \bullet v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (2-4)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

**(b)** Auch hier berechnet man zuerst

$$\nabla f_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos\left(x^2\right)\, 2\,x \\ z\,e^y \\ e^y \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(0,0,1)$ und bildet danach das Sklarprodukt mit dem Richtungsvektor $v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t$. Der Richtungsvektor muss wieder die Länge eins haben.

$$\nabla f_2\,(0,0,1) \bullet v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = (1+2)\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

**(c)** Der Rechenweg ist analog zu den ersten beiden Teilen. Der Gradient

$$\nabla f_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x\,y\,z \\ e^x\,z \\ e^x\,y \end{pmatrix}$$

wird an der Stelle $(1,1,1)$ benötigt. Der Richtungsvektor ist $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

$$\nabla f_3\,(1,1,1) \bullet v = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = (e-e+e)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



Man will die Richtung $v = (x, y)^t$ des steilsten Anstiegs bestimmen. Dabei muss der Richtungsvektor $v$ normiert sein also $1 = x^2 + y^2$ sein. Aufgelöst nach $y$ ergibt dies $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, also ist der Richtungsvektor $v = \left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)^t$. Damit muss die folgende Funktion maximiert werden

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x \pm 4\sqrt{1-x^2}\,.$$

Ableiten nach $x$ ergibt

$$g'(x) = 2 \pm 4x\left(1-x^2\right)^{-1/2}\ .$$

Die Ableitung wird nun Null gesetzt und umgeformt:

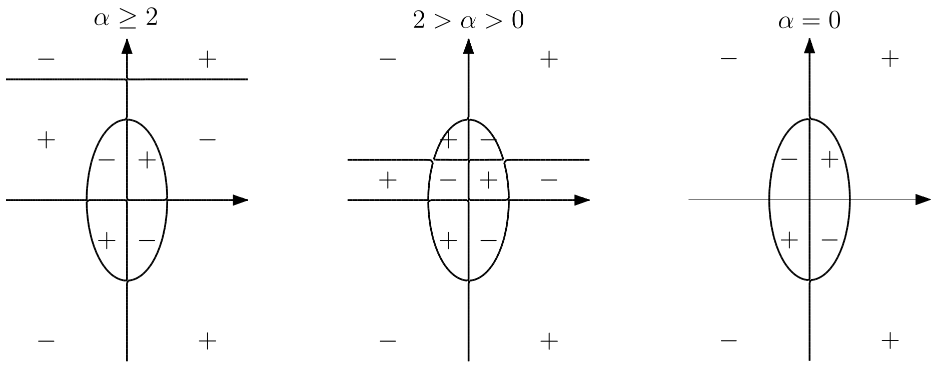
$$\begin{aligned}
2 \pm 4x\left(1-x^2\right)^{-1/2} &= 0\\
2 &= \mp 4x\left(1-x^2\right)^{-1/2}\\
4 &= 16x^2\left(1-x^2\right)^{-1}\\
4\left(1-x^2\right) &= 16x^2\\
4-4x^2 &= 16x^2\\
4 &= 20x^2\\
x^2 &= \frac{4}{20}
\end{aligned}$$

Somit muss $y^2 = \frac{16}{20}$ sein. Damit die Richtungsableitung am größten wird muss das Vorzeichen von $x$ positiv sein, da der Gradient in diese Richtung auch psoitiv ist, und das von $y$ negativ. Man erhält für die Richtung und den Wert:

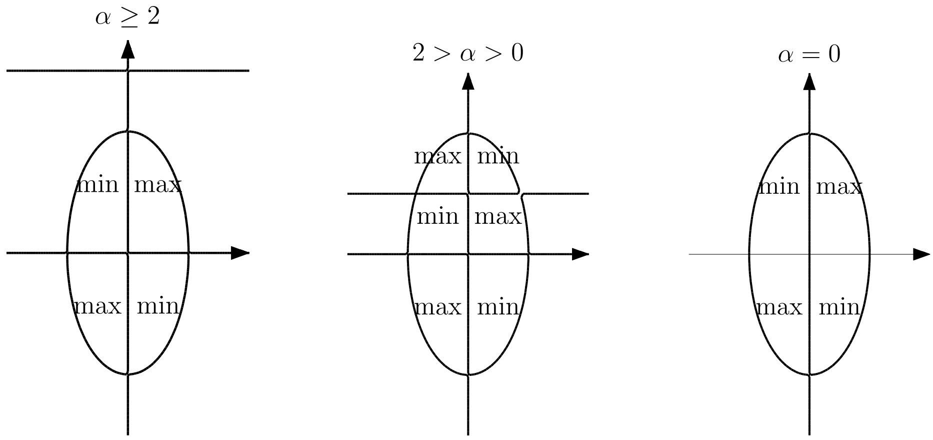
$$v = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 2\\ -4 \end{pmatrix} \qquad \partial_v f_1(1,2) = \frac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20}$$

**Zu Aufgabe H26:** Die Nullstellenmenge ist in den folgenden Bildern mit dicken Linien eingezeichnet, dabei gehört die $x$-Achse und die $y$-Achse ebenfalls zur Nullstellenmenge. Mit Hilfe vom Satz vom Minimum und Maximum weiß man, dass das Bild einer kompackten Menge ebenfalls kompakt ist. Daher wird auf einer kompakten Menge immer ein Minimum und Maximum angenommen. Untersucht man nun die Gebiete, die man durch Teilung an der Nullstellenmenge bekommt, so hat man innerhalb eines beschränkten positiven Gebietes ein Maximum. Das Minimum wäre in diesem Fall Null. Bei negativen beschränkten Gebieten ist es genau umgekehrt. Die Fälle $-2 < \alpha < 0$ und $\alpha \leqq -2$ wurden hier nicht abgebildet, da sie ähnlich aussehen wie $2 > \alpha > 0$ und $\alpha \geqq 2$.

Die Vorzeichenverteilung ist also:



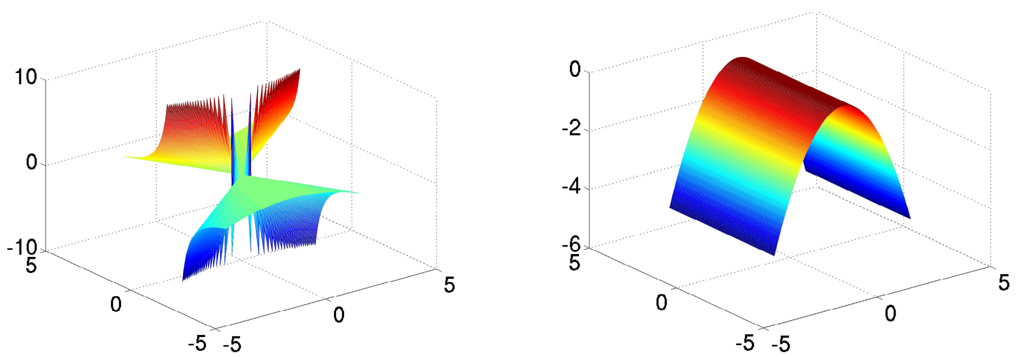

Es müssen Extremstellen in folgenden Gebieten sein:




### Zu Aufgabe H27:

**(a)** Die Multiindexnotation von der Funktion $f$ ist:
Zähler: $J = \{(2,0),(0,2)\}$ mit den Koeffizienten $a_{(2,0)} = 1$ und $a_{(0,2)} = 1$
Nenner: $J = \{(0,1)\}$ mit dem Koeffizienten $a_{(0,1)} = 2$
Die Multiindexnotation von der Funktion $g$ ist:
Zähler: $J = \{(2,1),(0,3)\}$ mit den Koeffizienten $a_{(2,1)} = -1$ und $a_{(0,3)} = 1$
Nenner: $J = \{(0,1)\}$ mit dem Koeffizienten $a_{(0,1)} = 2$

**(b)** Die beiden Graphen sehen folgendermaßen aus:



# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



**(c)** Für die Untersuchung der Stetigkeit wird bei der Funktion $f$ die beiden Folgen $a_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ und $b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)$ genommen. Beide Folgen konvergieren für $n \to \infty$ gegen $(0,0)$. Es gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 \neq \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} + \frac{1}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ .$$

Daher ist die Funktion im Punkt $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar. Bei allen anderen Punkten auf der $y$-Achse ist die Funktion unbeschränkt.

Die Funktion $g$ ist stetig fortsetzbar mit

$$\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x^2y + y^3}{2y} & y \neq 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} & y = 0 \end{cases} ,$$

da man bei der Grenzwertbetrachtung das $y$ aus dem Bruch kürzen kann.

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen



## Zu Aufgabe H28:

**(a)** $f_1$ ist differenzierbar: Klar für $(x, y) \neq (0, 0)$, da die Komposition differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar ist. Für $(x, y) = (0, 0)$ ist $f_1$ ebenfalls differenzierbar. Die Ableitung ist die Nullabbildung, denn

$$\begin{aligned}
|f_1(x, y) - f_1(0, 0) - 0 \cdot x - 0 \cdot y| &= \left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \\
&= \left|r^2 \sin \frac{1}{r}\right| = o(r) \quad (r \to 0)
\end{aligned}$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|$.

**(b)** Wie in (a) ist $f_2$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ differenzierbar. Für $(x, y) = (0, 0)$ beachten wir zunächst, daß die beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_2(h, 0) - f_2(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} f_2(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_2(0, h) - f_2(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

existieren. Aber die Richtungsableitung in Richtung $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h\frac{\sqrt{2}}{2}, h\frac{\sqrt{2}}{2}) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} h^3/(2h^2) - 0}{h} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Wäre $f_2$ in $(0, 0)$ differenzierbar, so müßte die Richtungsableitung in Richtung $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ den Wert

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_2(0, 0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} f_2(0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

haben, ein Widerspruch.

## Zu Aufgabe H29:

**(a)** Um die schneller errechnen zu können, bestimmen wir nicht die Taylorentwicklung von $f_1$ direkt, sondern schreiben $f_1 = x^2 \cdot g(x, y)$ mit $g(x, y) = \sin \frac{xy}{2}$. Danach berechnen wir die Taylorentwicklungen getrennt für die beiden Faktoren und multiplizieren anschliessend.

Es gilt

$$x^2 = (x - 1 + 1)^2 = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1 = T_2(x^2, (x, y), (1, \pi))$$

und für $g = \sin\frac{xy}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned} g(1,\pi) &= 1, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{y}{2}\cos\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial g}{\partial x}(1,\pi) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{x}{2}\cos\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial g}{\partial y}(1,\pi) = 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\frac{y^2}{4}\sin\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,\pi) = -\frac{\pi^2}{4}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2}\cos\frac{xy}{2} - \frac{xy}{4}\sin\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,\pi) = -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= -\frac{x^2}{4}\sin\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,\pi) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &((x-1)^2 + 2(x-1) + 1)(1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-1)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2) \\ &= 1 + 2(x-1) + (1 - \frac{\pi^2}{8})(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-1)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2 + \text{Terme vom Grad 3 und größer.} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$T_2(f,(x,y),(1,\pi)) = 1 + 2(x-1) + (1 - \frac{\pi^2}{8})(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-1)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2$$

**(b)** Es gilt

$$\begin{aligned} y^4 &= (y-1+1)^4 = (y-1)^4 + 4(y-1)^3 + 6(y-1)^2 + 4(y-1) + 1, \\ x^3 &= (x-1+1)^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1, \\ xy^2 &= (x-1+1)(y-1+1)^2 = (x-1)((y-1)^2 + 2(y-1) + 1) \\ &+ (y-1)^2 + 2(y-1) + 1. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &= -1 - 2(y-1) + 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 - 6(x-1)(y-1) \\ &+ (x-1)^3 + 4(y-1)^3 - 3(x-1)(y-1)^2 + (y-1)^4. \end{aligned}$$

Eine alternative Lösung bekommt man dadurch, dass man die höheren Potenzen der Taylorformel tatsächlich ausrechnet. Dies erfolgt nach der im Skript in 4.4.9 vorgestellten Methode:
Wir setzen $h := (h_1, h_2)^\mathsf{T}$ und schreiben $x = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$, $g := f_2$ und $a = (1,1)^\mathsf{T}$. Aus 4.4.9 wissen wir, dass

$$G(a) := \partial_h^2\, g(a) = \sum_{i=1}^{2} \left( \sum_{j=1}^{2} h_j g_{x_i x_j}(a) \right) h_i$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\partial_h^3\, g(a) &= \partial_h\, G(a) = \begin{pmatrix} G_{x_1}(a) \\ G_{x_2}(a) \end{pmatrix} \cdot h \\
&= \begin{pmatrix} \left( \sum\limits_{i=1}^{2} \left( \sum\limits_{j=1}^{2} h_j g_{x_i x_j} \right) h_i \right)_{x_1} (a) \\ \left( \sum\limits_{i=1}^{2} \left( \sum\limits_{j=1}^{2} h_j g_{x_i x_j} \right) h_i \right)_{x_2} (a) \end{pmatrix} \cdot h \\
&= \sum_{k=1}^{2} \left( \sum_{i=1}^{2} \left( \sum_{j=1}^{2} h_j g_{x_i x_j x_k}(a) \right) h_i \right) h_k
\end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten gilt

$$\partial_h^4\, g(a) = \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} h_i h_j h_k h_l \cdot g_{x_i x_j x_k x_l}(a)$$

Nun kann man diese Summen natürlich noch ausrechnen und erhält mit $h = (x, y)^{\mathsf{T}}$:

$$\begin{aligned}
\partial_h^3\, f_2(1,1) &= 6x^3 - 18xy^2 + 24y^3 \\
\partial_h^4\, f_2(1,1) &= 24y^4
\end{aligned}$$

Nun erhält man durch einsetzen in die Taylorformel das selbe Ergebnis wie oben. Terme der Ordnung 5 oder höher müssen wir nicht betrachten, denn diese sind bei einem Polynom vom Grad 4 auf jeden Fall 0.

**Zu Aufgabe H30:** Bezeichne $l$ die Seitenlänge der unteren Seite des Trapezes. Die obere Seitenlänge ist dann $l + \frac{h}{\tan\alpha}$. Ferner erhält man für den Flächeninhalt des Trapezes

$$F = hl + \frac{h^2}{\tan\alpha}$$

und für den benetzten Umfang

$$U = l + 2\frac{h}{\sin\alpha}.$$

Also

$$l = \frac{F - h^2/\tan\alpha}{h} = \frac{F}{h} - \frac{h}{\tan\alpha}$$

und damit

$$U = \frac{F}{h} - \frac{h}{\tan\alpha} + \frac{2h}{\sin\alpha}.$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum ist $\nabla U(h,\alpha) = \mathbf{0}$, d.h.

$$\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{F}{h^2} - \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha} = 0 \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \alpha} &= h\left(-\frac{d}{d\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = 0, \text{ also} \\
0 &= -\frac{-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
&= \frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha},
\end{aligned}$$

also $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ und damit $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (aus der Geometrie ist klar: $\alpha > 0$, damit Minimum!). In (2) eingesetzt, erhalten wir

$$-\frac{F}{h^2} - \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} + \frac{2}{\sqrt{3}/2} = 0,$$

also

$$F = h^2\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = h^2\sqrt{3}$$

und damit

$$h = \frac{F^{1/2}}{3^{1/4}}.$$

Da wir nur diese eine kritische Stelle gefunden haben und $U(h,\alpha)$ für $\alpha \to 0$ oder $h \to \infty$ über alle Schranken wächst, muß es sich um das absolute Minimum handeln.

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

**Zu Aufgabe H31:**

**(a)** Der quadratische Abstand des Punktes $P = (x, y, z)$ vom Punkt $A = (0, 0, 0)$ ist

$$d_A = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 .$$

Der quadratische Abstand von den drei anderen Punkten ergibt sich ebenso

$$\begin{aligned} d_B &= (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 , \\ d_C &= (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2 , \\ d_D &= (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Summe $S$

$$\begin{aligned} S = d_A + d_B + d_C + d_D &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 6y - 8z + 29 . \end{aligned}$$

Somit erhält man die Funktion $f$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 6y - 8z + 29 .$$

**(b)** Der Gradient ist also

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8x-4 \\ 8y-6 \\ 8z-8 \end{pmatrix} .$$

Durch Nullsetzen erhält man

$$\begin{aligned} 8x - 4 = 0 &\quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1}{2} \\ 8y - 6 = 0 &\quad\Longrightarrow\quad y = \frac{3}{4} \\ 8z - 8 = 0 &\quad\Longrightarrow\quad z = 1 . \end{aligned}$$

Dies muss aus anschaulichen Gründen ein Minimum sein, da die Zielfunktion $f$ unbeschränkt ist. Daher ist das Minimum bei $R_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$.

**(c)** Hier wird die Lagrange-Multiplikator-Methode angewendet. Somit bekommt man die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 8x - 4 + \lambda = 0 &\quad\Longrightarrow\quad \lambda = -8x + 4 \\ 8y - 6 + \lambda = 0 &\quad\Longrightarrow\quad \lambda = -8y + 6 \\ 8z - 8 + \lambda = 0 &\quad\Longrightarrow\quad \lambda = -8z + 8 . \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzten ist

$$y = x + \frac{1}{4}, \qquad z = x + \frac{1}{2}.$$

Dies setzt man in die Nebenbedingung ein

$$x + x + \frac{1}{4} + x + \frac{1}{2} = 3x + \frac{3}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}.$$

Damit ist

$$y = 0 \qquad \text{und} \qquad z = \frac{1}{4}.$$

Zusammengefasst also $R_2 = \left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

**Zu Aufgabe H32:**

**(a)** Die Definitionsbereiche sind:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mathbb{R} \\ D_2 &= \left(\mathbb{R}_0^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})\right) \setminus \{(0,0)\} \end{aligned}$$

**(b)** Die Jacobi-Matrizen sind:

$$Jf_1(x) = \begin{pmatrix} e^x\,(\cos(x) - \sin(x)) \\ e^x\,(\cos(x) + \sin(x)) \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$Jf_1(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(y^2-1)} & -\dfrac{2y\sqrt{x}}{(y^2-1)^2} \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

**Zu Aufgabe H33:**

**(a)** Mit der Lagrange-Multiplikator-Methode bekommt man das folgende Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

$$y + 1 + 2\lambda x = 0 \tag{2}$$

$$x + 2\lambda y = 0\,. \tag{3}$$

Aus Gleichung (3) bekommt man für $y \neq 0$

$$2\lambda = \frac{-x}{y}.$$

$y$ kann nicht Null werden, da ansonsten aufgrund Gleichung (3) auch $x = 0$ sein müsste. Dies kann wegen der Nebenbedingung nicht eintreten. Einsetzen von $\lambda$ in Gleichung (2) ergibt

$$\begin{aligned} y + 1 - \frac{x^2}{y} &= 0 \\ y^2 + y - x^2 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y^2 + y\,. \end{aligned}$$

Dies setzt man nun in (1) ein und löst nach $y$ auf.

$$y^2 + y + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1 \text{ und } y_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Insgesamt also

$$P_1 = (0, -1)\ , \quad P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{oder} \quad P_3 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Durch einsetzen in die Funktion bekommt man die Extrema:

$$f\,(0,-1) = 0\,, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{3}\,.$$

Das relative Minimum wird also am Punkt $P_3$ und das relative Maximum am Punkt $P_2$ angenommen.

**(b)** Aulösen der Nebenbedingung nach $y$ ergibt

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Einsetzen in die Funktion $f$ und differenzieren ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \pm x\sqrt{1 - x^2} + x \\ f' &= \pm\left(1 - x^2\right)^{1/2} \mp x^2\left(1 - x^2\right)^{-1/2} + 1\,. \end{aligned}$$

Nun setzt man die Ableitung Null und löst nach $x$ auf

$$\begin{aligned} \pm\left(1 - x^2\right) \mp x^2 + \left(1 - x^2\right)^{-1/2} &= 0 \\ \pm\left(1 - 2x^2\right) &= -\left(1 - x^2\right)^{-1/2} \\ \left(1 - 2x^2\right)^2 &= 1 - x^2 \\ 1 - 4x^2 + x^4 &= 1 - x^2 \\ 4x^4 - 3x^2 &= 0 \\ 4x^2\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Damit bekommt man nun dieselben Punkte wie im ersten Teil. Nun müssen noch die Punkte $P_4 = (1, 0)$ und $P_5 = (-1, 0)$ untersucht werden. Hier nimmt die Funktion die Werte $1$ und $-1$ an. Da sie zwischen den beiden Extrema liegen, sind dies keine Extremstellen.

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil



Prof. Dr. M. Stroppel

# Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Sommer 2007

## zu Aufgabe H 34

**(a)** Die Funktionen $e^y$ und $\sin(xz)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ definiert. Die einzige Problemstellen sind also die Stellen, an denen $\frac{1}{zy}$ nicht definiert ist, weil der Nenner $0$ ist. Für $y = 0$ ist die Funktion auch nicht stetig fortsetzbar, weil ein Grenzwert nicht existiert. Für $z = 0$ gilt dies allerdings nicht, denn der Grenzwert

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(xz)}{zy} = \frac{x}{y}$$

existiert. Damit ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \times \mathbb{R}$.

**(b)** Die Jacobi-Matrix für $z \neq 0$ ist

$$\mathrm{J}f\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ \frac{1}{y}\cos(xz)e^y & (1-\frac{1}{y})\frac{1}{zy}\sin(xz)e^y & (x-\frac{1}{z})\frac{x}{zy}\cos(xz)e^y \end{pmatrix}.$$

Den Fall $z = 0$ müssen wir einzeln betrachten, denn die partiellen Ableitungen sind in diesem Fall nicht stetig. Wir berechnen die partielle Ableitung nach $z$ im Punkt $(x_0, y_0, 0)$ durch die Richtungsableitung

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{y_0 h}\sin(x_0 h)e^{y_0} - \frac{x_0}{y_0}e^{y_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{y_0}\sin(x_0 h) - \frac{x_0}{y_0}h}{h^2} e^{y_0} = 0$$

Daher lautet die Jacobi-Matrix an der Stelle $(x_0, y_0, 0)$:

$$\mathrm{J}f\,(x_0,y_0,0) = \begin{pmatrix} 2x_0y_0 & x_0^2 & 0 \\ \frac{1}{y_0}e^{y_0} & (1-\frac{1}{y_0})\frac{x_0}{y_0}e^{y_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

## zu Aufgabe H 35

**(a)** Um die Tangentialebene in einem Punkt bestimmen zu können, brauchen wir den Gradienten $\operatorname{grad} f$ an dieser Stelle, denn dieser liefert den Normalenvektor der Ebene.

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x - 1 - y - \frac{3}{4}x(x^2+y^2) \\ 2y - 1 - x - \frac{3}{4}y(x^2+y^2) \\ 2z \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für den Punkt $(a, a, 0)$, dass

$$\operatorname{grad} f(a,a,0) = \begin{pmatrix} a - 1 - \frac{3}{2}a^3 \\ a - 1 - \frac{3}{2}a^3 \\ 0 \end{pmatrix} = (a - 1 - \frac{3}{2}a^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Gleichung der Ebene (in Hessescher Normalform) als wenn man $a$ durch seinen Wert ersetzt:

$$E : \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{-1-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}} = 0$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

**(b)** Der Abstand eines Punktes von der Ebene ist $d(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{-1-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$. Wir minimieren diese Funktion unter der Nebenbedingung $f(x,y,z)=0$. Wir setzen mit Lagrange an:

$$\lambda \operatorname{grad} d + \operatorname{grad} f = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x-1-y-\frac{3}{4}x(x^2+y^2) \\ 2y-1-x-\frac{3}{4}y(x^2+y^2) \\ 2z \end{pmatrix} = 0$$

Daraus schliessen wir sofort $z=0$ und erhalten weiter die Gleichung

$$2x - y - \frac{3}{4}x(x^2+y^2) = -x + 2y - \frac{3}{4}y(x^2+y^2)$$

Dies kann man umformen zu

$$(x-y)(3-\frac{3}{4}(x^2+y^2)) = 0$$

Also müssen wir die Fälle $x=y$ und $x^2+y^2=4$ betrachten. Der erste Fall führt zur Lösung $(a,a,0)$, also dem Aufpunkt der Tangetialebene, der mit Abstand $0$ natürlich ein Extremum ist, allerdings ein Minimum. Also betrachten wir $x^2+y^2=4$ weiter und setzen in die Nebenbedingung ein. Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4 \\ -x-y-xy+2 &= 0 \end{aligned}$$

Durch einsetzen der einen Gleichung in die andere erhält man $y^4+2y^3-2y^2-12y=0$. Die Lösung $y=0$ ist offensichtlich und die Lösung $y=2$ leicht zu raten. Was übrigt nach der Polynomdivision übrig bleibt, nämlich $y^2+4x+6$ hat keine reellen Lösungen. Damit bleiben als mögliche Extremwerte die Punkte $(2,0,0)$ und $(0,2,0)$. Durch Einsetzen in $d$ erhalten wir in beiden Fällen den Abstand $\frac{2\sqrt{3}+1+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$.

## zu Aufgabe H 36

Die Funktion besitzt genau dann ein Potential, wenn ihre Rotation Null ist. Also berechnen wir

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x - e^x \\ 2\alpha^2 y - 2y \end{pmatrix}$$

Die Rotation ist also genau dann Null, wenn $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$.

In diesen Fällen gibt es also eine Potentialfunktion $U : \mathbb{R}^3 \to R$ mit $U_x = f_1$, $U_y = f_2$ und $U_z = f_3$. Wir wissen damit

$$U(x,y,z) = \int f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + g(y,z) = \alpha^2 xy^2 - ze^x + g(y,z)$$

Durch partielles ableiten nach $y$ erhalten wir:

$$U_y = 2\alpha^2 xy + \frac{\partial}{\partial y} g(y,z) = 2xy + 2\alpha = f_2$$

Damit folgt $g(y,z) = 2\alpha y + h(z)$. Ableiten nach $z$ zeigt dann, dass

$$U(x,y,z) = \alpha^2 xy^2 - ze^x + 2\alpha y + const$$

unser gesuchtes Potential in den Fällen $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ ist.