Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Prof. Dr. M. Stroppel

Sommer 2008

Zu Aufgabe H1:

(a) Diese Reihe lässt sich auf eine geometrische Reihe zurückfuhren:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5}\frac{2^k}{5^k} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$$

(b) Anwenden des Quotientenkriteriums liefert:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3^{k+1}}{\sqrt{5^{k+1}}(k+3)}\frac{\sqrt{5^k}(k+2)}{3^k}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}\lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{k+3} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Diese Reihe divergiert also, da $\frac{3}{\sqrt{5}} > 1$ gilt.

(c) Partialbruchzerlegung liefert:

$$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}.$$

Da $\dfrac{1}{2k+3} = \dfrac{1}{2(k+1)+1}$ gilt, handelt es sich um eine Teleskopsumme, es gilt also:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+3}\\ &= \frac{1}{1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+3}}_{=0} - \frac{1}{2n+3}\end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3} = 1.$$

Zu Aufgabe H2:

(a)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist eine alternierende Reihe mit

  $$|a_n| = \left|\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right| = \frac{1}{n^n},$$

  d. h. $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monotone Nullfolge und die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium damit konvergent.
- Für das Quotienten-Kriterium ergibt sich

  $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)} = 0 < 1,$$

  damit ist die Reihe nach dem Quotienten-Kriterium (absolut) konvergent.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

- Für das Wurzel-Kriterium ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

damit ist die Reihe auch nach dem Wurzel-Kriterium (absolut) konvergent.

(b)
- Wegen $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ist auch dies eine alternierende Reihe und

$$|a_n| = \left|\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n+\frac{1}{n}},$$

d. h. $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monotone Nullfolge und die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium damit konvergent.

- Für das Quotienten-Kriterium ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}} = 1,$$

d. h. mit dem Quotienten-Kriterium läßt sich keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

- Für das Wurzel-Kriterium ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} = 1,$$

d. h. auch mit dem Wurzel-Kriterium läßt sich keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

(c)
- Dies ist keine alternierende Reihe, deshalb läßt sich hier mit dem Leibniz-Kriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.
- Für das Quotienten-Kriterium ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

damit ist die Reihe nach dem Quotienten-Kriterium (absolut) konvergent.

- Für das Wurzel-Kriterium ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

damit ist die Reihe auch nach dem Wurzel-Kriterium (absolut) konvergent.

(d)
- Dies ist keine alternierende Reihe, deshalb läßt sich hier mit dem Leibniz-Kriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

- Für das Quotienten-Kriterium ergibt sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2+(-1)^{n+1})2^n}{2^{n+1}(2+(-1)^n)} = \begin{cases} \frac{1}{6} < 1, n \text{ gerade} \\ \frac{3}{2} > 1, n \text{ ungerade} \end{cases},$$

  d. h. mit dem Quotienten-Kriterium läßt sich keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

- Für das Wurzel-Kriterium ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

  damit ist die Reihe nach dem Wurzel-Kriterium (absolut) konvergent.

Zu Aufgabe H3:

(a) Die Funktionen f_1 und f_2 sind auf gesamt $\mathbb{R}$ definiert, d. h. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$. Für die Funktion f_3 erhält man den Definitionsbereich $D_3 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, da sonst der Nenner den Wert 0 annimmt. Für f_4 erhält man schließlich den maximalen Definitionsbereich $D_4 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z} : 2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi\right\}$, damit das Argument der Wurzelfunktion nicht negativ wird.

(b)
- Die Funktion f_1 ist als Verkettung von stetigen Funktionen wieder stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Für $x \to 0$ ergibt sich

$$f_1(x) \to 0 = f(0) \text{ für } x \uparrow 0$$
$$f_1(x) \to \infty \text{ für } x \downarrow 0,$$

  d. h. f_1 ist bei 0 links- aber nicht rechtsseitig stetig (und damit unstetig).

- Die Funktion f_2 ist als konstante Funktion auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig. Für $x \to 0$ ergibt sich

$$f_2(x) \to -1 \text{ für } x \uparrow 0$$
$$f_2(x) \to 1 \text{ für } x \downarrow 0,$$

  d. h. f_2 ist bei 0 weder links- noch rechtsseitig stetig (und damit unstetig).

- Die Funktion f_3 ist als rationale Funktion auf $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ stetig, da dort der Nenner nicht 0 wird. Für die Stellen $-1, 0, 1$ erhält man

$$\lim_{x\uparrow 1} f_3(x) = \lim_{x\uparrow 1} \frac{1}{x} = 1 = f_3(1) = \lim_{x\downarrow 1} f_3(x)$$
$$\lim_{x\uparrow -1} f_3(x) = \lim_{x\uparrow -1} \frac{1}{x} = -1 \lim_{x\downarrow -1} f_3(x)$$

  und

$$f_3(x) \to -\infty \text{ für } x \uparrow 0$$
$$f_3(x) \to \infty \text{ für } x \downarrow 0\,.$$

Damit ist f_3 bei 1 stetig, bei -1 weder links- noch rechtsseitig stetig (und damit unstetig). Zusätzlich erkennt man, dass f_3 bei 0 weder rechts- noch linksseitig stetig fortsetzbar ist.

- Die Funktion f_4 ist als Verkettung von stetigen Funktionen auf dem Innern des Definitionsbereichs wiederum stetig. Für die Randpunkte des Definitionsbereichs erhält man mit $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \downarrow 2k\pi} f_4(x) = 0 = f_4(2k\pi)$$
$$\lim_{x \uparrow (2k+1)\pi} f_4(x) = 0 = f_4((2k+1)\pi)$$

d. h. f_4 ist an den Randpunkten $x = 2k\pi$ rechtsseitig und an den Randpunkten $x = (2k+1)\pi$ linksseitig stetig.

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Zu Aufgabe H4: Mit $a = 0$ und $b = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$f(a) \cdot f(b) = f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

und da f auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig ist, muss f in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle besitzen. Man setzt $a_1 = a = 0$ und $b_1 = b = \frac{\pi}{2}$ und erhält

$$f(a_1) \cdot f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -0.078 < 0,$$

damit ist $a_2 = 0$ und $b_2 = \frac{\pi}{4}$. Im nächsten Schritt erhält man

$$f(a_2) \cdot f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right) = f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0.531 > 0,$$

damit ist $a_3 = \frac{\pi}{8}$ und $b_3 = \frac{\pi}{4}$. Im nächsten Schritt erhält man

$$f(a_3) \cdot f\left(\frac{a_3 + b_3}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot f\left(\frac{3\pi}{16}\right) \approx 0.129 > 0,$$

damit ist $a_4 = \frac{3\pi}{16}$ und $b_4 = \frac{\pi}{4}$. Im nächsten Schritt erhält man

$$f(a_4) \cdot f\left(\frac{a_4 + b_4}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{16}\right) \cdot f\left(\frac{7\pi}{32}\right) \approx 0.021 > 0,$$

damit ist $a_5 = \frac{7\pi}{32}$ und $b_5 = \frac{\pi}{4}$. Im letzten Schritt erhält man

$$f(a_5) \cdot f\left(\frac{a_5 + b_5}{2}\right) = f\left(\frac{7\pi}{32}\right) \cdot f\left(\frac{15\pi}{64}\right) \approx 0.0004 > 0,$$

damit ist die Nullstelle im Intervall $[\frac{15\pi}{64}, \frac{\pi}{4}]$, wobei die Länge des Intervalls $\frac{\pi}{64} < 0.05$ beträgt.

Zu Aufgabe H5:

(a) Mit dem Wurzelkriterium erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|5^k|} = \lim_{k\to\infty} 5 = 5,$$

d. h. der Konvergenzkreis ist der Ursprungskreis mit Radius $1/5$.

(b) Mit dem Quotientenkriterium erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^2 + (k+1) + 1}{k^2 + k + 1}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2 + 3k + 3}{k^2 + k + 1} =$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 + 3/k + 3/k^2}{1 + 1/k + 1/k^2} = 1,$$

d. h. der Konvergenzkreis ist der Kreis um i mit Radius 1.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

(c) Mit dem Wurzelkriterium erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

d. h. der Konvergenzkreis ist die gesamte komplexe Zahlenebene.

(d) Mit dem Quotientenkriterium erhält man

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)!}{k!}\right| = k+1 \to \infty \text{ für } k \to \infty,$$

d. h. der Konvergenzkreis ist nur der Punkt -1.

Zu Aufgabe H6:

(a) Für $\cosh(x)$ erhält man den folgenden Definitions- und Wertebereich:

$$D = (-\infty,\, \infty)\ , \quad W = [1,\, \infty)$$

Für $\sinh(x)$ erhält man den folgenden Definitions- und Wertebereich:

$$D = (-\infty,\, \infty)\ , \quad W = (-\infty,\, \infty)$$

(b) Für $\cosh(x)$ bekommt man für $f(-x)$

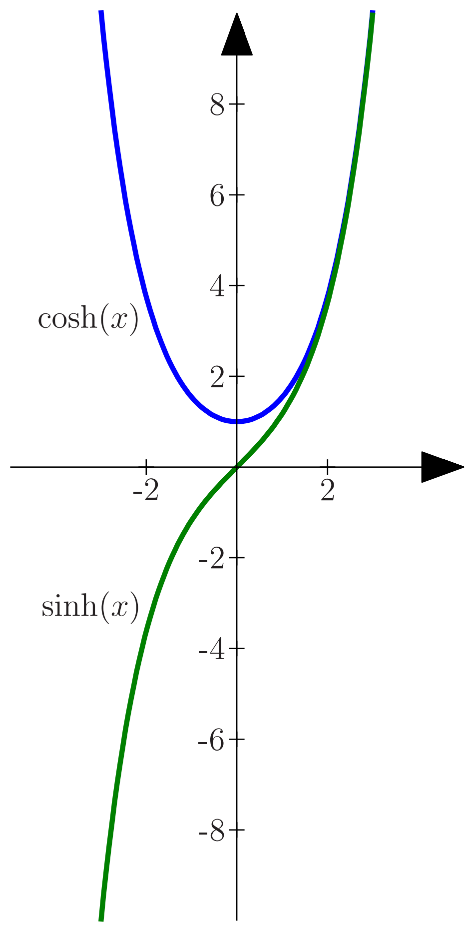
$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x\,,$$

also ist $\cosh(x)$ symmetrisch zur y-Achse. $\sinh(x)$ ist mit

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

punktsymmetrisch zum Ursprung.

(c) Bild von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$:



(d) Man berechnet die Potenzreihen mit der Reihendarstellung von

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

Damit erhält man

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} .$$

Es fallen die ungeraden Potenzen weg und die geraden Potenzen stehen bei beiden Summen, insgesamt bekommt man die Potenzreihe

$$\cosh(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} .$$

Bei $\sinh(x)$ verläuft die Rechnung annalog, nur hier fallen die geraden Potenzen weg und die ungeraden Potenzen bleiben bei beiden Summanden stehen:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

(e) Man ersetzt $\cosh(x)$ durch $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x)$ durch $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ und vereinfacht diesen Term:

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1$$

Zusatz: Wie die Exponentialfunktion sind auch $\cosh$ und $\sinh$ auf gesamt $\mathbb{C}$ definiert. Auch die Ergebnisse von **(d)** und **(e)** übertragen sich direkt ins Komplexe.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H7:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f_1(x) = -\sin(x^3 + 5e^x + \pi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^3 + 5e^x + \pi) = -\sin(x^3 + 5e^x + \pi)(3x^2 + 5e^x)$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f_2(x) &= e^{\arctan(\cos(x))}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arctan(\cos(x)) \\
&= e^{\arctan(\cos(x))}\frac{1}{1+(\cos(x))^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos(x) \\
&= -e^{\arctan(\cos(x))}\frac{1}{1+(\cos(x))^2}\sin(x)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f_3(x) &= \cos(x)(\cos(x)\tan(x)) + \sin(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos(x)\tan(x) \\
&= (\cos(x)^2)\tan(x) + \sin(x)\left(-\sin(x)\tan(x) + \cos(x)\frac{1}{(\cos(x)^2)}\right) \\
&= (\cos(x)^2)\tan(x) - (\sin(x))^2\tan(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \cos(x)\sin(x) + \left(-(\sin(x))^2 + 1\right)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2\cos(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= \frac{\cos(x) - (\sin(x))^2\cos(x)}{\frac{(\sin(x))^2}{(\tan(x))^2}} \\
&= \frac{\cos(x)(1-(\sin(x))^2)}{\frac{(\sin(x))^2}{\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}}} \\
&= \frac{\cos(x)(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} \\
&= \cos(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f_4(x) &= -\sin(x)
\end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

(e)

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\frac{x^4-1}{x+1}\ln(x^3)\\
&= (x-1)(x^2-1)\ln(x^3)\\
&= (x^3-x-x^2+1)3\ln(x)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f_5(x) &= 3(3x^2-2x-1)\ln(x)+\frac{3(x^3-x-x^2+1)}{x}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe H8: Substituiert man $y = 2x^2$ in der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y^k$ der Funktion $y \mapsto \frac{1}{1-y}$, so erhält man die gesuchte Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(2x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$$

von f. Da die geometrische Reihe für $|y| < 1$ konvergiert und für $|y| \geqq 1$ divergiert, konvergiert die Potenzreihe von f für

$$|2x^2| < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und divergiert für

$$|2x^2| \geqq 1 \qquad \text{bzw.} \qquad |x| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Zu Aufgabe H9:

(a) Nach der *Formel von Euler und de Moivre* ist $e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ und damit gilt $e^{-\mathrm{i}z} = \cos(-z) + \mathrm{i}\sin(-z) = \cos(z) - \mathrm{i}\sin(z)$. Daraus folgt

$$\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2} = \frac{\cos(z)+\mathrm{i}\sin(z)+\cos(z)-\mathrm{i}\sin(z)}{2} = \cos(z)$$

und

$$\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\cos(z)+\mathrm{i}\sin(z)-\cos(z)+\mathrm{i}\sin(z)}{2\mathrm{i}} = \sin(z)\,.$$

(b) Mit obigen Formeln ergibt sich

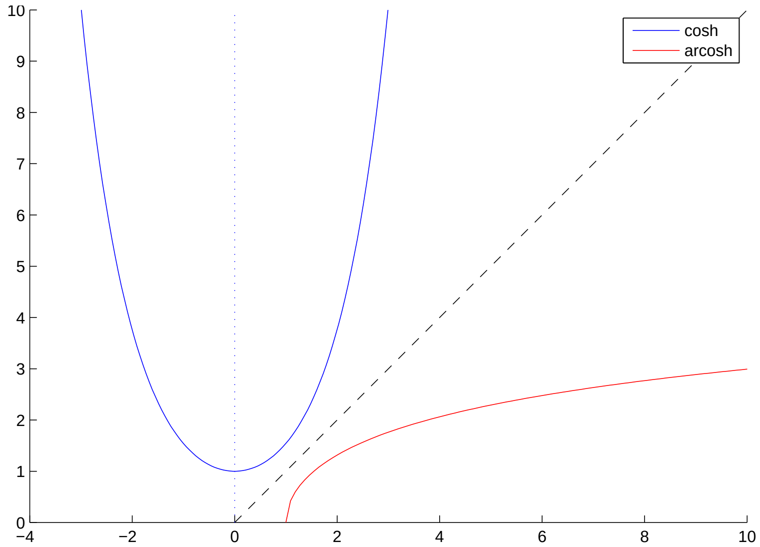
$$\begin{aligned}
\cos^2(z)+\sin^2(z) &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2\\
&= \frac{e^{2\mathrm{i}z}+2+e^{-2\mathrm{i}z}-e^{2\mathrm{i}z}+2-e^{-2\mathrm{i}z}}{4}\\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H10:

(a) Die Funktion $\cosh$ ist auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend und stetig mit dem Wertebereich $[1,\infty)$, deshalb existiert die Umkehrfunktion arcosh auf $[1,\infty)$ mit dem Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$.



(b) Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cosh(y)\Big|_{y=\operatorname{arcosh}(x_0)}} = \frac{1}{\sinh(y)|_{y=\operatorname{arcosh}(x_0)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\cosh(y))^2-1}\Big|_{y=\operatorname{arcosh}(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2-1}}\,.$$

(c) Für $y \in [1,\infty)$ erhält man aus

$$y = \cosh(x) = \frac{e^x + 1/e^x}{2}$$

durch die Substitution $\tilde{x} := e^x$ und nach Multiplikation mit $\tilde{x}$

$$\tilde{x}y = \frac{\tilde{x}^2+1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\tilde{x}^2 - y\tilde{x} + \frac{1}{2} = 0$$

Letztere Gleichung lässt sich mit der Mitternachtsformel lösen. Es ergeben sich Lösungen

$$\tilde{x} = \frac{y+\sqrt{y^2-1}}{1} \quad \text{oder} \quad \tilde{x} = \frac{y-\sqrt{y^2-1}}{1}$$

Anhand des Schaubilds erkennt man, dass nur die erste Lösung in Betracht kommt und somit ist

$$x = \operatorname{arcosh}(y) = \ln(\tilde{x}) = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\,.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Entsprechend erhält man für beliebige $y \in \mathbb{R}$ aus

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - 1/e^x}{2}$$

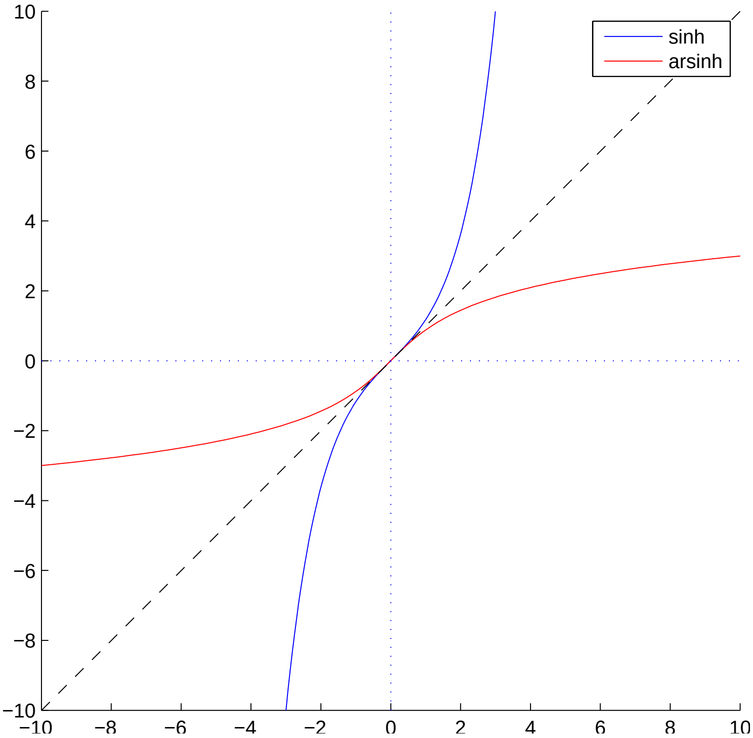
durch die Substitution $\tilde{x} = e^x$ und nach Multiplikation mit $\tilde{x}$

$$\tilde{x}y = \frac{\tilde{x}^2 - 1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\tilde{x}^2 - y\tilde{x} - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Wieder erhält man Lösungen

$$\tilde{x} = \frac{y + \sqrt{y^2+1}}{1} \quad \text{oder} \quad \tilde{x} = \frac{y - \sqrt{y^2+1}}{1}\,.$$

Wie oben erkennt man anhand des Schaubilds,



dass nur die erste Lösung zu berücksichtigen ist, und somit ergibt sich

$$x = \operatorname{arsinh}(y) = \ln(\tilde{x}) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\,.$$

(d) Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{1 + \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2-1}}}{x_0 + \sqrt{x_0^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2-1}}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x)\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\bigg|_{x=x_0} = \frac{1+\frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2+1}}}{x_0+\sqrt{x_0^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$$

im Einklang mit obigem Ergebnis und 2.3.3.

Zu Aufgabe H11:
Bei allen Teilaufgaben treten (evtl. nach Umformung) Grenzwerte der Form „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ auf, diese Voraussetzung der Regel von l´Hospital ist also erfüllt.

(a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)} \overset{\text{l´Hospital}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{1/x} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} \overset{\text{l´Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2x} \overset{\text{l´Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} \overset{\text{l´Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\cos(x)+\sin(x)}$$

$$\overset{\text{l´Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = 0$$

(d) Mit $f(x)=x^2\cos(1/x)$ und $g(x)=\sin(x)$ ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)},$$

wobei dieser Quotient keinen Grenzwert für $x\to 0$ besitzt, die Regel von l´Hospital ist also nicht anwendbar. Es ist aber

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\to 1}\underbrace{\left(x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{\to 0} = 0\,.$$

(e) Da die Ableitung von $\sinh$ wieder $\cosh$ ist und umgekehrt und sowohl $\sinh(x)$ als auch $\cosh(x)$ für $x\to\infty$ gegen Unendlich streben, ist auch hier die Regel von l´Hospital nicht anwendbar. Mit der Definition von H6 ist aber

$$\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(\mathrm{x})}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1\,.$$

(f) Es ist

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln(x^x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln(x)}$$

und mit l´Hospital (vgl. 2.5.8)

$$= e^0 = 1\,.$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H12:
Die für das Taylorpolynom von f benötigten Werte sind

$$\begin{array}{lll} f^{(0)}(x)|_{x=0} = 0, & f^{(1)}(x)|_{x=0} = 4, & f^{(2)}(x)|_{x=0} = 20, \\ f^{(3)}(x)|_{x=0} = 60, & f^{(4)}(x)|_{x=0} = 120, & f^{(5)}(x)|_{x=0} = 120. \end{array}$$

Damit ist

$$T(5, x, 1) = 4(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5.$$

$R_5(f, x, 1) = 0$, da $f^{(6)}(x) = 0$ gilt.

Die ersten Ableitungen der Funktion g sind

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 2\cos(2x), & f^{(2)} = -4\sin(2x), & f^{(3)}(x) = -8\cos(2x), \\ f^{(4)} = 16\sin(2x), & f^{(5)}(x) = 32\cos(2x). & \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{array}{ll} f(x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1 & f'(x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0, \\ f^{(2)}(x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = -4, f^{(3)}(x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0, & f^{(4)}(x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = 16. \end{array}$$

Das Taylorpolynom lautet also

$$T(g, x, \frac{\pi}{4}) = 1 - 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{4})^4$$

und hat das Restglied $R_4(g, x, \frac{\pi}{4}) = \dfrac{32\cos(2(\frac{\pi}{4} + \theta(x - \frac{\pi}{4})))}{5!}(x - \frac{\pi}{4})^5$.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H13:

(a) Die n-te Ableitung von f besitzt für $n \in \mathbb{N}$ die Form

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n} \,,$$

was sich mit vollständiger Induktion beweisen läßt:

IA

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) \right|_{x=x_0} = \frac{a}{ax_0+b} = (-1)^0 \frac{0!\, a^1}{(ax_0+b)^1} \,,$$

IS

$$f^{(n+1)}(x_0) = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f^{(n)} \right|_{x=x_0} \overset{\text{IV}}{=} \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n} \right|_{x=x_0}$$
$$= (-1)^n \frac{n!\, a^{n+1}}{(ax_0+b)^{n+1}} \,.$$

(b) Mit

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$ folgt für die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt 0

$$T(f,x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \ln(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^n x^n \,.$$

(c) Mit dem Quotientenkriterium erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} b^n n}{(n+1)\, b^{n+1} a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+1/n)b} = \frac{a}{b} \,,$$

damit ist der Konvergenzradius der Taylorreihe gleich $\dfrac{b}{a}$.

Zu Aufgabe H14:

(a) Mit partieller Integration für den Ansatz $u'(x) = 1$ und $v(x) = f(x)$ folgt $u(x) = x$ und $v'(x) = f'(x)$ und man erhält:

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot f(x) \,\mathrm{d}\,x = \int u'(x) v(x) \,\mathrm{d}\,x \\ &= \big[u(x)v(x)\big] - \int u(x) v'(x) \,\mathrm{d}\,x \\ &= \big[x f(x)\big] - \int x f'(x) \,\mathrm{d}\,x \,. \end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

(b) Mit obiger Formel erhält man

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \big[x\ln(x)\big] - \int x\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \big[x\ln(x) - x\big]\,.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}\,x &= \big[x\arctan(x)\big] - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\,,\end{aligned}$$

da der letzte Integrand von der Form $f'(x)/f(x)$ ist.
Schließlich ist

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x = \big[x\arcsin(x)\big] + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$$

und mit der Substitution $w(x) = 1 - x^2$, $w'(x) = -2x$ folgt

$$\begin{aligned}&= [x\arcsin(x)] + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{w}}\,\mathrm{d}\,w\\ &= [x\arcsin(x)] + \big[\sqrt{w}\big]\\ &= \left[x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right]\,.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe H15: Wir suchen nach Nullstellen der Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin(x) - e^x + 2 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos(x) - x.$$

Die Ableitungen sind

$$f'(x) = \cos(x) - e^x \quad \text{und} \quad g'(x) = -\sin(x) - 1.$$

Die Rekursion lautet also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n) - e^{x_n} + 2}{\cos(x_n) - e^{x_n}} \quad \text{bzw.} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}.$$

Wird als Startwert $x_0 = 1$ gewählt, ergeben sich für f die Näherungen

$$x_1 = 1.056561210, \quad x_2 = 1.054131776, \quad x_3 = 1.054127124, \quad x_4 = 1.054127124$$

und für g (ebenfalls mit $x_0 = 1$)

$$x_1 = 0.7503638679, \quad x_2 = 0.7391128909, \quad x_3 = 0.7390851334, \quad x_4 = 0.7390851332.$$

Kommentar zur Wahl des Startwerts: Der Startwert sollte so gewählt werden, dass zwischen Startwert und der Nullstelle kein kritischer Punkt liegt. Wird z.B. für g ein Startwert $x_0 > \frac{3\pi}{2}$ gewählt kann es vorkommen dass das Newtonverfahren konvergiert, der Grenzwert aber keine Nullstelle von g ist.

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Zu Aufgabe H16:

(a) Mit der Substitution $u(x) = f(x)$, $u'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u = \left[2\sqrt{u}\right] = \left[2\sqrt{f(x)}\right].$$

(b) Mit obigem erhält man

$$\int\limits_{3/5}^{4/5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{3/5}^{4/5} = \frac{1}{5},$$

$$\int\limits_{e}^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}\,x = \left[2\sqrt{\ln(x)}\right]_{e}^{e^2} = 2\sqrt{2}-2,$$

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \left[2\sqrt{1+\sin(x)}\right]_{0}^{\pi/2} = 2\sqrt{2}-2.$$

Zu Aufgabe H17:

Mit der Universalsubstitution aus Aufgabe **P 18** erhält man

(a)

$$\int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{u(\pi/3)}^{u(2\pi/3)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln|u|\Big]_{u(\pi/3)}^{u(2\pi/3)} = \left[\ln\Big(\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)\right]_{x=\pi/3}^{2\pi/3}$$
$$= \ln(3^{1/2}) - \ln(3^{-1/2}) = \ln(3),$$

(b)

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{u(\pi/2)}^{u(\pi)} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{u}\right]_{u(\pi/2)}^{u(\pi)} = \lim_{t\to\pi-0}\left[-\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]_{x=\pi/2}^{t}$$
$$= \lim_{t\to\pi-0}\left(-\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}+1\right) = 1,$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

(c)

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}x = \int_{u(\pi/3)}^{u(\pi/2)} \frac{u}{2}+1+\frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{4}+u+\frac{1}{2}\ln|u|\right]_{u(\pi/3)}^{u(\pi/2)}$$
$$= \left[\frac{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{4}+\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)+\frac{1}{2}\ln\Big(\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)\right]_{x=\pi/3}^{\pi/2}$$
$$= \frac{7}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{4}\ln(3)\,.$$

Zu Aufgabe H18:

(a) Wir zerlegen den Integranden in Partialbrüche. Der Ansatz hierzu lautet

$$\frac{3x^3+3x^2-11x+7}{(x^2-2x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$A=1,\quad B=1,\quad C=2,\quad D=7.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3+3x^2-11x+7}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+7}{x^2+1}.\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\ln(x^2+1)+7\arctan(x)\right]\end{aligned}$$

(b) Polynomdivision ergibt:

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{2x^4+3x^3+9x^2+5x+7}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^5 2x^2+3x+7+\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+7x+\ln(x^2+1)\right]_0^5\\ &= \frac{935}{6}+\ln(26).\end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Zu Aufgabe H19:

(a) Es ist

$$0 \leqq \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} \leqq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

für $x \in [1, \infty)$. Da das Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \,\mathrm{d}\,x$$

konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch das Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} \,\mathrm{d}\,x\,.$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} \,\mathrm{d}\,x$ bereitet keine Probleme, deshalb existiert auch

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} \,\mathrm{d}\,x\,.$$

(b) Für $x \in (0, \pi/2]$ ist (vgl. 1.12.5)

$$0 < \sin(x) \leqq x \text{ bzw. } 0 < \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{\sin(x)}\,.$$

Wiederum mit dem Majorantenkriterium folgt aus der Nichtexistenz von

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\,x$$

die Divergenz des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} \,\mathrm{d}\,x\,.$$

(c) Mit der Substitution $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ erhält man

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,(\ln(x))^\alpha} \,\mathrm{d}\,x = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^\alpha} \,\mathrm{d}\,u\,,$$

welches genau für $\alpha > 1$ konvergiert.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H20:

(a) Für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ folgt mit partieller Integration:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} \,\mathrm{d}\, t = \underbrace{\lim_{s\to\infty} \left[-t^{\alpha} e^{-t}\right]_{t=0}^{s}}_{=0} + \int_{0+0}^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} \,\mathrm{d}\, t = \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

(b) Für $\alpha = 1$ erhält man

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}\, t = \lim_{s\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{s} = 1\,.$$

(c) Die Behauptung $\Gamma(n+1) = n!$ ist für $n = 1$ wahr, denn in **(b)** wurde gezeigt:

$$\Gamma(1+1) = 1 = 1!$$

Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt, dass $\Gamma(n+1) = n!$ gilt. Damit und mit **(a)** ergibt sich:

$$\Gamma(n+1+1) = (n+1)\,\Gamma(n+1) = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$$

womit die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen ist.

Zu Aufgabe H21:

$$\begin{aligned}
\int_{a-d}^{a+d} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_{a-d}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{a}^{a+d} f(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= -\int_{d}^{0} f(a-t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{d} f(a+t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{0}^{d} f(a-t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{d} f(a+t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{0}^{d} f(a-t) + f(a+t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{0}^{d} 0\,\mathrm{d}\,t = 0
\end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H22:

Es sei

$$f\colon [2,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x\,(\ln(x))^\alpha}\,.$$

Damit ergibt sich

$$f'(x) = \frac{(\ln(x))^{-\alpha-1}\,(-\alpha - \ln(x))}{x^2}\,.$$

Da $\alpha > 1$ vorausgesetzt ist, gilt $f'(x) < 0$, das heißt die Funktion f ist (streng) monoton fallend auf $[2,\infty)$. Außerdem ist f positiv, daher haben nach dem Integralkriterium die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln(k))^\alpha}$$

und das Integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,(\ln(x))^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$$

das gleiche Konvergenzverhalten. Analog zu Aufgabe H 19 (c) erhält man für $\alpha > 1$ eine Stammfunktion von f. Damit ergibt sich aus der Konvergenz des Integrals

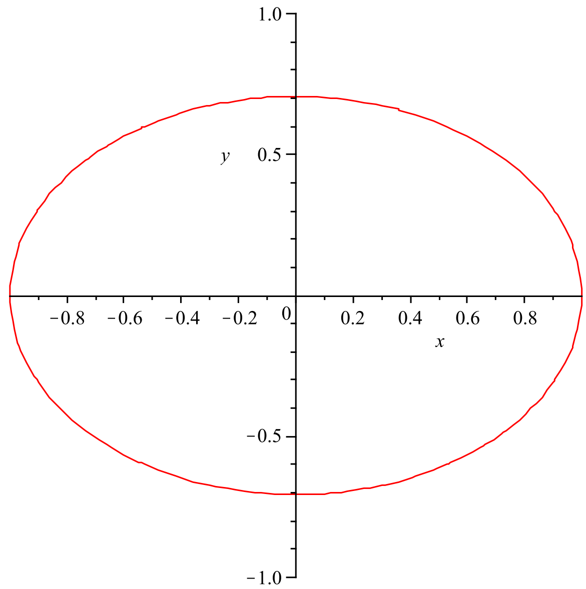
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,(\ln(x))^\alpha}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln(x))^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^t = -\frac{(\ln(2))^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,;$$

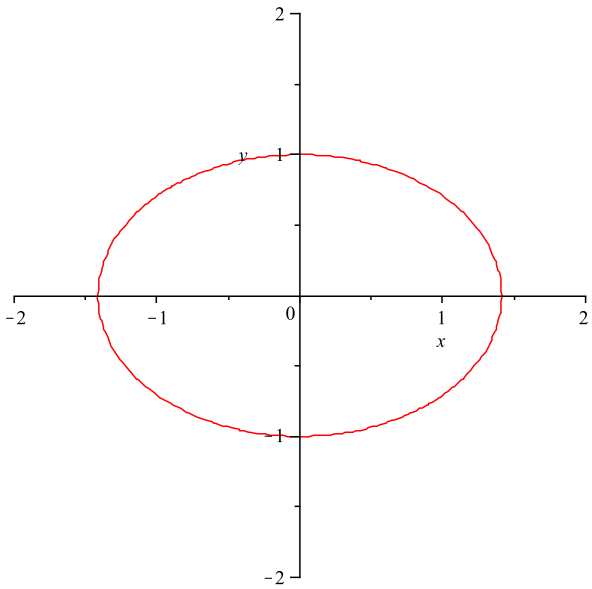
auch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln(k))^\alpha}\,.$$

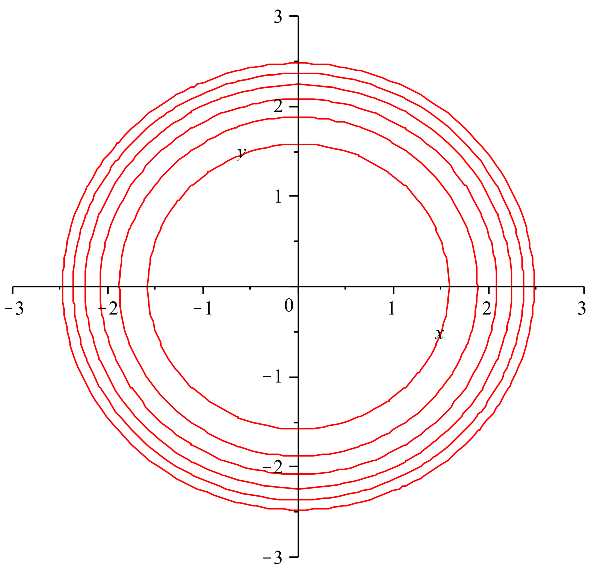
Zu Aufgabe H 23 Niveaulinien von f: Da $x^2+2y^2 \geqq 0$ gilt, ist die Niveaumenge zum Niveau -1 leer. Zum Niveau 0 ergibt sich als Niveaumenge nur ein Punkt, der Koordinatenursprung. Die Niveaus 1 und 2 führen auf die Gleichungen $x^2+2y^2=1$ beziehungsweise $x^2+2y^2=2$. Beide Gleichungen beschreiben Ellipsen.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

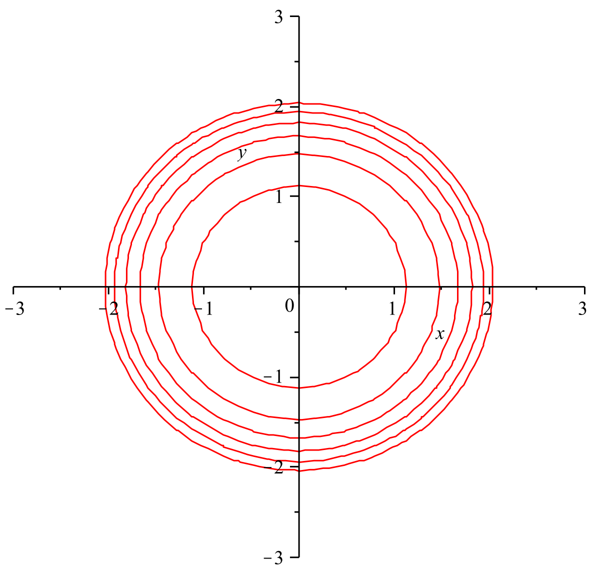




Niveaulinien von g: Da die Funktion $\cos$ nur Werte zwischen 1 und -1 annimmt, ergibt das Niveau 2 die leere Menge. Zum Niveau 1 ergibt sich die Gleichung $\cos(x^2 + y^2) = 1$. Diese wird gelöst durch $x^2 + y^2 = k2\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Die Niveaumenge besteht also aus konzentrischen Kreisen mit Radien $\sqrt{2k\pi}$. Analog ergeben sich für die Niveaus 0 und -1 die Gleichungen $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ beziehungsweise $x^2 + y^2 = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

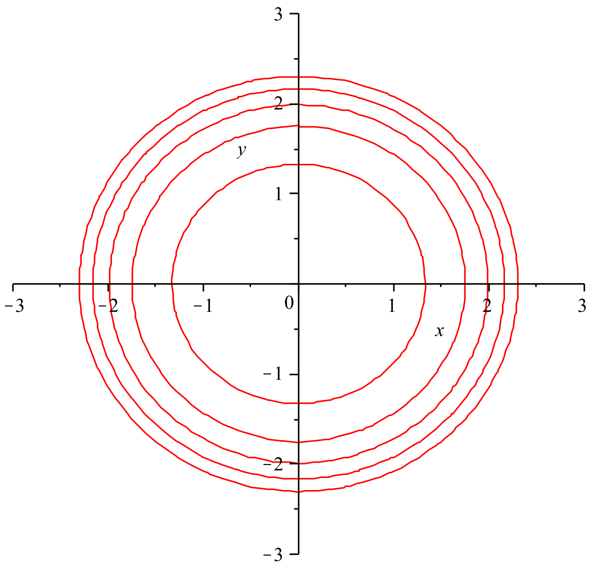


Niveau 1



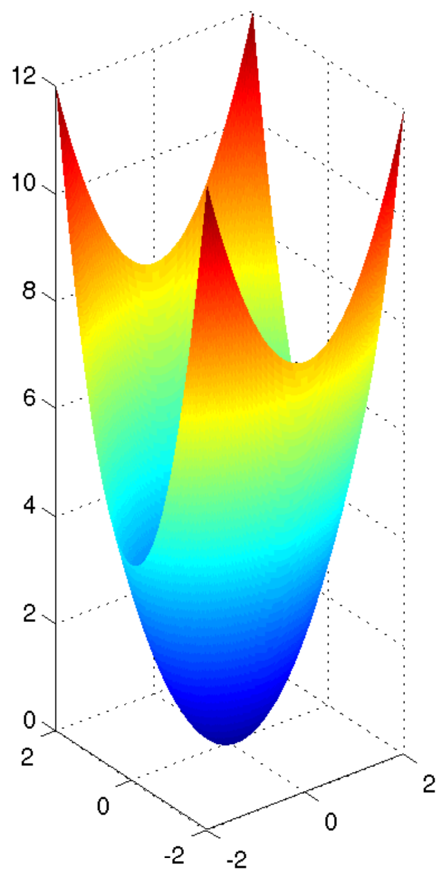
Niveau 0

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!



Niveau -1

Dreidimensionale Bilder der Funktionen f und g:



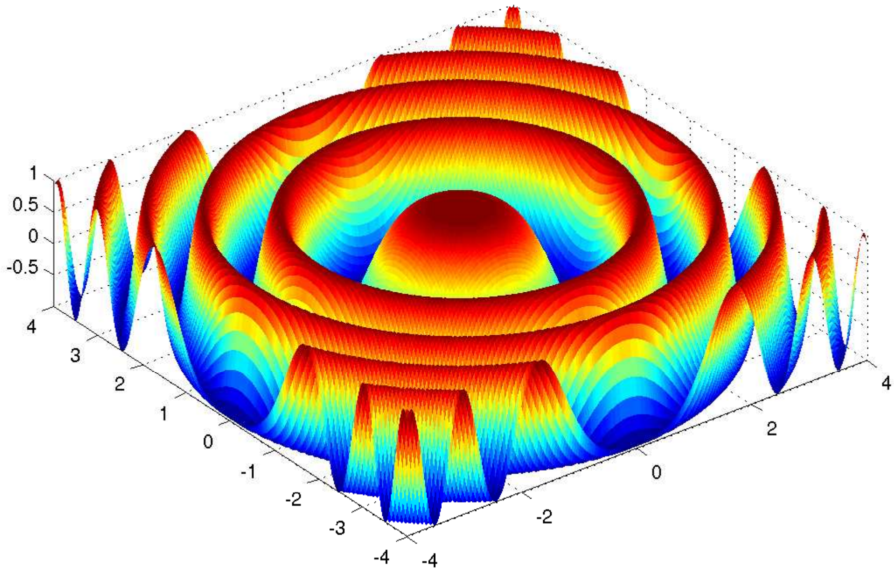
Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

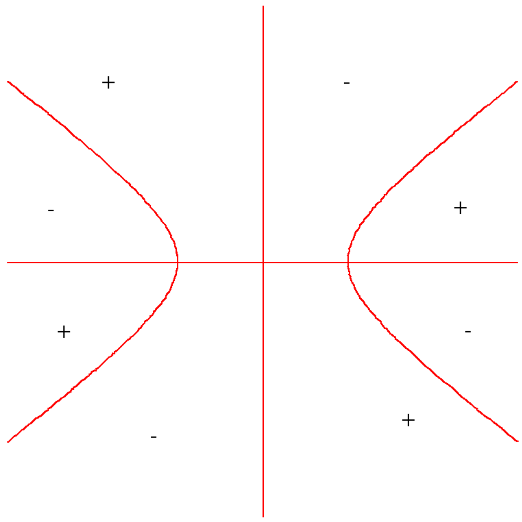
Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008



Zu Aufgabe H 24

Es ist $p(x,y) = x^3y - xy^3 - xy = x \cdot y \cdot (x^2 - y^2 - 1)$. Damit ist $p(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x^2 - y^2 - 1 = 0$. In der Koordinatenebene skizziert entsprechen die ersten beiden Fälle horizontalen beziehungsweise vertikalen Geraden. Der letzte Fall beschreibt eine Quadrik, die bereits in Normalform angegeben ist: Es handelt sich um eine Hyperbel. Also: $G_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 1 = 0\}$. Die Menge G_0 unterteilt $\mathbb{R}^2$ in einzelne Gebiete. Da p stetig ist, reicht es anhand eines einzelnen Funktionswertes im Inneren des jeweiligen Gebietes zu entscheiden, ob das Gebiet zu G_- oder zu G_+ gehört.



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Berechnung der geforderten Differentialquotienten:

$$\frac{\partial p}{\partial v_1}(2.0) = \lim_{h\to 0} \frac{p\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)-p\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_2}(2.0) = \lim_{h\to 0} \frac{p\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)-p\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{8h-2h^3-2h-0}{h} = 6$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_1}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{p\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)-p\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_2}(1.0) = \lim_{h\to 0} \frac{p\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)-p\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-h^3-h-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_1}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{p\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)-p\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3-h-h-0}{h} = -2$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_2}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{p\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)-p\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H25:

(a) Um die Taylorentwicklung von f_1 schneller errechnen zu können, bestimmen wir diese nicht direkt, sondern schreiben $f_1 = x^2 \cdot g(x,y)$ mit $g(x,y) = \sin\frac{xy}{2}$. Danach berechnen wir die Taylorentwicklungen getrennt für die beiden Faktoren und multiplizieren anschließend.

Es gilt

$$x^2 = (x-1+1)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = T_2(x^2,(x,y),(1,\pi))$$

und für $g(x,y) = \sin\frac{xy}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(1,\pi) &= 1,\\
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{2}\cos\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial g}{\partial x}(1,\pi) = 0,\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{2}\cos\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial g}{\partial y}(1,\pi) = 0,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{y^2}{4}\sin\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,\pi) = -\frac{\pi^2}{4},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\cos\frac{xy}{2} - \frac{xy}{4}\sin\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(1,\pi) = -\frac{\pi}{4},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{x^2}{4}\sin\frac{xy}{2}, \text{ also } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,\pi) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
&\big((x-1)^2 + 2(x-1) + 1\big)\big(1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-1)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2\big)\\
&= 1 + 2(x-1) + \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-1)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2 + \text{Terme vom Grad 3 und größer.}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$T_2(f_1,(x,y),(1,\pi)) = 1 + 2(x-1) + \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-1)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2 .$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
y^4 &= (y-1+1)^4 = (y-1)^4 + 4(y-1)^3 + 6(y-1)^2 + 4(y-1) + 1,\\
x^3 &= (x-1+1)^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1,\\
xy^2 &= (x-1+1)(y-1+1)^2 = (x-1)((y-1)^2 + 2(y-1) + 1)\\
&+ (y-1)^2 + 2(y-1) + 1.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &= -1-2(y-1)+3(x-1)^2+3(y-1)^2-6(x-1)(y-1) \\ &+ (x-1)^3+4(y-1)^3-3(x-1)(y-1)^2+(y-1)^4. \end{aligned}$$

Eine alternative Lösung bekommt man dadurch, dass man die Summanden höherer Ordnung in der Taylorformel tatsächlich ausrechnet. Dies erfolgt durch Verallgemeinerung der im Skript in 4.4.9 vorgestellten Methode:
Wir setzen $h := (h_1, h_2)^\mathsf{T}$ und schreiben $x = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$, $g := f_2$ und $a = (1,1)^\mathsf{T}$. Aus 4.4.9 wissen wir, dass

$$G(a) := \partial_h^2\, g(a) = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} h_j g_{x_i x_j}(a) \right) h_i$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \partial_h^3\, g(a) = \partial_h\, G(a) &= \begin{pmatrix} G_{x_1}(a) \\ G_{x_2}(a) \end{pmatrix} \bullet h \\ &= \begin{pmatrix} \left(\sum\limits_{i=1}^{2} \left(\sum\limits_{j=1}^{2} h_j\, g_{x_i x_j} \right) h_i \right)_{x_1} (a) \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{2} \left(\sum\limits_{j=1}^{2} h_j\, g_{x_i x_j} \right) h_i \right)_{x_2} (a) \end{pmatrix} \bullet h \\ &= \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} h_j\, g_{x_i x_j x_k}(a) \right) h_i \right) h_k \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten gilt

$$\partial_h^4\, g(a) = \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} h_i h_j h_k h_\ell\, g_{x_i x_j x_k x_\ell}(a)$$

Nun kann man diese Summen natürlich noch ausrechnen und erhält mit $h = (x,y)^\mathsf{T}$:

$$\begin{aligned} \partial_h^3\, f_2(1,1) &= 6x^3 - 18xy^2 + 24y^3 \\ \partial_h^4\, f_2(1,1) &= 24y^4 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Taylorformel erhält man jetzt das selbe Ergebnis wie oben.
Ableitungen der Ordnung 5 oder höher brauchen wir in diesem Fall nicht zu betrachten, weil diese bei einem Polynom vom Grad 4 auf jeden Fall 0 sind.

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H26:

(a) Man berechnet

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\cos(x+y), \cos(x+y))^{\mathsf{T}}$$

und

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{pmatrix}.$$

(b) Damit erhält man die Taylorpolynome zweiter Stufe

$$T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big) = x+y$$

und

$$T_2\left(f,(x,y),\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Im Punkt $(0,0)$ erhält man daraus die Schmiegquadrik

$$z = x+y$$

also eine Ebene.
Im Punkt $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ erhält man schließlich die Schmiegquadrik

$$z = 1 - \frac{1}{2}\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

dies ist ein parabolischer Zylinder.

Zu Aufgabe H27:

Man erhält für die Ableitung längs v von f im Punkt a

$$\partial_v f(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\|v\|\frac{f\left(a+h\|v\|\dfrac{v}{\|v\|}\right)-f(a)}{h\|v\|}$$

und mit $\tilde{h} = h\|v\|$

$$= \|v\|\lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f\left(a+\tilde{h}\tilde{v}\right)-f(a)}{\tilde{h}} = \|v\|\,\partial_{\tilde{v}}f(a)\,,$$

also gerade das $\|v\|$-fache der Richtungsableitung von f in Richtung $\tilde{v}$ im Punkt a.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H29:

(a) Der Gradient von f ist

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 3x_2 \\ 3x_2^2 + 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Nullsetzen ergibt also die beiden Gleichungen $3x_1^2 + 3x_2 = 0$ und $3x_2^2 + 3x_1 = 0$. Löst man die erst dieser Gleichungen nach x_2 auf und quadriert erhält man $x_2^2 = x_1^4$. In die zweite Gleichung eingesetzt ergibt sich $x_1^4 + x_1 = 0$. Diese Gleichung besitzt die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $x_1 = -1$. Die gesuchten Punkte sind also $(0,0)$ und $(-1,-1)$.

(b) Die Tangentialebene (=Taylorpolynom erster Stufe) hat die Gleichung

$$x_3 = f(1,1) + f_{x_1}(1,1)(x_1 - 1) + f_{x_2}(1,1)(x_2 - 1) = 5 + 6(x_1 - 1) + 6(x_2 - 1)$$

(c) Der Normalenvektor der Tangentialebene lautet $(6,6,-1)^T$. Dieser hat einen negativen dritten Eintrag, er zeigt also "nach unten". Die Richtung, in die der Ball rollt ist daher $(-6,-6)^T$.

(d) Die Tangente an die Höhenlinie muss in der Ebene $z = 5$ liegen und - da sie in der Tangentialebene liegt - senkrecht auf dem Gradienten stehen. Die Gleichung der Tangenten lautet also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Zu Aufgabe H30:

Die Matrix A besitzt die Eigenwerte 1, 2 und 3. Sie ist also positiv definit.

Die Matrix B besitzt die Eigenwerte -1, -2 und 3. Sie ist also indefinit.

Die Matrix C besitzt die Eigenwerte 1, 2 und 0. Sie ist also weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit.

Für die Hessematrix von f erhält man $\mathrm{H}f = 2A$ und für die Jacobimatrix von g erhält man $\mathrm{J}g = A$. (Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit dem eindimensionalen Fall.)

Zu Aufgabe H31:

(a) Die Jacobi-Matrizen sind

$$\mathrm{J}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{J}g(s,t) = \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ te^s & e^s \end{pmatrix}.$$

(b) Mit der Kettenregel erhält man daraus

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(g \circ f)(x,y,z) = \mathrm{J}g(f(x,y,z))\,\mathrm{J}f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2\ln(x) + 2y & 2yz \\ xyze^y & xe^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\frac{\ln(x)+y}{x} & 2\ln(x) + 2y + 2yz^2 & 2y^2z \\ yze^y & x(y+1)ze^y & xye^y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Gruppenübungen

Sommer 2008

Zu Aufgabe H32:

Als Gegenbeispiel können die Felder

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto (x,y,z)$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto (-y,x,z)$$

benutzt werden. Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$, also auch $g \bullet \operatorname{rot}(f) = 0$, aber $\operatorname{div}(f \times g) = -2 \neq 0$. Vertauschen der Rollen von f und g zeigt die zweite Ungleichheit.

Zu Aufgabe H33:

Das Feld f besitzt ein Potential, dieses lautet

$$U(x,y,z) = \ln(x) + \ln(y) + 2\ln(z) + C.$$

Das Feld g besitzt kein Potential, da

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} = \frac{2}{x^2 y} \neq 0$$

gilt und damit seine Rotation nicht 0 ist.

Zu Aufgabe H34:

(a) Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} f(g(t))\right|_{t=0} = \mathrm{J}f(g(0))\,\mathrm{J}g(0) = (\operatorname{grad} f(0))^\intercal \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

(b) Obiges läßt sich auch als

$$\operatorname{grad} f(0) \bullet v$$

schreiben, was mit der Ableitung $\partial_v f(0)$ von f längs v im Punkt 0 übereinstimmt.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!