M. Borgart, J. Hörner
A. Keller,
S. Müller-Platz

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A.-M. Sändig

Sommersemester 2011

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{n/2}}{n^n}$, **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\binom{2n}{n}}$, **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{2^{\ln n}}$, **(d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $a_n = |a_n| = \dfrac{(2n)^{n/2}}{n^n}$

Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{\sqrt{2n}}{n} = \sqrt{\dfrac{2}{n}}$

dies fällt monoton, d.h. ab $n_0 = 3$ ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \sqrt{2/3} < 1$.

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergiert.

(b) $a_n = |a_n| = \dfrac{n!}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n!}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \dfrac{(n!)^3}{(2n)!}$

Quotientenkriterium: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{((n+1)!)^3\ (2n)!}{(2(n+1))!\ (n!)^3} = \dfrac{(n+1)^3}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{n^3+3n^2+3n+1}{4n^2+6n+2}$

dies wächst monoton, d.h, ab $n_0 = 3$ ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq \frac{4^3}{7\cdot 8} = \frac{8}{7} > 1$.

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ divergiert.

(c) Es gilt allgemein $x^{\log_a y} = a^{\log_a x^{\log_a y}} = a^{\log_a y \,\cdot\, \log_a x} = a^{\log_a y^{\log_a x}} = y^{\log_a x}$. Also ist

$a_n = |a_n| = \dfrac{(\ln n)^2}{2^{\ln n}} = \dfrac{(\ln n)^2}{n^{\ln 2}}$.

Es ist $\ln 2 < \ln e = 1$ und $\ln n > 1$ für genügend große n.

Damit Vergleich mit der harmonischen Reihe: $\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\ln 2}} > \dfrac{1}{n^{\ln 2}} > \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ divergiert.

(d) $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = (-1)^n\, b_n$ mit $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Da b_n offensichtlich eine monotone Nullfolge ist, konvergiert $\sum a_n$ nach Leibnitz.

Vergleich mit der harmonischen Reihe: $|a_n| = b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergiert nicht absolut.

Aufgabe H 2. *Grenzwerte von Reihen*

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen die angegebenen Grenzwerte haben:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{7^n} = \frac{7}{10}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{7^n} = \frac{11}{5}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{5}{4}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{(2n-1)\,2n\,(2n+1)\,(2n+2)} = \frac{1}{4}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Reihe ist eine geometrische Reihe mit $q = -3/7$. Da $|q| < 1$ ist, konvergiert die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{7}\right)^n = \frac{1}{1-(-3/7)} = \frac{1}{10/7} = \frac{7}{10}\,.$$

(b) Reihe ist absolut konvergent, da $|a_n| < (5/7)^n + (3/7)^n$ (Summe zweier geometrischer Reihen) und kann daher umsortiert werden. Dies ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{7}\right)^n = \frac{1}{1-5/7} - 1 + \frac{7}{10} - 1 = \frac{11}{5}\,.$$

Dabei wurde der Wert der Reihe aus a) verwendet und berücksichtigt, dass die Summation bei $n = 1$ beginnt.

(c) Mit Partialbruchzerlegung ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3/2}{n} + \frac{-2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}\,.$$

Betrachtet man die Partialsummen so heben sich jeweils Terme aus drei aufeinenderfolgenden Reihengliedern auf und es bleibt

$$s_k = \underbrace{\frac{3/2}{1} + \frac{-2}{2}}_{\text{Term 1 u. 2 bei } n=1} + \underbrace{\frac{3/2}{2}}_{\text{Term 1 bei } n=2} + \underbrace{\frac{1/2}{k+1}}_{\text{Term 3 bei } n=k-1} + \underbrace{\frac{-2}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}}_{\text{Terme 2 u. 3 bei } n=k}\,.$$

Die letzten drei Summanden gehen gegen 0 und damit konvergiert die Reihe gegen $5/4$.

(d) Partialbruchzerlegung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{2n-1} + \frac{-1/2}{2n} + \frac{-1/2}{2n+1} + \frac{1/2}{2n+2}\,.$$

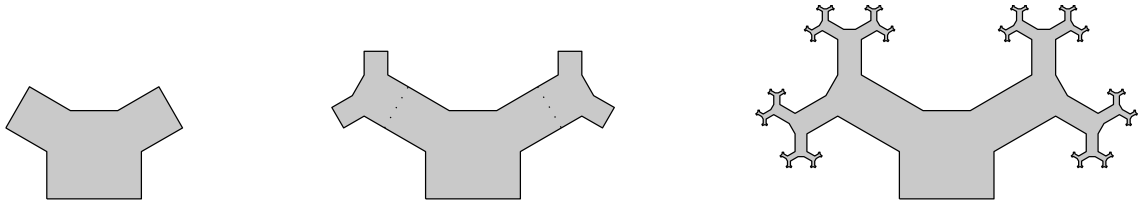
In den Partialsummen heben sich jeweils zwei Terme aus zwei aufeinenderfolgenden Gliedern auf und es bleibt

$$s_k = \underbrace{\frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{2}}_{\text{Term 1 u. 2 bei } n=1} + \underbrace{\frac{-1/2}{2k+1} + \frac{1/2}{2k+2}}_{\text{Term 3 u. 4 bei } n=k}\,.$$

mit Grenzwert $1/4$.

Aufgabe H 3. *Fraktaler Baum*

Der fraktale Baum entsteht durch skaliertes Duplizieren der links dargestellten Grundfigur und Anlegen dieser an die "Arme" links und rechts (wie in der Mitte zu erkennen). Die Grundfigur hat 9 Seiten der Länge 1 und eine Grundseite der Länge 2.



$n = 0$ $n = 1$ $n = 5$

(a) Geben Sie eine Formel für den Umfang U_n der Figur, die nach n Schritten entstanden ist, an.

(b) Was können Sie über die Konvergenz der Partialsummenfolge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aussagen?

Lösungshinweise hierzu: Da bei der Konstruktion des fraktalen Baums jedes in der vorhergehenden Iteration hinzugekommene Grundelement an zwei Seiten erweitert wird, verdoppelt sich pro Iterationschritt die Anzahl der angefügten Elemente. Der Baum der Stufe n entsteht somit durch Erweiterung des Baumes der Stufe $n-1$ um $E_n = 2^n$ skalierte Grundelemente.

Die anfängliche Kantenlänge $\ell_0 = 1$ wird pro Iterationsschritt halbiert. Somit gilt $\ell_n = 1/2^n$, weshalb ein Grundelement der Stufe n den Umfang $11\ell_n$ besitzt. Beim Ansetzen eines Elements sind jedoch in der Stufe n für die Schnittstellen vier Längeneinheiten ℓ_n abzuziehen, da die Grundseitenlänge $2\ell_n$ beträgt. Der Umfang des Baums wächst pro hinzugefügtem Element somit effektiv um $V_n = 7\ell_n$. Der Gesamtumfang des Fraktals n-ter Stufe ist folglich

$$U_n = U_0 + \sum_{k=1}^{n} E_k V_k = 11 + \sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot 7 \cdot \frac{1}{2^k} = 11 + 7n\,.$$

Die Folge U_n wächst unbeschränkt an, ist also nicht konvergent.

Aufgabe H 4. *Stetigkeit*

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion in $x = 1$ unstetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1} & \text{für } -5 \leqq x \leqq 5,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Lösungshinweise hierzu: Man betrachte die Folge $x_n := \frac{1+n}{n}$, dann ist $f(x_n) = \frac{n+n^2}{1+2n}$. Nun gilt $x_n \longrightarrow 1$, aber $f(x_n)$ divergiert und läuft somit nicht gegen $0 = f(1)$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 5. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (ohne die Regel von l'Hospital zu verwenden).

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin(2x)} + \dfrac{\sin(x)}{2x}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{3+\frac{2}{x}}\right) = 1-\sqrt{3}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(2x)}+\frac{\sin(x)}{2x}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin(2x)}\right)+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1\,.$$

Aufgabe H 6. *Funktionsuntersuchungen*

Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen und untersuchen Sie diese auf (einseitige) Stetigkeit und hebbare Definitionslücken.

(a) $f_1\colon x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{4-x^2}}$

(b) $f_2\colon x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}$

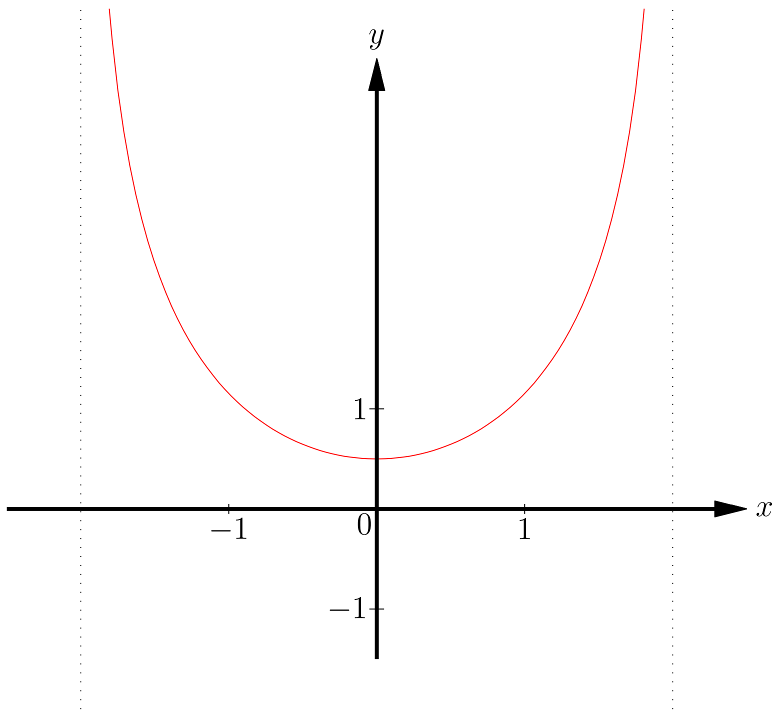
(c) $f_3\colon x \mapsto \dfrac{\ln(\sin x)}{1+\cos x}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Definitionsbereich: Die Wurzel existiert und ist positiv für $4-x^2>0 \Leftrightarrow |x|<2$. Somit ergibt sich als Definitionsbereich $(-2,2)$.

Wertebereich: Die Funktionswerte sind stets positiv. Der Zähler ist am kleinsten für $x=0$, der Nenner am größten für $x=0$. Also ist $f(x)$ für $x=0$ am kleinsten. Da der Nenner für $x\to\pm 2$ von oben nach 0 und der Zähler nach 5 strebt, geht $f(x)$ nach $+\infty$. Da f im Definitionsbereich als Quotient stetiger Funktionen stetig ist, werden also alle Zahlen zwischen einschließlich $\frac{1}{2}$ und ausschließlich $+\infty$ erreicht. Der Wertebereich ist also $[1/2,\infty)$.

Stetigkeit und hebbare Definitionslücken: Im Definitionsbereich als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es gibt keine hebbaren Definitionslücken, da $f(x)\to\infty$ für $x\to\pm 2$.



(b) Nach Faktorisierung von Zähler und Nenner und Kürzen des gemeinsamen Linearfaktors erhält man

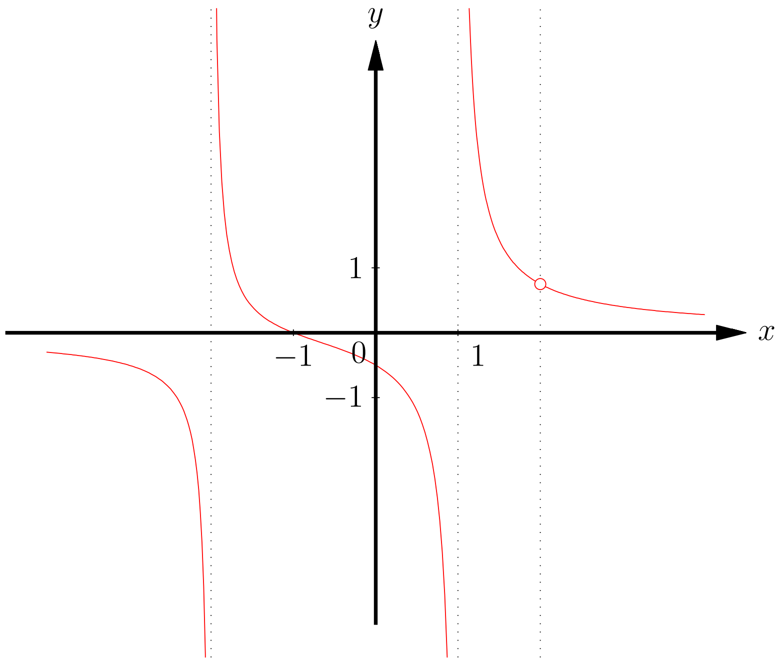
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-1)^2(x-2)} = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}\,, x \neq -2\,.$$

Definitionsbereich: f ist nur an den Nullstellen des Nenners nicht definiert. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

Wertebereich: Es gilt $f(x) \to +\infty$ für $x \to -2+$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to 1-$. Da f im Bereich von -2 bis 1 stetig ist, muß jeder Wert zwischen ∞ und $-\infty$ angenommen werden, der Wertebereich ist also $\mathbb{R}$.

Stetigkeit und hebbare Definitionslücken: Die Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich als Quotient stetiger Funktionen stetig.

An den Definitionslücken $x = -2$ und $x = 1$ strebt die Funktion nach $\pm\infty$ und kann daher nicht stetig fortgesetzt werden. Hingegen sind die einsetigen Grenzwerte der Funktion an der Definitionslücke $x = 2$ jeweils $3/4$. Die Funktion kann somit an der Definitionslücke $x = 2$ mit dem Wert $3/4$ (beidseitig) stetig fortgesetzt werden, die Definitionslücke ist also hebbar.



(c) Definitionsbereich: Es gibt 2 Dinge, auf die geachtet werden muss:

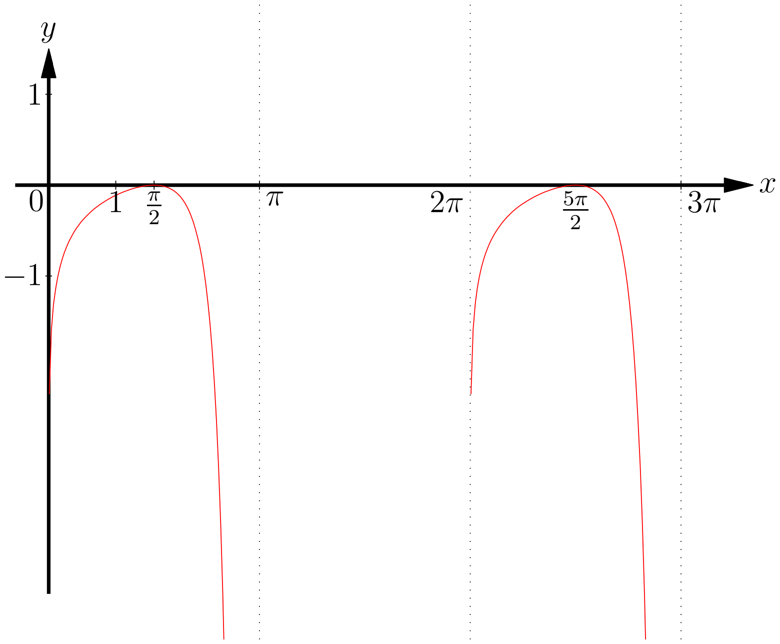
(i) $\sin x > 0$. Dies ist der Fall für $x \in (0, \pi) + 2\pi k\,, k \in \mathbb{Z}$

(ii) $1 + \cos x \neq 0$. Dies ist der Fall für $x \neq \pi + 2\pi k\,, k \in \mathbb{Z}$

Durch Schnitt beider Mengen erhält man den Definitionsbereich $(0, \pi) + 2\pi k\,, k \in \mathbb{Z}$.

Wertebereich: Aufgrund der 2π–Periodizität der Funktion genügt es, sich auf $(0, \pi)$ als Definitionsbereich zu beschränken. Für $x \to 0$ und $x \to \pi$ geht $f(x)$ gegen $-\infty$. Da $\sin(x) \leqq 1$ ist $\ln(\sin(x)) \leqq 0$. Der Zähler wird also für $x = \pi/2$ am größten, nämlich 0. Der Nenner ist im Definitionsbereich stets positiv, weshalb $f(x)$ für $x = \pi/2$ am größten wird. Aufgrund der Stetigkeit im Definitionsbereich werden alle Werte zwischen 0 und $-\infty$ angenommen. Der Wertebereich ist also $(-\infty, 0]$.

Stetigkeit und hebbare Definitionslücken: Die Funktion f ist im Definitionsbereich überall stetig. An den Stellen $0 + 2\pi\mathbb{Z}$ und $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ strebt die Funktion gegen $-\infty$,. Die Funktion besitzt daher keine hebbaren Definitionslücken.



Aufgabe H 7. *Gleichheitsproblem*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (1-x^2)\tan x \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x\,.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ mindestens drei Lösungen im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ hat.

Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pi/2 - 0$ und $x \to -\pi/2 + 0$ und werten Sie f an $x = \pm 1$ aus.

Lösungshinweise hierzu: Die Funktion $h\colon x \mapsto x + (1-x^2)\tan x$ ist für $x \to -\pi/2+0$ bestimmt divergent nach $+\infty$ und für $x \to +\pi/2 - 0$ bestimmt divergent nach $-\infty$. An $x = \pm 1$ ist $f(x) = 0$ und somit ist $h(-1) = -1$ und $h(1) = 1$. Da h als Summe aus einer steigen Funktion und einem Produkt stetiger Funktionen selbst auch stetig ist, muss nach dem Zwischenwertsatz in den Intervallen $(-\pi/2, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, \pi/2)$ je eine Nullstelle liegen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 8. *Konvergenzradien von Potenzreihen*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für

(a) $a_n = n^2$

(b) $a_n = (1 - 1/n)^{n^2}$

(c) $a_n = n^{n/2}$

(d) $a_n = \text{Anzahl der Teiler von } n$

Hinweis: Denken Sie bei $(\mathbf{d})$ an den Sandwichsatz.

Lösungshinweise hierzu: Der Konvergenzradius kann in allen Fällen mit dem Wurzelkriterium ermittelt werden.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n)^{n^2/n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = 1/e \Rightarrow \rho = e$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2} = \infty \Rightarrow \rho = 0$

(d) Die Anzahl der Teiler von n liegt zwischen 1 und n und damit gilt

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Der Konvergenzradius ist also $\rho = 1$

Aufgabe H 9. *Produkt von Potenzreihen*

Wandeln Sie das Reihenprodukt

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\, x^k\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell$$

in eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

um. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der drei auftretenden Potenzreihen. Ist dies mit der in 1.14.11 stehenden Aussage vereinbar?

Lösungshinweise hierzu: Das Reihenprodukt kann geschrieben werden als

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\, x^k\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 1\right) x^n$$

Der geklammerte Teil ist jeweils eine Partialsumme der geometrischen Reihe und verknüpft mit dem entsprechenden Koeffizienten aus der ersten Reihe ergibt sich

$$a_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 1/2^{k+1}}{1 - 1/2} = 1/2^{k+1}\,.$$

Das Reihenprodukt ist auf dem Schnitt der Konvergenzkreise der zwei beteiligten Reihen definiert. Es handelt sich hier jeweils um geometrische Reihen. Die Mittelpunkte der Konvergenzkreise sind jeweils $x_0 = 0$. Die erste Reihe hat Konvergenzradius 2, die zweite hat Konvergenzradius 1.

Die umgeformte Reihe ist auch eine geometrische Reihe mit Konvergenzradius 2.

In 1.14.11 wird die Konvergenz des Produkts für den Kreis mit dem kleineren der beiden Radien gesichert, hier also für 1. Tatsächlich ist die Produktreihe sogar in dem größeren Kreis mit Radius 2 konvergent. Dies ist kein Widerspruch.

Aufgabe H 10. *Additionstheoreme*

Bestätigen Sie mit Hilfe der Formel von Euler und de Moivre die Beziehungen

(a) $2\cos(8x)\cos(5x) = \cos(3x) + \cos(13x)$

Hinweis: Betrachten Sie $\exp(8\mathrm{i}x)$, $\exp(-8\mathrm{i}x)$, $\exp(5\mathrm{i}x)$ und $\exp(-5\mathrm{i}x)$

(b) $4(\sin(x))^3 = 3\sin(x) - \sin(3x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Formel $\cos(ax) = (e^{a\mathrm{i}x} + e^{-a\mathrm{i}x})/2$ ist

$$\begin{aligned}
2\cos(8x)\cos(5x) &= 2\,\frac{e^{8\mathrm{i}x} + e^{-8\mathrm{i}x}}{2}\,\frac{e^{5\mathrm{i}x} + e^{-5\mathrm{i}x}}{2} \\
&= \frac{e^{13\mathrm{i}x} + e^{3\mathrm{i}x} + e^{-3\mathrm{i}x} + e^{-13\mathrm{i}x}}{2} \\
&= \frac{e^{13\mathrm{i}x} + e^{-13\mathrm{i}x}}{2} + \frac{e^{3\mathrm{i}x} + e^{-3\mathrm{i}x}}{2} = \cos(13x) + \cos(3x)
\end{aligned}$$

(b) Mit der Formel $\sin(x) = (e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})/(2\mathrm{i})$ ist

$$\begin{aligned}
4(\sin(x))^3 &= \frac{4(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})^3}{(2\mathrm{i})^3} \\
&= \frac{e^{3\mathrm{i}x} - 3e^{\mathrm{i}x} + 3e^{-\mathrm{i}x} - e^{-3\mathrm{i}x}}{-2\mathrm{i}} \\
&= 3\,\frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} - \frac{e^{3\mathrm{i}x} - e^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = 3\sin(x) - \sin(3x)
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11. *Ableitungen*
Berechnen Sie für die Funktion f die Ableitung nach x:

(a) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

(b) $f(x) = \exp(-1/x^2)$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

(d) $f(x) = (1+x^2)^{\sin(x)}$

(e) $f(x) = \sin(x)\cos(x)\tan(x)$

(f) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{\exp(x)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) $f'(x) = (\sin(x^2))' = 2x\cos(x^2)$

(b) $f'(x) = \left(\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\right)' = \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{2}{x^3}\cdot\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$

(c) Mit der Quotientenregel erhält man:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{\sqrt{x+1}-(x-1)\left(\sqrt{x+1}\right)'}{x+1} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}(x-1)\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{x+1-\frac{1}{2}(x-1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x+3}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

(d) Wegen $f(x) = \exp\left(\ln\left((1+x^2)^{\sin(x)}\right)\right) = \exp\left(\sin(x)\cdot\ln\left((1+x^2)\right)\right)$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\exp\left(\sin(x)\ln\left((1+x^2)\right)\right)\right)' \\ &= \exp\left(\sin(x)\ln\left((1+x^2)\right)\right)\cdot\left(\sin(x)\ln\left(1+x^2\right)\right)' \\ &= (1+x^2)^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\ln(1+x^2)+\sin(x)\cdot\frac{2x}{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

(e) Wir können schreiben

$$f(x) = \sin(x)\cos(x)\tan(x) = \sin(x)\cos(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = (\sin(x))^2 .$$

Damit ist $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

(f) $f'(x) = \left(\dfrac{x\ln x}{\exp(x)}\right)' = \dfrac{(x\ln(x))'\exp(x) - x\ln(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = \dfrac{1+\ln(x)-x\ln(x)}{\exp(x)}$

Aufgabe H 12. *Umkehrfunktion*
Der *Cotangens* ist definiert durch

$$\cot\colon (0,\pi)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Zeigen Sie, dass $\cot$ bijektiv ist und skizzieren Sie $\cot$. Die Umkehrfunktion ist der sogenannte *Arcuscotangens* $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$. Skizzieren Sie mit Hilfe der Skizze von $\cot$ nun auch arccot. Zeigen Sie, dass für die Ableitung

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

gilt.

Lösungshinweise hierzu: Die Injektivität kann man in diesem Fall damit erklären, dass die Funktion auf dem Intervall $(0,\pi)$ streng monoton fallend ist, da

$$(\cot(x))' = \frac{-1}{(\sin(x))^2} < 0$$

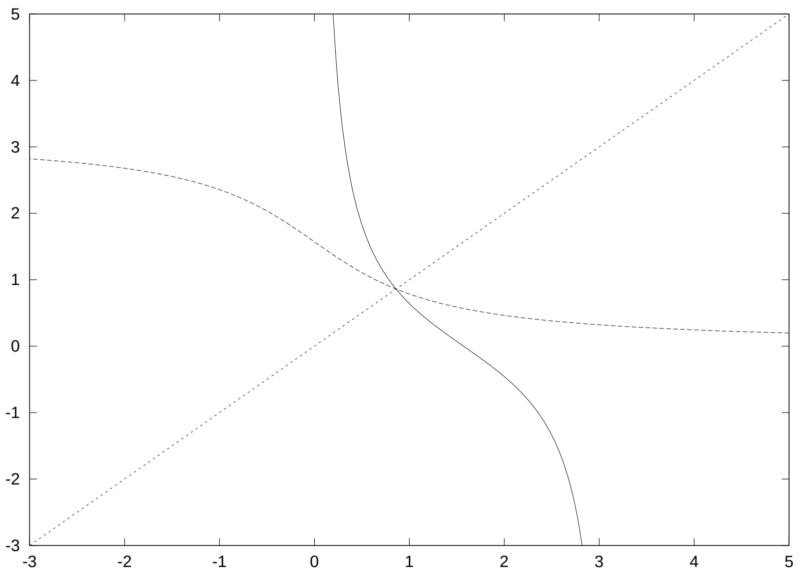
für alle $x \in (0,\pi)$. Weiterhin gilt

$$\lim_{x\to 0+} \cot(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to \pi-} \cot(x) = -\infty.$$

Wegen der Stetigkeit nimmt $\cot$ also alle Werte auf dem Intervall $(-\infty,+\infty)$ und ist damit auch surjektiv. Die Umkehrfunktion arccot existiert somit und es gilt für $x = \cot(y)$

$$(\operatorname{arccot}(x))' = \frac{1}{(\cot(y))'} = -\frac{1}{\frac{1}{(\sin(y))^2}} = -\frac{1}{\frac{(\sin(y))^2+(\cos(y))^2}{(\sin(y))^2}} = -\frac{1}{1+(\cot(y))^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Skizze von $\cot$ und arccot:



Aufgabe H 13. *Legendre-Polynome*

Sei für $n \in \mathbb{N}_0$ das Polynom

$$P_n(x) = \left(\frac{1}{n!2^n}(x^2-1)^n\right)^{(n)}$$

als die n-te Ableitung von $\frac{1}{n!2^n}(x^2-1)^n$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ und $P_3(x)$.

Lösungshinweise hierzu: Das Anwenden der Definition von $P_n(x)$ liefert

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= \left(\frac{1}{0!2^0}(x^2-1)^0\right)^{(0)} = 1\\
P_1(x) &= \left(\frac{1}{1!2^1}(x^2-1)^1\right)^{(1)} = \frac{1}{2}(x^2-1)' = x\\
P_2(x) &= \left(\frac{1}{2!2^2}(x^2-1)^2\right)^{(2)} = \frac{1}{8}\left((x^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{2}(x^3-x)' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\\
P_3(x) &= \left(\frac{1}{3!2^3}(x^2-1)^3\right)^{(3)} = \frac{1}{8}(x(x^2-1)^2)'' = \frac{1}{8}(x^5-2x^3+x)'' = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Leibnizformel aus der Aufgabe P 13, dass

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \frac{n}{n!2^n}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

und leiten Sie anschließend ab.

Lösungshinweise hierzu: Mit der Leibnizformel erhalten wir zuerst

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left((x^2-1)^{n+1}\right)^{(n+1)}\\
&= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left(2x(n+1)(x^2-1)^n\right)^{(n)}\\
&= \frac{1}{n!2^n}\left(x(x^2-1)^n\right)^{(n)}\\
&= \frac{1}{n!2^n}\left(x\left((x^2-1)^n\right)^{(n)} + n\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}\right)\\
&= xP_n(x) + \frac{n}{n!2^n}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}
\end{aligned}$$

und durch Ableiten ergibt sich

$$\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= xP'_n(x) + P_n(x) + \frac{n}{n!2^n}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}\\
&= xP'_n(x) + (n+1)P_n(x).
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 14. *Funktionsgrenzwerte*

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2)-1}{x^3\sin(x)}$

- mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen,
- mit der Regel von l'Hospital.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Kann man auch in diesem Fall die Regel von l'Hospital anwenden?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ können mit ihren Potenzreihenentwicklungen um den Punkt $x_0 = 0$ identifiziert werden:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^k (\cos(x))\Big|_{x=0} \cdot x^k = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^k (\sin(x))\Big|_{x=0} \cdot x^k = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

Damit ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^3\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \frac{1}{4!}(x^2)^4 - \frac{1}{6!}(x^2)^6 + \ldots) - 1}{x^3(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{6!}x^{12} + \ldots}{x^4(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^8 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man nach der mehrfachen Anwendung der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{x^3\sin(x)} &\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x^2)-1)'}{(x^3\sin(x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x^2)}{3x\sin(x)+x^2\cos(x)}\\
&\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(-2\sin(x^2))'}{(3x\sin(x)+x^2\cos(x))'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-4x\cos(x^2)}{3\sin(x)+5x\cos(x)-x^2\sin(x)}\\
&\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(-4x\cos(x^2))'}{(3\sin(x)+5x\cos(x)-x^2\sin(x))'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(x^2)+8x^2\sin(x^2)}{8\cos(x)-7x\sin(x)-x^2\cos(x)} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Mit den Definitionen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.
\end{aligned}$$

Wendet man die Regel von l'Hospital an, so kommt man zu folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} &\overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\\
&\overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+e^{-x})'}{(e^x-e^{-x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle erkennt man also, dass es nicht möglich ist, den Grenzwert mit Hilfe der Regel von l'Hospital zu berechnen.

Aufgabe H 15. *Taylorpolynome*

(a) Schätzen Sie den Fehler ab, den man macht, wenn man für $|x| < 0.5$

- die Funktion $\sin(x)$ durch x
- die Funktion $\sin(x)$ durch $x - \frac{1}{3!}x^3$

ersetzt.

Hinweis: Schauen Sie sich die Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ an.

(b) Wieviel Summanden der Potenzreihenentwicklung um den Punkt $x_0 = 0$ braucht man, um $\sin(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ mit einer Genauigkeit von 10^{-15} zu berechnen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Taylorreihenentwicklung von $f(x) = \sin(x)$ erhält man:

$$T_1(f, x, 0) = T_2(f, x, 0) = x.$$

Zum Abschätzen des Fehlers kann man daher die Formel für das Restglied $R_2(f, x, 0)$ verwenden. Es ergibt sich mit einem ϑ zwischen 0 und x:

$$\begin{aligned} |f(x) - x| &= |R_2(f, x, 0)| \\ &= \left| \frac{f^{(3)}(\vartheta)}{3!} \cdot (x-0)^3 \right| \\ &= \frac{|-\cos(\vartheta)|}{3!} \cdot |x|^3 \\ &\leqq \frac{1}{3!} \cdot |x|^3 \leqq \frac{1}{3!} \cdot 0.5^3 = \frac{0.125}{6} < 0.021. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir mit

$$T_3(f, x, 0) = T_4(f, x, 0) = x - \frac{1}{3!}x^3$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 \right) \right| &= |R_4(f, x, 0)| \\ &= \left| \frac{f^{(5)}(\vartheta)}{5!} \cdot (x-0)^5 \right| \\ &= \frac{|\cos(\vartheta)|}{5!} \cdot |x|^5 \\ &\leqq \frac{1}{5!} \cdot |x|^5 \leqq \frac{1}{5!} \cdot 0.5^5 = \frac{0.03125}{120} < 0.00027. \end{aligned}$$

(b) Ist $T_n(f, x, 0)$ das n-te Taylorpolynom von $f(x) = \sin(x)$ im Entwicklungspunkt 0, so gilt für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$:

$$\begin{aligned} \Big| f(x) - T_n(f, x, 0) \Big| &= |R_n(f, x, 0)| \\ &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{(n+1)} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{|f^{(n+1)}(\vartheta)|}_{\leqq 1} \cdot |x|^{(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Durch Ausprobieren findet man $\frac{1}{17!} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{17} < 10^{-15}$. Somit erreicht man eine Genauigkeit von 10^{-15} beim Taylorpolynom der Stufe 16, welches aus genau 8 Summanden besteht.

Aufgabe H 16. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?

(b) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte.

(c) Bestimmen Sie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f und f' an den Stellen 1 und -1. Wie verhält sich f für $|x| \longrightarrow +\infty$?

(d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\arctan$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, müssen wir nur noch auf den Term $\frac{2x}{1-x^2}$ achten. Dieser Bruch existiert nur dann, wenn der Nenner ungleich 0 ist. Damit erhalten wir den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

(b) Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{2(-x)}{1-(-x)^2}\right) = \arctan\left(-\frac{2x}{1-x^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = -f(x).$$

<u>Nullstellen</u>: $\quad f(x) = 0 \quad\iff\quad \dfrac{2x}{1-x^2} = 0 \quad\iff x = 0.$

Damit ist $(0, 0)$ ist die einzige Nullstelle.

<u>Extrema</u>: Für die 1. und die 2. Ableitung erhalten wir

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2} \cdot \frac{(1-x^2)\cdot 2 - 2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{x^2+1}$$
$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Wie man sieht, ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, also besitzt f keine Extrema.

<u>Wendepunkte</u>:

$$f''(x) = 0 \rightsquigarrow x = 0$$

Da es sich dabei um eine einfache Nullstelle handelt (f'' hat einen VZW), muss f im Punkt $(0, 0)$ einen Wendepunkt haben.

(c) Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ ergeben sich folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad\qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -1-0} f(x) = +\frac{\pi}{2}$$

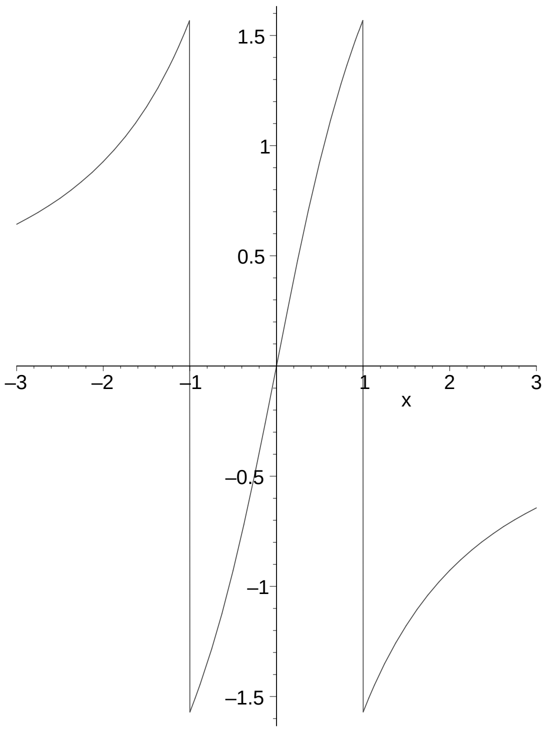
Die Ableitung $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ ist an den Stellen 1 und -1 definiert und stetig. Also stimmen die rechts- und die linksseitigen Grenzwerte überein und wir erhalten:

$$\lim_{x \to 1+0} f^{'}(x) = \lim_{x \to 1-0} f^{'}(x) = \lim_{x \to 1} f^{'}(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2}{x^2+1} = 1$$
$$\lim_{x \to -1+0} f^{'}(x) = \lim_{x \to -1-0} f^{'}(x) = \lim_{x \to -1} f^{'}(x) = 1$$

Aus $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{1-x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{1-2x} = 0$ folgt schließlich:

$$\lim_{x \to \infty} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \arctan(0) = 0.$$

(d) Skizze der Funktion f:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 17. *Stammfunktionen und Integrale*

Bestimmen Sie Stammfunktionen F zu

(a) $\dfrac{1}{x(x+1)}$, **(b)** $\dfrac{2u}{\sqrt{1+u^2}}$

und berechnen Sie

(c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{4\ln(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$, **(d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+(\sin(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

liefert mit der Grenzwertmethode

$$a = \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=0} = 1\,, \quad b = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=-1} = -1$$

und damit die Stammfunktion

$$\ln|x| - \ln|x+1| + c = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c\,.$$

(b) Die Funktion ist von der Form $f^\alpha f'$ mit $\alpha = -1/2$ und $f(u) = 1+u^2$. Mit Substitution erhält man daher die Stammfunktion

$$\left[\frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}\right] = \left[2\sqrt{1+u^2}\right]\,.$$

(c) Partielle Integration mit $u = \ln(x)\,, u' = 1/x\,, v' = (x+1)^{-2}\,, v = -(x+1)^{-1}$ ergibt

$$\int_1^3 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{-\ln(x)}{x+1}\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Das zweite Integral kann mit der Stammfunktion aus **(a)** bestimmt werden und es ergibt sich:

$$4\int_1^3 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = -\ln(3) - 0 + 4\ln(3/4) - 4\ln(1/2) = 3\ln(3) - 4\ln(2) = \ln(27/16)\,.$$

(d) Mit Hilfe der Substitution $u = \sin(x)\,, u' = \cos(x)$ ist

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+(\sin(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^1 \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}\,u$$

und mit der Stammfunktion aus **(b)** erhält man

$$\int\limits_0^1 \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}\,u = \left[2\sqrt{1+u^2}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2\,.$$

Aufgabe H 18. *Integration durch Partialbruchzerlegung*
Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

(a) $\int_1^2 \frac{2x+3}{2x-1}\,\mathrm{d}\,x\,,$ **(b)** $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x\,,$ **(c)** $\int_{-1}^1 \frac{x^3-2x^2-x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x\,.$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\int\limits_1^2 \frac{2x+3}{2x-1}\,\mathrm{d}\,x$$

Man beginnt mit Polynomdivision und erhält:

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \frac{2x+3}{2x-1}\,\mathrm{d}\,x &= \int\limits_1^2 1\,\mathrm{d}\,x + 2\int\limits_1^2 \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[x + 2\cdot\ln|2x-1|\right]_1^2 \\ &= 2+2\cdot\ln 3 - (1+2\ln 1) \\ &= 1+2\ln 3\end{aligned}$$

(b)

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$$

Der Nenner hat die Nullstelle -1, wodurch sich der Bruch zerlegen lässt in

$$\frac{1}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{bx+c}{(x^2-x+1)}$$

Für a ergibt sich mit der Grenzwertmethode $a = \frac{1}{3}$.
Durch Multiplizieren mit dem Hauptnenner erhält man:

$bx^2 + (b+c)x + c = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow b = -\frac{1}{3},\ c = \frac{2}{3}$
Somit ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{3}{6}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{3}\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 - \frac{1}{6}\Big[\ln|x^2-x+1|\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{6}(\ln 1 - \ln 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\pi/6 + \pi/6) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

(c) Mit PBZ erhält man:

$$
\int_{-1}^{1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{(x^2+2x+5)^2} = \int_{-1}^{1} \frac{x-4}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{1} \frac{2x+22}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x
$$

Die quadratischen Polynome im Nenner haben die Form $x^2+\beta x+\gamma$ mit $\beta = 2, \gamma = 5$ und damit ist $\Delta = \gamma - \beta^2/4 = 4$ und $\sqrt{\Delta} = 2$. Dies führt weiter auf

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}\,x - 5\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}\,x \\
&+ \int_{-1}^{1} \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x + 20\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}
$$

Für die ersten drei Integrale können die Stammfunktionen nun angegeben werden, das vierte Integral wird mit Hilfe der Substitution $u(x) = (x + \beta/2)/\sqrt{\Delta} = (x+1)/2$ behandelt. Dies ergibt

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|\right]_{-1}^{1} - \left[5\,\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{x^2+2x+5}\right]_{-1}^{1} \\
&\quad + \left[20\,\frac{2}{16}\frac{(x+1)/2}{2(x^2+2x+5)/4}\right]_{-1}^{1} + \left[20\,\frac{2}{16}\,\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}\pi + \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 19. *Unterschiedliche Integrationsmethoden*

Bestimmen Sie

(a) $\displaystyle\int_1^3 x^2 \ln(x) \, \mathrm{d}\, x$, **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}\, x$, **(c)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\, x}{1-x^2}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) partielle Integration

$$\left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_1^3 - \int\limits_1^3 \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\, x = 9\ln(3) - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^3 = 9\ln(3) - \frac{26}{9}$$

(b) Substitution

$$u = \sqrt{x} \ , \ u' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \qquad \int\limits_0^{\pi} 2\sin u \, \mathrm{d}\, u = [-2\cos u]_0^{\pi} = 4$$

(c) Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

Grenzwertmethode:

$$a = \left.\frac{1}{(1+x)}\right|_{x=1} = 1/2\,, \quad b = \left.\frac{1}{(1-x)}\right|_{x=-1} = 1/2\,.$$

Stammfunktion:

$$\frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right) + c$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 20. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die nachfolgenden Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{8}{x^4+4}\,\mathrm{d}\,x\,,$ **(b)** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{+\infty} e^{-x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^5}}\,\mathrm{d}\,x\,,$ **(d)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sin(1/x))^{1/3}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Denken Sie an das Majorantenkriterium 3.7.5.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus $x^4+4 > x^4$, $x\in\mathbb{R}$ folgt $8/(x^4+4) < 8/x^4$, $x\in\mathbb{R}$. Da das Integral $\int_1^{+\infty} 1/x^4\,\mathrm{d}\,x$ nach Beispiel 3.7.8 konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium 3.7.5 auch das Integral

$$\int_1^{+\infty} 8/(x^4+4)\,\mathrm{d}\,x.$$

(b) Es ist $|e^{-x}\cos x| \leqq |e^{-x}|\cdot|\cos x| \leqq e^{-x}$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Wir untersuchen nun das Integral $\int_{\pi/4}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ auf Konvergenz:

$$\int_{\pi/4}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/4}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{-e^{-b}}_{\longrightarrow 0}+e^{-\pi/4}\right) = e^{-\pi/4}.$$

Damit folgt die absolute Konvergenz für das ursprüngliche Integral.

(c) Es ist $x^5+1 > x^5 \Rightarrow 1/(x^5+1)^{1/2} < 1/x^{5/2}, x\in\mathbb{R}^+$. Da $5/2 > 1$ konvergiert das Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}\,x$$

und somit nach 3.7.5 auch das zu untersuchende Integral.

(d) Es ist $\sin(1/x)^{1/3} > 0$ und $(1/x)^{1/3} > 0$ für $x \geqq 1$ und

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(1/x)^{1/3}}{(1/x)^{1/3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(1/x)}{1/x}\right)^{1/3} = \lim_{z\to 0+0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{1/3} = 1.$$

Wegen $1/3 < 1$ divergiert das Integral $\int_1^{+\infty} 1/x^{1/3}\,\mathrm{d}\,x$ und damit wegen des Grenzwertkriteriums 3.7.11 auch das Integral $\int_1^{+\infty} (\sin(1/x))^{1/3}\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 21. *Reihendarstellung von Funktionen*

(a) Bestimmen Sie ohne Hilfe der Taylorformel für $f(x) = \ln(x^2+4)$ formal eine Reihenentwicklung und geben Sie das größtmögliche offene Intervall $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ an, auf dem die von Ihnen gefundene Reihe f tatsächlich darstellt.

Hinweis Stellen Sie f' als Reihe dar und integrieren Sie anschließend.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\,x^k$$

Welche Funktion stellt diese auf ihrem Konvergenzkreis dar?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1-(-x^2/4)}\right) = \frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{2\cdot 4^k}.$$

Der Konvergenzkreis dieser Reihe ist offenbar $K := (-2,2)$. Diese Reihe integrieren wir auf K gliedweise:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{2\cdot 4^k}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot 4^k\cdot(2k+2)}x^{2k+2} + C$$

Die Integrationskonstante erhalten wir einfach durch Punkteinsetzung: $f(0) = \ln(4) \Rightarrow C = \ln(4)$. Somit stimmt f auf K mit der Reihe

$$\ln(4) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)\cdot 2^{2k+1}}x^{2k+2}$$

überein und K kann nicht größer gewählt werden.

(b) Wir bestimmen den Konvergenzkreis der angegebenen Reihe mit den Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to+\infty}|a_k/a_{k+1}| = \lim_{k\to+\infty}\frac{1+1/k}{1+3/k} = 1.$$

Wir integrieren die Reihe nun zweimal hintereinander auf dem Konvergenzkreis $(-1,1)$:

$$\int\left(\int\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)x^k\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,x = \int\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)x^{k+1}\right) + C_1x\,\mathrm{d}\,x$$

$$= x^2\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)}_{\text{geom. Reihe}} + C_1x + C_2 = \frac{x^2}{1-x} + C_1x + C_2x := g(x).$$

Wir leiten nun die mit dieser Reihe auf $(-1, 1)$ übereinstimmende gefundene geschlossen Darstellung g zweimal ab:

$$g''(x) = ... = \left(\frac{2x - x^2}{(1-x)^2} + C_1\right)' = ... = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Somit ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)x^k = 2/(1-x)^3$$

für $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe H 22. *Reihendarstellung eines Integralwerts*

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Integralformel

$$\int_0^1 x^m \cdot (\ln x)^n \,\mathrm{d}\, x = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Zeigen Sie mit dieser Formel, dass

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}\, x = -\sum_{k=1}^{\infty}(-k)^{-k} = 1 - 1/4 + 1/27 - 1/256 \pm ...$$

gilt.

Hinweis: Schreiben Sie die zu integrierende Funktion mit Hilfe der $\exp$-Funktion geeignet um und verwenden Sie die Exponentialreihe.

Lösungshinweise hierzu: Wir nutzen den ersten Hinweis aus: $x^x = \exp(x \cdot \ln x)$ und erinnern uns an die Exponentialreihe: $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}\, x &= \int_0^1 \exp(x \cdot \ln x) \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \cdot (\ln x)^k}{k!}\right) \\
&\underbrace{=}_{\text{Exp.reihe ist abs. Konv.}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\int_0^1 x^k \cdot (\ln x)^k \,\mathrm{d}\, x\right) \\
&\underbrace{=}_{\text{Formel für}_{m=n=k}} \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k \frac{1}{(k+1)^{k+1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k-1}\frac{1}{(k)^k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}(-k)^{-k}.
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 23. *Nullstellenmenge skizzieren*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge $\mathcal{N} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy(y-\alpha)(-4+4x^2+y^2)$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Nullstellenmenge für $\alpha \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

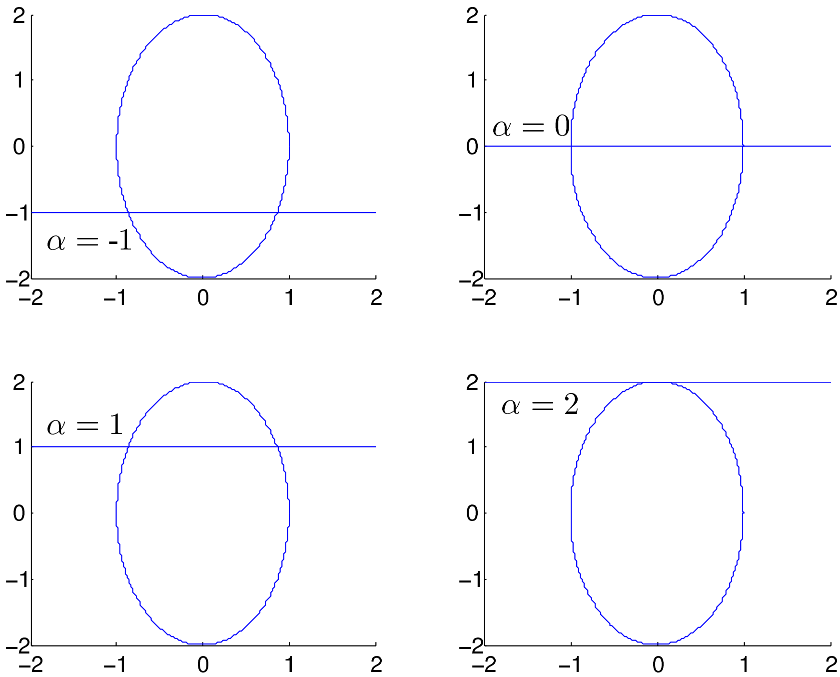
Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion f ist ein Produkt, deshalb ist sie gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

$$\begin{array}{lll} xy = 0 & \Rightarrow & x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ y - \alpha = 0 & \Rightarrow & y = \alpha \\ -4+4x^2+y^2 = 0 & \Rightarrow & \text{Ellipse } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2/4 = 1\} \end{array}$$

Die Nullstellenmenge $\mathcal{N}$ besteht also aus den x- und y-Achsen, der Geraden $y = \alpha$ und der Ellipse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2/4 = 1\}$.

(b)



Aufgabe H 24. *Stetigkeit*

Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen:

(a)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

wird durch $f(0,0) := 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig fortgesetzt.

(b) Für

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+4y^6}$$

existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\alpha x)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, aber f lässt sich nicht auf $\mathbb{R}^2$ stetig fortsetzen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir benutzen die ε, δ Definition 4.2.6 zum Nachweis der Stetigkeit im Ursprung.

$$|f(x,y)-(0,0)| = \frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|} \leqq 3 \cdot \frac{|x^2+y^2||y|}{|x^2+y^2|} = 3|y| \leqq 3|(x,y)|.$$

Wählt man also $\varepsilon = \delta/3$, so folgt die Behauptung.

(b)

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(\alpha x)^3}{x^2+(\alpha x)^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^3x^4}{x^2+\alpha^6x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^3x^2}{1+\alpha^6x^4} = \frac{0}{1} = 0.$$

Für alle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^2$, die auf den Geraden der Form $y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$ gegen $(0,0)$ konvergieren gilt also $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = 0$.

Wir betrachten nun die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (1/k, (1/k)^{1/3})_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{k\to\infty} f(b_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{(1/k)\cdot\left((1/k)^{1/3}\right)^3}{(1/k)^2+4\left((1/k)^{1/3}\right)^6} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1/k)^2}{5(1/k)^2} = 1/5.$$

Somit ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k)$. Damit kann f im Ursprung nicht stetig sein.

Aufgabe H 25. *Partielle Ableitungen von Polynomen aus* $\mathbb{R}^2$

Gegeben seien Polynome $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vom Totalgrad $\leqq 2$,

$$p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

mit Koeffizienten $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

Welche dieser Polynome erfüllen die folgenden Bedingungen?

(a) $\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 0\,,$ **(b)** $\dfrac{\partial^2 p}{(\partial x)^2}(x,y) = 0,\ \dfrac{\partial^2 p}{(\partial y)^2}(x,y) = 0\,,$

(c) $\dfrac{\partial^2 p}{(\partial x)^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 p}{(\partial y)^2}(x,y) = 1,\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} = 1\,.$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus
$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 0$$
folgt
$$b + 2dx + ey = 0.$$
Da dies für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten muss, erhalten wir mit Koeffizientenvergleich: $b = d = e = 0$. Die gesuchten Polynome haben damit die Form
$$p(x,y) = a + cy + fy^2$$

(b) Es gilt
$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial^2 x}(x,y) &= 2d = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial^2 y}(x,y) &= 2f = 0, \end{aligned}$$
woraus man erkennt, dass $d = f = 0$. Die gesuchten Polynome haben also die Form
$$p(x,y) = a + bx + cy + exy$$

(c) Es gilt
$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial^2 x}(x,y) + \frac{\partial p}{\partial^2 y}(x,y) &= 2d + 2f = 1 \\ \frac{\partial p}{\partial x\, \partial y} &= e = 1, \end{aligned}$$
Daraus folgt $e = 1$ und $f = 1/2 - d$. Die gesuchten Polynome haben daher die Form
$$p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + xy + (1/2 - d)y^2$$

Aufgabe H 26. *Plot eines Funktionsgraphen*

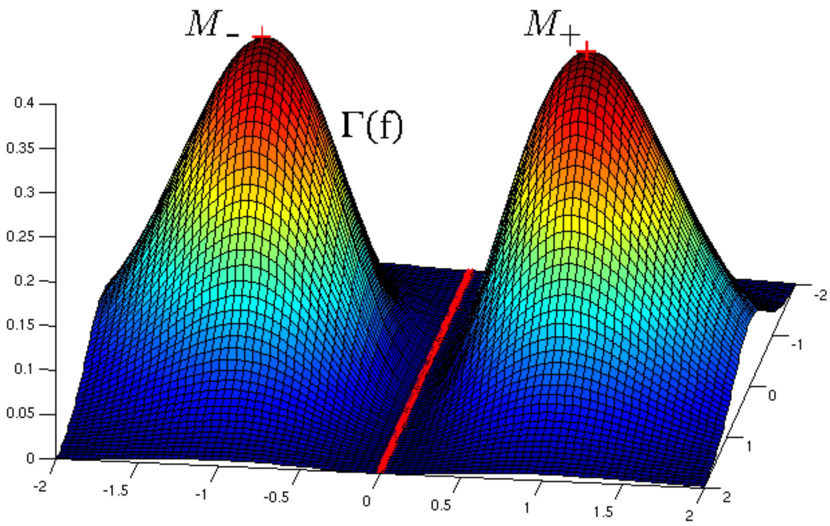
Es sei
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2 \cdot e^{-x^2-y^2}$$
gegeben.

(a) Visualisieren Sie $\Gamma(f)$ mit einem Computerprogramm Ihrer Wahl.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f. Zeichnen Sie diese, sowie die beiden Punkte $M_+ = (0, 1, f(0,1))$ und $M_- = (0, -1, f(0,-1))$ *von Hand* in Ihren Plot ein.

Lösungshinweise hierzu:

(a)



(b) $y^2 \cdot e^{-x^2-y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0$, d.h. die Nullstellenmenge von f ist die x-Achse. Die beiden Punkte, sowie die Nullstellenmenge sind im obigen Plot rot hervorgehoben.

M. Borgart, J. Hörner
A. Keller,
S. Müller-Platz

9. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A.-M. Sändig

Sommersemester 2011

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 27.

Bestimmen Sie den Gradienten ∇f und die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0)$ im Punkt x_0 in Richtung v in den folgenden Fällen:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2\,,\qquad x_0 = (1,2)\,,\qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\intercal$

(b) $f(x,y,z) = \sin(x^2) + ze^y\,,\qquad x_0 = (0,0,1)\,,\qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^\intercal$

(c) $f(x,y,z) = e^x yz\,,\qquad x_0 = (1,1,1)\,,\qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\intercal.$

Bestimmen Sie in **(c)** die Richtung und den Wert des steilsten Anstiegs an der Stelle x_0.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix},\ (\operatorname{grad} f)(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix},\ (\partial_v f)(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\,.$$

(b)

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x\cos x^2 \\ ze^y \\ e^y \end{pmatrix},\quad (\operatorname{grad} f)(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{3/2}\,.$$

(c)

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} yze^x \\ ze^x \\ ye^x \end{pmatrix},\quad (\operatorname{grad} f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e/\sqrt{3}\,.$$

Die Anstieg ist am größten wenn als Richtung der normierte Gradient verwendet wird, also $w = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^\intercal$ und der Wert ist $3e/\sqrt{3}$.

Aufgabe H 28.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer linearen Approximation Näherungswerte für

(a) $2.05^{1.9}$ **(b)** $\sqrt{1.1^2 + 1.9^2 + 2.05^2}$ **(c)** $\dfrac{e^{0.05}}{2.1}$.

Benutzen Sie dazu jeweils ein Taylor-Polynom (erster Stufe) mit dem nächstgelegenen ganzzahligen Entwicklungspunkt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man muss mit der linearen Taylor-Approximation sowohl 2.05 als auch 1.9 annähern, deshalb bekommt man eine Funktion in zwei Veränderlichen. Der Entwicklungspunkt ist hierbei $(2, 2)$.

$$f(x, y) = x^y = \exp(y \ln(x))$$

Für eine lineare Approximation werden noch die ersten partiellen Ableitungen benötigt.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \exp(y \ln(x)) \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cdot x^y \\ f_y(x, y) &= \exp(y \ln(x)) \cdot \ln(x) = \ln(x) \cdot x^y \end{aligned}$$

Damit erhält man das lineare Taylor-Polynom

$$\begin{aligned} T_1(f, (x, y), (2, 2)) &= f(2, 2) + f_x(2, 2)(x - 2) + f_y(2, 2)(y - 2) \\ &= 4 + 4(x - 2) + 4 \cdot \ln(2)(y - 2). \end{aligned}$$

Nun setzt man $x = 2.05$ und $y = 1.9$ ein.

$$T_1(f, (2.05, 1.9), (2, 2)) = 4 + 4 \cdot 0.05 + 4 \cdot \ln(2) \cdot (-0.1) = \frac{81}{20} - \frac{4}{10} \ln(2) \approx 3.923$$

Der exakte Wert ist $2.05^{1.9} \approx 3.911$.

(b) Nun müssen drei Werte approximiert werden. Es handelt sich also hierbei um eine lineare Taylor-Approximation in drei Variablen. In diesem Aufgabenteil ist der Entwicklungspunkt $(1, 2, 2)$. Die restlichen Schritte sind wie im Aufgabenteil **(a)**, mit der Änderung, dass man dieses Mal 3 partielle erste Ableitungen benötigt.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ f_x(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} 2x \\ f_y(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} 2y \\ f_z(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} 2z \\ T_1(f, (x, y, z), (1, 2, 2)) &= f(1, 2, 2) + f_x(1, 2, 2)(x - 1) + f_y(1, 2, 2)(y - 2) \\ &\quad + f_z(1, 2, 2)(z - 2) \\ T_1(f, (x, y, z), (1, 2, 2)) &= 3 + \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 2) + \frac{2}{3}(z - 2) \\ T_1(f, (1.1, 1.9, 2.05), (1, 1, 2)) &= 3 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 - \frac{2}{3} \cdot 0.1 + \frac{2}{3} \cdot 0.05 = 3 \end{aligned}$$

Der exakte Wert ist $\sqrt{1.1^2 + 1.9^2 + 2.05^2} \approx 3.004$.

(c) In diesem Fall handelt es sich wieder um eine Taylor-Approximation in zwei Variablen. Dabei ist der Entwicklungspunkt $(0, 2)$. Die Funktion, die approximiert werden soll, ist:

$$f(x, y) = \frac{\exp(x)}{y}$$

Nun berechnet man den Näherungswert analog wie im $\mathbf{a}$)–Teil.

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\exp(x)}{y} \\
f_y &= -\frac{\exp(x)}{y^2} \\
T_1(f, (x, y), (0, 2)) &= f(0, 2) + f_x(0, 2)(x - 0) + f_y(0, 2)(y - 2) \\
T_1(f, (x, y), (0, 2)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}(y - 2) \\
T_1(f, (0.05, 2.1), (0, 2)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.05 - \frac{1}{4}(2.1 - 2) = 0.5
\end{aligned}$$

Der exakte Wert ist $\frac{\exp(0.05)}{2.1} \approx 0.5006$.

Aufgabe H 29.

Bestimmen Sie alle flachen Punkte des Graphen der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + 4x + y - 1\,.$$

Welchen Typ haben die anderen Punkte?
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Punkt $(1, 1, f(1, 1))$ und die Matrixdarstellung der Schmiegquadrik im Punkt $(2, 0, f(2, 0))$.

Lösungshinweise hierzu: Die Bedingung für einen flachen Punkt lautet, daß die Schmiegquadrik an den Punkt eine Ebene ist.
Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Hessematrix im Punkt die Nullmatrix ist.

Der Gradient ist

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (3x^2 - 3y^2 - 6x + 4, -6xy + 6y + 1)^\intercal$$

und die Hessematrix lautet:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 6 & -6y \\ -6y & -6x + 6 \end{pmatrix}$$

Es muss also $x = 1$ und $y = 0$ gelten und somit ist $(1, 0, 1)$ der einzige flache Punkt des Graphen.

In allen anderen Fällen ist die Determinante der Hesse-Matrix negativ, die Matrix hat dann also zwei Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen. Daher sind alle anderen Punkte des Graphen hyperbolisch.
Für $x = 1, y = 1$ ist $f(1,1) = 2$ und $\operatorname{grad} f(1,1) = (-2,1)^\intercal$.
Die Tagentialebene hat also die Gleichung

$$z = T_1(f,(x,y),(1,1)) = 2 - 2(x-1) + 1(y-1) \text{ bzw. } 2x - y + z - 3 = 0\,.$$

Für $x = 2, y = 0$ ist $f(2,0) = 3,\ \operatorname{grad} f(2,0) = (4,1)^\intercal$ und

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Die Schmiegquadrik wird durch die Gleichung

$$z = 3 + 4(x-2) + y + \frac{6}{2}(x-2)^2 - \frac{6}{2}y^2$$

beschrieben. Umgewandelt in Matrix-Schreibweise mit $v^\intercal = (x,y,z)$ ist dies $v^\intercal A v + 2a^\intercal v + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, c = 14\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

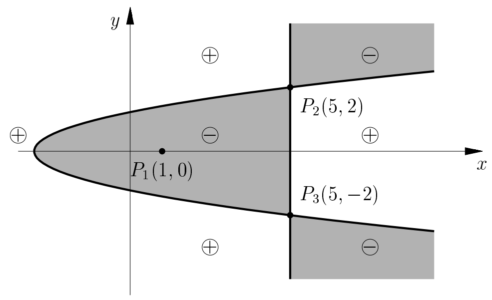
Aufgabe H 30.

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)\,.$$

Bestimmen und skizzieren Sie die Gebiete in der x-y-Ebene, in denen f positiv bzw. negativ ist. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte sowie deren Typ.

Lösungshinweise hierzu:
$f(x,y) = 0$, falls $x - 2y^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 + 2y^2$ oder $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$



Für die kritischen Punkte gilt:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2y^2 - 2 = 0 \quad \text{und} \\ f_y &= -4xy + 20y = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\; P_1 = (1, 0, -16),\; P_2 = (5, 2, 0),\; P_3 = (5, -2, 0)$

Mit einer Umgebungsbetrachtung folgt aus der Skizze, dass P_1 ein lokales Minimum ist, und $P_2,\; P_3$ Sattelpunkte sind.
Alternativ kann man den Typ der kritischen Punkte auch mit der Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4x + 20 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

Aufgabe H 31.

Ein Tetraeder hat die Ecken

$$A = (0,0,0)\,, \quad B = (2,0,0)\,, \quad C = (0,3,0)\,, \quad D = (0,0,4)\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Raumpunkt P, für den die Summe S der Quadrate der Entfernungen von den Ecken des Tetraeders minimal ist, und berechnen Sie S.

(b) Wo liegt der gesuchte Punkt, wenn man zusätzlich fordert, dass er auf der Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ liegen soll?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Summe der Quadrate des Abstands ist

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &= (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 + (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 \\ &\quad +(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2 + (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 \\ &= 4x^2 + 4y^2 + zz^2 - 4x - 6y - 8z + 29 \end{aligned}$$

Der Gradient ist

$$\operatorname{grad} S(x,y,z) = (8x-4, 8y-6, 8z-8)^\intercal$$

und setzt man dessen Komponenten zu 0 erhält man den kritischen Punkt $(1/2, 3/4, 1)$ mit $S(1/2, 3/4, 1) = 87/4$. Da die Funktion ein Minimum besitzen muss, mus dies am einzigen kritischen Punkt angenommen werden.

(b) Die Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ hat den Gradienten

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)^\intercal$$

und die Bedingung $\operatorname{grad} S + \lambda \operatorname{grad} g = 0$ liefert

$$(x,y,z) = \frac{1}{8+2\lambda}(4,6,8)\,.$$

Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, erhält man eine quadratische Gleichung für λ

$$4\lambda^2 + 32\lambda + 64 = 116$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -4 \pm 4\sqrt{7}\,.$$

Die kritischen Stellen sind

$$\pm\frac{1}{4\sqrt{7}}(2,3,4)$$

und da die Punkte A, B, C und D nicht negative Koordinaten haben ist Abstand bei dem kritischen Punkt mit positiven Koordinaten kleiner.

Aufgabe H 32.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren den Abstand der Geraden

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 1\}$$

von der Parabel

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2\}\,.$$

Hinweis: Es ist der Abstand zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ zu minimieren, von denen der eine die Geradengleichung und der andere die Parabelgleichung erfüllt, die zu minimierende Funktion hat also vier Variablen.

Lösungshinweise hierzu:
Für einen Punkt (x_1, y_1) auf g und (x_2, y_2) auf p ist

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

zu minimieren, wobei die Nebenbedingungen

$$g : x_1 - y_1 - 1 = 0\,, \quad p : x_2^2 - y_2 + 2 = 0$$

erfüllt sein müssen.
Es ergeben sich die Lagrange-Bedingungen

$$\begin{aligned}
2(x_1 - x_2) + \lambda &= 0\,, && (1)\\
-2(x_1 - x_2) + \mu 2x_2 &= 0\,, && (2)\\
2(y_1 - y_2) - \lambda &= 0\,, && (3)\\
-2(y_1 - y_2) - \mu &= 0\,, && (4)\\
x_1 - y_1 - 1 &= 0\,, && (5)\\
x_2^2 - y_2 + 2 &= 0\,. && (6)
\end{aligned}$$

Aus der dritten und vierten Gleichungen folgt durch Addition $\lambda = -\mu$ und dies führt mit der Addition der ersten beiden Gleichungen auf

$$\lambda + 2\mu x_2 = 0 \Rightarrow \lambda - 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee x_2 = 1/2\,.$$

Ist $\lambda = \mu = 0$ folgt daraus, dass ein Schnittpunkt existiert, aber die Gleichung $x^2 + 2 = x - 1$ hat keine (reelle) Lösung. Es ist also $x_2 = 1/2$ und damit $y_2 = 1/4 + 2 = 9/4$.
Einsetzen in die erste Gleichung liefert nun $2x_1 = 1 - \lambda$ und mit der Gleichung der Geraden ist $2y_1 = 1 - \lambda - 2 = -\lambda - 1$.
Setzt man alles in die dritte Gleichung ein ist

$$-\lambda - 1 - 9/2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -11/4\,,$$

und damit $x_1 = 15/8$ und $y_1 = 7/8$.
Der Abstand ist

$$\sqrt{\left(\frac{15}{8} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{8} - \frac{9}{4}\right)^2} = 11/(4\sqrt{2})\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 33. *Ableiten in Polarkoordinaten*

Es sei eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y)$$

gegeben. Weiter wird eine Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} (f\circ g)_r \\ (f\circ g)_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \circ g \\ f_y \circ g \end{pmatrix}$$

(b) Folgern Sie mit (a), dass folgendes gilt:

$$(\nabla f)\circ g := \begin{pmatrix} f_x \circ g \\ f_y \circ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\frac{1}{r}\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f\circ g)_r \\ (f\circ g)_\varphi \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Kettenregel für die Jakobi-Matrix erhalten wir:

$$((f\circ g)_r, (f\circ g)_\varphi) = (f_x\circ g, f_y \circ g) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Durch Transponieren der Matrizen erhalten wir das gewünschte Ergebniss.

(b) Durch links Multiplikation der Inversen Matrix zu $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} f_x \circ g \\ f_y \circ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\frac{1}{r}\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f\circ g)_r \\ (f\circ g)_\varphi \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 34. *Kettenregel*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \\ \dfrac{x_2}{x_3} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$g\colon (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin(y_1) \\ \ln(y_2) \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f\,(x_1,x_2,x_3)$ und $\mathrm{J}g\,(y_1,y_2)$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Komposition $\mathrm{J}(g\circ f)\,(x_1,x_2,x_3)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\mathrm{J}f\,(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_3} & -\dfrac{x_2}{x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J}g\,(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \cos(y_1) & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y_2} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathrm{J}(g\circ f)\,(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1+\dfrac{1}{x_3} & -\dfrac{x_2}{x_3^2} \\ \cos(x_1x_2)x_2 & \cos(x_1x_2)x_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_3} & -\dfrac{1}{x_3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 35. *Potential*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8x\,\ln(y)+e^{-y} \\ \alpha^2\,\dfrac{x^2}{y}+\alpha\beta x\,e^{-y} \end{pmatrix}$$

mit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(a) Für welche α und β besitzt das Vektorfeld ein Potential?

(b) Bestimmen Sie für die oben bestimmten α und β die Menge *aller* Potentiale.

Hinweis: Ohne Probe taugt die schönste Rechnung nix.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Damit ein Potential existieren kann muss folgendes gelten

$$\frac{\partial}{\partial y}(8x\ln(y)+e^{-y}) = 8\frac{x}{y}-e^{-y} = 2\alpha^2\frac{x}{y}+\alpha\beta e^{-y} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha^2\frac{x^2}{y}+\alpha\beta e^{-y})$$

Somit muss $\alpha\beta=-1$ und $\alpha^2=4$ gelten. Es existiert also ein potential für $(\alpha,\beta)\in \{(2,-\frac{1}{2}),\,(-2,\frac{1}{2})\}$.

(b) Es reicht ein Potential zu berechnen, da die Werte α^2 und $\alpha\beta$ in beiden Fällen übereinstimmen. Ein Potential ist somit gegeben durch

$$U(x,y) = 4\frac{x^2}{y} - e^{-y}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Potential, Kurvenintegral*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon\ (x,\ y,\ z) \mapsto \left(\alpha\frac{z}{x},\ \frac{z}{y},\ \ln(xy)\right)^\intercal$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie ein solches.

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K parametrisiert wird durch

$$C\colon [-1,1] \to K\colon t \mapsto \left(\ e^{(t^2)},\ \ 1,\ \ \sin(\pi t)\ \right)^\intercal .$$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\alpha - 1}{x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} f = -\alpha z \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

(b) Für $\alpha = 1$ erhalten wir $\operatorname{rot} f = 0$. Somit existiert ein Potential zu f für $\alpha = 1$. Ein solches ist dann gegeben durch

$$U(x,y,z) = z\ln(xy)$$

(c) Für $\alpha = 1$ existiert ein Potential und da die Kurve K geschlossen ist, ist $\int_K f(x) \bullet dx = 0$. Für $\alpha = 0$ erhalten wir:

$$\int_K f(x) \bullet dx = \int_{-1}^{1} f(C(t)) \bullet C'(t)dt = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t) + \pi t^2 \cos(\pi t)dt = \frac{1}{\pi} - 2$$

Aufgabe H 37. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

Durch den Kreis $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}$ sei ein Draht, mit konstanter Massendichte $\varrho(x,y) = 3$, beschrieben.

(a) Geben Sie 2 mögliche Parametrisierungen des Drahtes an.

(b) Berechnen Sie die Masse des Drahtes, die durch das Kurvenintegral $\int_K \varrho(s)\,\mathrm{d}\,s$ gegeben ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Kreis $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$ wird durch

$$C(t)=\begin{pmatrix}2\cos(t)\\2\sin(t)\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad 0\leqq t\leqq 2\pi$$

und durch

$$C(t)=\begin{pmatrix}2\sin(t)\\2\cos(t)\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \pi\leqq t\leqq \pi$$

parametrisiert.

(b)

$$\begin{aligned}\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{2\pi} f(C(t))\cdot|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{4\,(\sin(t))^2+4\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^{2\pi} 3\sqrt{4}\,\mathrm{d}\,t = 12\pi\end{aligned}$$

Aufgabe H 38. *Identität für Differentialoperatoren*

Verifizieren Sie für stetig differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g,h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folgende Identitäten:

(a) $\operatorname{grad}(g\bullet h)=(\mathrm{J}g)^\intercal h+(\mathrm{J}h)^\intercal g$

(b) $\operatorname{rot}(fg)=f\operatorname{rot}g-g\times\operatorname{grad}f$

Die obigen Identitäten gelten übrigens auch für ebene Vektorfelder, wenn man für Vektoren $a,b\in\mathbb{R}^2$ mit $a=(a_1,a_2)$ und $b=(b_1,b_2)$ definiert $a\times b:=a_1b_2-a_2b_1$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(g\bullet h) &= \begin{pmatrix}(g_1h_1)_x+(g_2h_2)_x+(g_3h_3)_x\\(g_1h_1)_y+(g_2h_2)_y+(g_3h_3)_y\\(g_1h_1)_z+(g_2h_2)_z+(g_3h_3)_z\end{pmatrix}\\[1em]
&= \begin{pmatrix}g_1(h_1)_x+h_1(g_1)_x+g_2(h_2)_x+h_2(g_2)_x+g_3(h_3)_x+h_3(g_3)_x\\g_1(h_1)_y+h_1(g_1)_y+g_2(h_2)_y+h_2(g_2)_y+g_3(h_3)_y+h_3(g_3)_y\\g_1(h_1)_z+h_1(g_1)_z+g_2(h_2)_z+h_2(g_2)_z+g_3(h_3)_z+h_3(g_3)_z\end{pmatrix}\\[1em]
&= \begin{pmatrix}h_1(g_1)_x+h_2(g_2)_x+h_3(g_3)_x\\h_1(g_1)_y+h_2(g_2)_y+h_3(g_3)_y\\h_1(g_1)_z+h_2(g_2)_z+h_3(g_3)_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g_1(f_1)_x+g_2(f_2)_x+g_3(f_3)_x\\g_1(f_1)_y+g_2(f_2)_y+g_3(f_3)_y\\g_1(f_1)_z+g_2(f_2)_z+g_3(f_3)_z\end{pmatrix}\\[1em]
&= (\mathrm{J}g)^\intercal h+(\mathrm{J}h)^\intercal g\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(fg) &= \begin{pmatrix} (fg_3)_y - (fg_2)_z \\ (fg_1)_z - (fg_3)_x \\ (fg_2)_x - (fg_1)_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(g_3)_y + g_3(f)y - f(g_2)_z - g_2(f)_z \\ f(g_1)_z + g_1(f)_z - f(g_3)_x - g_3(f)_x \\ f(g_2)_x + g_2(f)_x - f(g_1)_y - g_1(f)_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(g_3)_y - f(g_2)_z \\ f(g_1)_z - f(g_3)_x \\ f(g_2)_x - f(g_1)_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -g_3(f)y + g_2(f)_z \\ -g_1(f)_z + g_3(f)_x \\ -g_2(f)_x + g_1(f)_y \end{pmatrix} \quad = f \operatorname{rot} g - g \times \operatorname{grad} f
\end{aligned}
$$