

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 46. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+2)}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{(3n)!}$$

#### Lösungshinweise hierzu:

##### (a) Wurzelkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|(-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

also ist die Reihe absolut konvergent.

##### (b) Leibnizkriterium

Offensichtlich ist  $\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\right)$  eine monotone Nullfolge, und somit ist die Reihe nach Leibniz konvergent.

Die Reihe ist nicht absolut konvergent, denn  $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2}} = \frac{1}{n+2}$ .

Da die harmonische Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent ist, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ .

##### (c) Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3(n+1)!}{(3(n+1))!}}{\frac{3n!}{(3n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(3n)!}{n!(3n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0 < 1$$

Also ist die Reihe absolut konvergent.

### Aufgabe H 47. Grenzwerte von Reihen

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2 \cdot 4^n} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^k} \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(n+2)(n+3)}$$

Hinweis: Zeigen Sie für (c) zunächst, dass  $\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$  gilt.

#### Lösungshinweise hierzu:

(a) Die geometrische Reihe konvergiert für  $q = 3/4$ , somit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2 \cdot 4^n} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{3}{2} \left( -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n \right) = \frac{3}{2} (-1 + 4) = \frac{9}{2}.$$

(b) Die Variable  $n$  ist unabhängig vom Summationsindex, somit gilt mit  $\frac{1}{n+1} < 1$  und der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^k} &= n \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right)^k = n \left( -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right)^k \right) \\ &= n \left( -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) = n \left( -1 + \frac{n+1}{n} \right) = 1. \end{aligned}$$

(c) Mit Hilfe des Hauptnenners gilt

$$\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{(n+3) - (n+2)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

es ergibt sich also die Teleskopsumme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(n+2)(n+3)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = -2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right) = -\frac{2}{3}.$$

#### Aufgabe H 48. Stetigkeit (Umgebungen)

Skizzieren Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 < x \end{cases}.$$

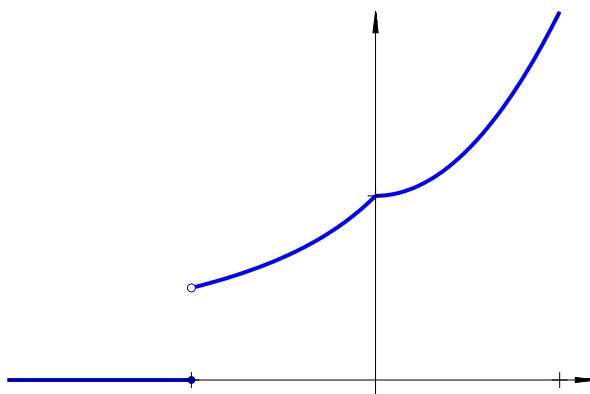
Bestimmen Sie mit Hilfe von Umgebungen, ob die Funktion  $f$  an den Stellen  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = -1$  stetig ist.

#### Lösungshinweise hierzu:

Die Funktion ist nach Auswertung der geometrischen Reihe

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 < x \end{cases}.$$

Skizze:



- $x_1 = 1$

Betrachtet wird eine hinreichend kleine Umgebung um  $x_1$ , beispielsweise  $M := (0, 2)$ . Wenn mit einem  $x \in M$  für den Funktionswert  $f(x) \in U := U_\varepsilon(f(1))$  gilt, so ergibt eine Abschätzung

$$|f(x) - f(1)| = |x^2 + 1 - (1 + 1)| = |x^2 - 1| = |x + 1||x - 1| < 3|x - 1|.$$

Mit der Wahl  $\delta := \varepsilon/3$  erhält man zu jeder Umgebung  $U$  eine Umgebung  $V := U_\delta(1)$  derart, dass

$$f(V \cap M) \subseteq U.$$

- $x_2 = 0$

Wegen der unterschiedlichen Funktionsdefinitionen ist eine getrennte Betrachtung der positiven und negativen Bereiche notwendig.

Für  $x > 0$  (mit  $M := (0, 1)$ ) ist

$$|f(x) - f(0)| = |x^2 + 1 - (0 + 1)| = |x^2| = |x - 0|^2,$$

für jedes  $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$  gilt somit

$$|x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Für  $x < 0$  (mit  $M := (-1, 0)$ ) ist

$$|f(x) - f(0)| = \left| \frac{1}{1-x} - 1 \right| = \left| \frac{1 - 1 + x}{1-x} \right| = \frac{|x|}{|1-x|} < |x - 0|$$

für jedes  $\delta \leq \varepsilon$  gilt somit

$$|x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Insgesamt führt die Wahl  $\delta := \min(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$  auf die Aussage:

Zu jeder Umgebung  $U := U_\varepsilon(f(0))$  und dem Definitionsbereich  $M := (-1, 1)$  gibt es eine Umgebung  $V := U_\delta(0)$  derart, dass

$$f(V \cap M) \subseteq U.$$

- $x_3 = -1$

Wegen

$$\begin{aligned} -1 < x < y < 0 \\ 2 > 1 - x > 1 - y > 1 \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-y} < 1 \end{aligned}$$

ist  $f$  in  $(-1, 0]$  eine streng monoton steigende Funktion, dort gilt also

$$f(x) \geq \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}.$$

Jede Umgebung  $U_\delta(-1)$  enthält also Stellen (beispielsweise  $x = -1 - \delta/2$ ), deren Funktionswerte nicht in  $U_{1/4}(f(-1))$  liegen. Es ist also nicht möglich, zu jeder Umgebung  $U := U_\varepsilon(f(-1))$  und dem Definitionsbereich  $M := (-2, 0)$  eine Umgebung  $V := U_\delta(1)$  zu finden, dass

$$f(V \cap M) \subseteq U$$

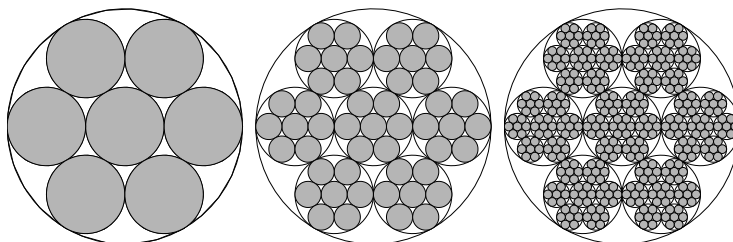
gilt.

Zusammenfassend ist  $f$  an  $x_1$  und  $x_2$  stetig und an  $x_3$  unstetig.

#### Aufgabe H 49. Iteration

Zu Beginn (Schritt 0) wird ein Kreis vom Radius  $r_0$  betrachtet. Diesem werden sieben gleiche Kreise maximaler Größe einbeschrieben, so dass es nur Berührungen, aber keine Überschneidungen gibt. Dieser Prozess wird wiederholt (iteriert).

- Bestimmen Sie die Anzahl  $a_n$  und die Radien  $r_n$  der im Schritt  $n \in \mathbb{N}$  neu entstehenden Kreise.
- Geben Sie die Gesamtlänge  $s_n$  der Ränder aller Kreise an, die in jedem Schritt neu entstehen. Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .
- Geben Sie die Gesamtlänge aller Ränder an, die bis zum Schritt  $n$  entstanden sind.
- Geben Sie die Gesamtfläche der im Schritt  $n \in \mathbb{N}$  neu entstehenden Kreise an. Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Gesamtfläche für  $n \rightarrow \infty$ .



**Lösungshinweise hierzu:**

(a) In jedem Schritt wird aus einem bestehenden Kreis sieben neue:

$$a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_n = 7^n.$$

Je drei neue Kreise füllen den Durchmesser eines bestehenden Kreises:

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n \Rightarrow r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n r_0.$$

(b) Der Umfang eines Kreises mit der Anzahl der neu entstehenden Kreise multipliziert ergibt die Gesamtlänge

$$s_n = 2\pi r_n a_n = 2\pi \left(\frac{1}{3}\right)^n r_0 7^n = 2\pi r_0 \left(\frac{7}{3}\right)^n,$$

die bestimmt divergent ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty.$$

(c) Die Gesamtlänge aller bisherigen Ränder ist die Aufsummierung der neu entstehenden Ränder.

$$g_n = \sum_{k=0}^n s_k = 2\pi r_0 \sum_{k=0}^n \left(\frac{7}{3}\right)^k = 2\pi r_0 \frac{1 - \left(\frac{7}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{7}{3}} = \frac{3\pi}{2} r_0 \left( \left(\frac{7}{3}\right)^{n+1} - 1 \right).$$

(d) Die Fläche eines Kreises mit der Anzahl der neu entstehenden Kreise multipliziert ergibt die Gesamtfläche

$$A_n = \pi r_n^2 a_n = \pi r_0^2 \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

mit dem Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0.$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Hausübungen Teil 1, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 24. – 30. April

### Aufgabe H 50. Stetige Fortsetzung

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  an und untersuchen Sie ihr Verhalten an den Rändern von  $D$  (inklusive  $-\infty$  und  $+\infty$ ).

(a)  $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

(b)  $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

(c)  $h(x) = \cos(\sqrt{x}) + \sqrt{\cos(x)}$

An welchen Punkten in  $\mathbb{R}$  und mit welchen Funktionswerten lassen sich die Funktionen (einseitig) stetig fortsetzen?

### Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Bruch lässt sich zu

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{(x+1)(x-1)(x^2+3)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

umformen, ist also für  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$  definiert. Innerhalb des Definitionsbereiches gilt dabei

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 2}.$$

Dies kann für die Grenzwerte an den Rändern verwendet werden.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3/x}{1 - 2/x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3/x}{1 - 2/x} = +\infty$$

Somit lässt sich  $f$  an folgenden Stellen stetig fortsetzen:

$$f(-1) = -\frac{4}{3}, \quad f(1) = -4$$

An  $x = 2$  weist  $f$  eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel auf, ist dort also nicht stetig ergänzbar.

- (b) Der Nenner im Argument des Sinus ist  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ , deshalb ist der maximale Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Mit  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 1)^{-1} = 0$  ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \sin(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = \sqrt{1 + \frac{2}{n\pi}}$  konvergiert von rechts gegen  $x_0 = 1$ . Die Funktionswerte konvergieren dagegen nicht:

$$\begin{aligned} g(x_n) &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n\pi} + 1} - 1}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{n\pi}}\right) \\ &= \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{für } n = 4k - 3 \\ -1 & \text{für } n = 4k - 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Ein entsprechendes Verhalten findet sich durch linksseitige Annäherung an  $x_0 = 1$  mittels  $x_n = \sqrt{1 - \frac{2}{n\pi}}$  und an  $x_1 = -1$  durch die Folgen mit

$$x_n = \sqrt{-1 \pm \frac{2}{n\pi}}.$$

Somit ist  $g$  in  $\{-1, 1\}$  weder stetig noch stetig ergänzbar.

- (c)  $\sqrt{x}$  ist definiert und stetig für  $x \geq 0$ ,  
 $\sqrt{\cos(x)}$  ist definiert und stetig, falls  $\cos(x) \geq 0$ .

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Insgesamt ist

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R}_0^+ \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right]\right) \\ &= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] \dots \end{aligned}$$

Die Funktion ist in den Rändern des Definitionsbereichs

$$0 \text{ und } \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$$

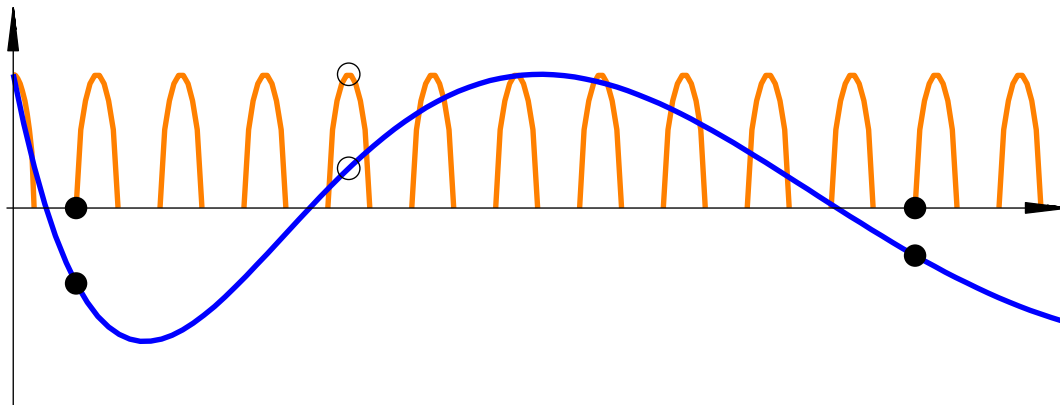
somit definiert und (einseitig) stetig.

Auf den negativen reellen Zahlen ist  $h$  nicht definiert, deshalb erübrigt sich eine Grenzwertbetrachtung für  $x \rightarrow -\infty$ .

Die beiden Teilfunktionen

$$h_1(x) = \cos(\sqrt{x}), \quad h_2(x) = \sqrt{\cos(x)}$$

sind in folgender Skizze abgetragen ( $h_1$  blau,  $h_2$  orange).



Es lassen sich damit zwei Folgen  $(y_n), (z_n)$  konstruieren:

- Jeweils am linken Ende eines orangenen Bogens ( $h_2(y_n) = 0$ ), der in einem Bereich liegt, in dem die blaue Funktion negativ ist ( $h_1(y_n) < 0$ )  
schwarze Punkte  $\Rightarrow h(y_n) = h_1(y_n) + h_2(y_n) < 0$
- In der Mitte eines orangenen Bogens ( $h_2(z_n) = 1$ ), der in einem Bereich liegt, in dem die blaue Funktion positiv ist ( $h_1(z_n) > 0$ )  
Kreise  $\Rightarrow h(z_n) = h_1(z_n) + h_2(z_n) > 1$

Die Funktionswerte beider Folgen sind beschränkt (zumindest durch  $-1$  und  $2$ ), besitzen somit je einen Häufungspunkt.  $h(y_n)$  hat aber einen nicht-positiven Häufungspunkt,  $h(z_n)$  hat einen  $\geq 1$ . Somit besitzt  $h$  mehrere unterschiedliche Häufungspunkte, ist also nicht konvergent für  $x \rightarrow \infty$ .

### Aufgabe H 51. Stetigkeit

Bestimmen Sie die reellen Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  so, dass die folgenden Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig sind.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{1+x^2}, & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{x^3-1}{6(1-x)}, & \text{für } x > 1 \end{cases}, \quad (b) g(x) = \begin{cases} b \sin(x), & \text{für } x < \pi/2 \\ 2, & \text{für } x = \pi/2 \\ \frac{c}{\pi}x, & \text{für } x > \pi/2 \end{cases}$$

**Lösungshinweise hierzu:**



- (a) Außerhalb von  $x = 1$  ist  $f$  durch Quotienten stetiger Funktionen definiert und somit selbst stetig. Eine Polynomdivision ergibt  $x^3 - 1 = (1 - x)(-1 - x - x^2)$  und somit

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3 - 1}{6(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-1 - x - x^2}{6} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{ax}{1 + x^2} = \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

$f$  ist also stetig für  $a = -1$ .

- (b) Außerhalb von  $x = \pi/2$  ist  $g$  aus stetigen Funktionen aufgebaut, somit stetig. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} b \sin(x) = b \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{c}{\pi} x = \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Stetigkeit auch in  $x = \pi/2$  liegt also vor, falls  $b = 2$  und  $c = 4$ .

### Aufgabe H 52. Funktionsgrenzwerte

- (a) Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sin(x))^2 - 5 \sin(x) \cos(x/2)}{\frac{x^2 - 3x}{5x^3 + 4} + \frac{5x^3 + 4}{x^2 - 3x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \sin(x)/x^2 \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan(x)}$$

- (b) Bestimmen Sie, für welche  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}$  der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 5} - \sqrt{ax + b}$$

in  $\mathbb{R}$  existiert.

### Lösungshinweise hierzu:

- (a) • Der Zähler lässt sich abschätzen

$$|(\sin(x))^2 - 5 \sin(x) \cos(x/2)| < |\sin(x)|^2 + 5|\sin(x)||\cos(x/2)| < 1^2 + 5 = 6,$$

und eine Erweiterung der Summanden im Nenner liefert

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{(\sin(x))^2 - 5 \sin(x) \cos(x/2)}{\frac{x^2 - 3x}{5x^3 + 4} + \frac{5x^3 + 4}{x^2 - 3x}} \right| < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{\left| \frac{x^{-1} - 3x^{-2}}{5 + 4x^{-3}} + \frac{5x + 4x^{-2}}{1 - 3x^{-1}} \right|} = 0$$

- Da  $\sin(x)/x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  beschränkt ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} \frac{\sin(x)}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0-0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot 1} = \frac{0}{1} = 0$$

(b) Eine Erweiterung führt auf

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-5} - \sqrt{ax+b} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-5} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{x-5} + \sqrt{ax+b})}{\sqrt{x-5} + \sqrt{ax+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5-ax-b}{\sqrt{x-5} + \sqrt{ax+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-a}{\sqrt{1-\frac{5}{x}} + \sqrt{a+\frac{b}{x}}} \sqrt{x} + \frac{-5-b}{\sqrt{x-5} + \sqrt{ax+b}}. \end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert nur, falls  $a = 1$ , der zweite konvergiert immer:  $b \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe H 53. Gleichheitsproblem

Gegeben sind die Funktionen

$$f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (4-x^2) \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -x.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung  $f(x) = g(x)$  mindestens drei Lösungen im Intervall  $(-\pi, \pi)$  hat.

*Hinweis:* Untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow \pi - 0$  und  $x \rightarrow -\pi + 0$  und werten Sie  $f$  an  $x = \pm 2$  aus.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Funktion

$$h: x \mapsto f(x) - g(x) = (4-x^2) \tan\left(\frac{x}{2}\right) + x$$

ist für  $x \rightarrow -\pi + 0$  bestimmt divergent nach  $+\infty$  und für  $x \rightarrow +\pi - 0$  bestimmt divergent nach  $-\infty$ . An  $x = \pm 2$  ist  $f(x) = 0$  und somit ist  $h(-2) = -2$  und  $h(2) = 2$ . Da  $h$  als Summe aus einer steigenden Funktion und einem Produkt stetiger Funktionen selbst auch stetig ist, muss nach dem Nullstellensatz in den Intervallen  $(-\pi, -2)$ ,  $(-2, 2)$  und  $(2, \pi)$  je eine Nullstelle liegen.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Hausübungen Teil 2, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 1. - 7. Mai

### Aufgabe H 54. Konvergenzkreise

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius  $\rho$  der folgenden Reihen und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls für  $z \in \mathbb{R}$ . Skizzieren Sie die Konvergenzkreise.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{2j^2 + j - 1}{3j^2 + 2j + 17} \right)^j z^j & \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k!(z + 1 - i)^k \\ \text{(c)} \quad \sum_{\ell=3}^{\infty} \left( \frac{3\ell + (-1)^\ell \ell}{2\ell + 1} \right)^\ell z^\ell & \text{(d)} \quad \sum_{m=0}^{\infty} z^{m!} \end{array}$$

### Lösungshinweise hierzu:

(a) Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$

Konvergenzradius

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\left| \left( \frac{2j^2 + j - 1}{3j^2 + 2j + 17} \right)^j \right|} = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{2 + 1/j - 1/j^2}{3 + 2/j + 17/j^2} \right| = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3}{2}$$

In den reellen Randpunkten  $z = \pm 3/2$  wird die Potenzreihe zu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{2j^2 + j - 1}{3j^2 + 2j + 17} \right)^j \left( \pm \frac{3}{2} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left( \pm \frac{6j^2 + 3j - 3}{6j^2 + 4j + 34} \right)^j}_{=: a_j}$$

Eine Polynomdivision ergibt mit einer Abschätzung (für  $j \geq 37$ )

$$|a_j| = \left( 1 - \frac{j + 37}{6j^2 + 4j + 34} \right)^j \geq \left( 1 - \frac{2j}{6j^2} \right)^j = \left( 1 - \frac{1}{3j} \right)^j$$

und die Substitution  $n = 3j$  führt auf

$$|a_j| = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n/3} = \sqrt[3]{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$$

Die Reihenglieder bilden somit keine Nullfolge, weshalb die Reihe nicht konvergieren kann.

(b) Entwicklungspunkt  $z_0 = -1 + i$

Konvergenzradius

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{1} = \infty \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$$

Der Konvergenzkreis enthält keine reellen Punkte, eine Randuntersuchung erübrigt sich.

**(c)** Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ 

Konvergenzradius

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\ell \rightarrow \infty} \sqrt[\ell]{\left| \frac{3\ell + (-1)^\ell \ell}{2\ell + 1} \right|} &= \overline{\lim}_{\ell \rightarrow \infty} \frac{3\ell + (-1)^\ell \ell}{2\ell + 1} = \overline{\lim}_{\ell \rightarrow \infty} \underbrace{\left( 3 + (-1)^\ell \right)}_{\substack{4, \ell \text{ gerade} \\ 2, \ell \text{ ungerade}}} \frac{1}{2 + \frac{1}{\ell}} = 2 \\ &\Rightarrow \varrho = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

In den reellen Randpunkten  $z = \pm \frac{1}{2}$  wird die Potenzreihe zu

$$\sum_{\ell=3}^{\infty} \left( \frac{3\ell + (-1)^\ell \ell}{2\ell + 1} \right)^\ell \left( \pm \frac{1}{2} \right)^\ell = \sum_{\ell=3}^{\infty} \left( \pm \frac{3\ell + (-1)^\ell \ell}{4\ell + 2} \right)^\ell$$

Für die geraden Reihenglieder gilt dabei

$$\begin{aligned} a_{2\ell} &= \left( \pm \frac{2\ell}{8\ell + 2} (3 + (-1)^{2\ell}) \right)^{2\ell} = \left( \frac{8\ell}{8\ell + 2} \right)^{2\ell} \\ &\geq \left( \frac{8\ell}{8\ell + 8} \right)^{2\ell} = \left( \frac{\ell}{\ell + 1} \right)^{2\ell} = \left( \frac{\ell + 1}{\ell + 1} - \frac{1}{\ell + 1} \right)^{2\ell} \\ &\geq \left( \left( 1 - \frac{1}{\ell} \right)^\ell \right)^2 = e^{-2} \end{aligned}$$

Somit liegen unendlich viele Folgenglieder außerhalb der  $e^{-2}$ -Umgebung von Null, deshalb kann dies keine Nullfolge sein. Die zugehörige Reihe konvergiert somit nicht.**(d)** Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ 

Die Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^{m!} = 1 + z + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots$$

hat die Koeffizienten

$$(a_n) = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

und damit gilt für den Konvergenzradius

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = 1.$$

Der reelle Rand des Konvergenzkreises sind somit die Punkte  $z = \pm 1$ . In  $z = 1$  ist die Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} 1^{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Die Fakultät ist für alle  $m \geq 2$  gerade (enthält mindestens den Faktor 2), somit gilt in  $z = -1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m!} = -1 - 1 + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m!} = -2 + \sum_{m=2}^{\infty} 1 = +\infty.$$

**Aufgabe H 55.** Auswertung Exponentialfunktion

- (a) Berechnen Sie  $e^{i\pi}$ .  
 (b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten elektronischen Hilfsmittels für  $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$  die Summe

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{(i\pi)^k}{k!}.$$

- (c) Bestimmen Sie das minimale  $n$ , für welches  $|s_n - s_\infty| < 10^{-2}$  ist.

**Lösungshinweise hierzu:**

- (a) Die Formel von Euler-Moivre liefert

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1.$$

- (b) Es ergibt sich

$$\begin{aligned} s_0 &= +1 \\ s_1 &\approx +1 + 3.141592653589793116 i \\ s_2 &\approx -3.934802200544678996 + 3.141592653589793116 i \\ s_3 &\approx -3.934802200544678996 - 2.026120126460176252 i \\ s_4 &\approx +0.123909925872088600 - 2.026120126460176252 i \\ s_5 &\approx +0.123909925872088600 + 0.524043913417168827 i \\ s_6 &\approx -1.211352842982500677 + 0.524043913417168827 i \\ s_7 &\approx -1.211352842982500677 - 0.075220615903623056 i \\ s_8 &\approx -0.976022212623607555 - 0.075220615903623056 i \\ s_9 &\approx -0.976022212623607555 + 0.006925270707505149 i \\ s_{10} &\approx -1.001829104013621574 + 0.006925270707505149 i \end{aligned}$$

- (c) Mit  $|s_n - s_\infty| = |s_n - 1|$  ist der Fehler der  $n$ -ten Annäherung an  $s_\infty$ :

$$\begin{aligned} |s_9 - s_\infty| &\approx 0.024957837683575752 \\ |s_{10} - s_\infty| &\approx 0.007162750579552203 \end{aligned}$$

und somit für  $n = 10$  zum ersten Mal kleiner als  $10^{-2}$ .

**Aufgabe H 56.** *Summe und Produkt von Potenzreihen*

Gegeben sind jeweils auf den Konvergenzkreisen  $M_f, M_g \subseteq \mathbb{C}$  die Funktionen

$$f: M_f \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n, \quad g: M_g \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^{1/2} z^k}{2^k}.$$

Bestimmen Sie die Konvergenzradien von  $f$  und  $g$  sowie  $M_f$  und  $M_g$ . Geben Sie die Potenzreihen von  $u = f + g$ ,  $v = f \cdot g$  und deren Konvergenzradien an.

**Lösungshinweise hierzu:** Konvergenzradius von  $f$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \frac{\sqrt{n+1}}{(-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 1 \Rightarrow \varrho_f = 1$$

Konvergenzradius von  $g$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+2)^{1/2}}{2^{k+1}} \frac{2^k}{(k+1)^{1/2}} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{k+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varrho_g = 2$$

Somit sind die Konvergenzkreise der beiden Funktionen

$$M_f = U_1(0), \quad M_g = U_2(0).$$

Zur Ermittlung der Potenzreihe der Summe muss auf die korrekte Wahl der Bezeichner geachtet werden.

$$u(z) = f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \frac{(n+1)^{1/2}}{2^n} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1 + (-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}} z^n$$

Potenzreihe des Produktes:

$$\begin{aligned} v(z) &= f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \frac{(k+1)^{1/2}}{2^k} \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{(-2)^k} \sqrt{\frac{k+1}{n-k+1}} \right) z^n \end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln für Potenzreihen konvergieren sowohl  $u$  als auch  $v$  für  $|z| < \min\{\varrho_f, \varrho_g\} = 1$ .

Dass dies auch der Konvergenzradius von  $u$  bzw.  $v$  ist (d.h. dass die Reihen für  $|z| > 1$  divergieren), kann direkt nachgerechnet oder aus den Grenzwertsätzen und den unterschiedlichen Konvergenzradien gefolgert werden:

Für  $u$  liefert das Wurzelkriterium

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|n+1 + (-2)^n|}{2^n \sqrt{n+1}}} = 1,$$

(Bruch mit mit  $2^{-n}$  erweitern,  $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$ ) also den Konvergenzradius 1.

Andererseits kann aus den Konvergenzsätzen gefolgert werden, dass die Summe einer konvergenten Reihe und einer divergenten Reihe nicht konvergent sein kann. Daher kann  $u(z)$  für  $z$  die im Kreisring mit  $\varrho_f < |z| < \varrho_g$  liegen nicht konvergent sein. Der Konvergenzradius der Potenzreihe  $u$  muss also  $\varrho_f$  sein.

Entsprechend kann für das Produkt argumentiert werden. Allerdings muss hier darauf geachtet werden, dass der Grenzwertsatz für Quotienten aus Folgen zur Anwendung kommt, und daher die Nennerfolge (in diesem Fall die Partialsummenfolge für  $g$ ), nicht den Grenzwert Null haben darf. Dies ist z.B. für reelle  $z \in (1, 2)$  der Fall. Hier treten in  $g(z)$  nur positive reelle Summanden auf, von denen der erste 1 ist. Damit ist  $g(z)$  eine reelle Zahl  $\geq 1$  und die Produktreihe  $v(z)$  kann für diese  $z$  nicht konvergent sein. Somit ist der Konvergenzradius nicht größer als 1.

Auch für die Produktreihe  $v$  kann der Konvergenzradius direkt bestimmt werden. Die inneren Summen, also die Koeffizienten  $a_n$  der Potenzreihe, können für  $n > 3$  mit  $|a_n| \geq 1/(4n)$  nach unten abgeschätzt werden (allerdings ist der Nachweis dieser Abschätzung etwas aufwändiger). Daher ist  $\liminf \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  und somit der Konvergenzradius auf jeden Fall  $\leq 1$ .

Zusätzliche Bemerkung:

Aufgrund der Tatsache, dass Potenzreihen immer Kreise als Konvergenzgebiet besitzen, liefert ein einziger divergenter Punkt bereits eine obere Schranke für den Konvergenzradius. Bei  $u$  und  $v$  kann jeweils der Punkt  $z = -1$  verwendet werden, um den Konvergenzradius mit 1 nach oben zu beschränken.

### Aufgabe H 57. Trigonometrische Funktionen

- (a) Geben Sie die Exponentialschreibweise  $re^{i\varphi}$ ,  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  der Zahlen  $w := \sqrt{3} + i$  und  $z := 2^{-6}w^7$  an.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von Euler und de Moivre, dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  die folgenden Gleichungen gelten.

$$2 \cos(z) = e^{iz} + e^{-iz} \quad 2i \sin(z) = e^{iz} - e^{-iz}$$

- (c) Verifizieren Sie die Additionstheoreme mit Hilfe von (b) für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .

$$1 = (\sin(z))^2 + (\cos(z))^2$$

$$\sin(z+w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w).$$

### Lösungshinweise hierzu:

- (a)

$$w = \sqrt{3} + i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z = 2^{-6}w^7 = 2^{-6}2^7 e^{i7\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Dabei liegt  $7\pi/6$  im Intervall  $[0, 2\pi)$ , das Argument muss also nicht verschoben werden.

**(b)** Mit der Formel von Euler und de Moivre folgt

$$\begin{aligned} e^{iz} + e^{-iz} &= \cos(z) + i \sin(z) + \cos(-z) + i \sin(-z) \\ &= \cos(z) + i \sin(z) + \cos(z) - i \sin(z) = 2 \cos(z) \end{aligned}$$

und

$$e^{iz} - e^{-iz} = \cos(z) + i \sin(z) - \cos(z) + i \sin(z) = 2i \sin(z)$$

**(c)**

$$\begin{aligned} (\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 &= \left( -\frac{i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} e^{2iz} + \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{4} e^{-2iz} + \frac{1}{4} e^{2iz} + \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{4} e^{-2iz} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(z) \sin(w) + \sin(z) \cos(w) &= -\frac{i}{4} (e^{iz} + e^{-iz}) (e^{iw} - e^{-iw}) - \frac{i}{4} (e^{iz} - e^{-iz}) (e^{iw} + e^{-iw}) \\ &= -\frac{i}{4} (e^{i(z+w)} + e^{i(-z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)}) \\ &\quad + e^{i(z+w)} - e^{i(-z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)}) \\ &= -\frac{i}{2} (e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}) = \sin(z+w) \end{aligned}$$



## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 58. Differenzierbarkeit

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  und die Funktion  $g$  an den Stellen  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 1$  differenzierbar sind.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x-1|^3 + x|x+1|$$

**Lösungshinweise hierzu:** Betrachtet wird der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\frac{1}{2}(x+1)^2}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{(x+1)^2}{x}$$

Dieser existiert nicht, die Funktion kann also an  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar sein. Dies gilt, obwohl der links- und rechtsseitige Grenzwert der Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{für } x > 0 \\ x+1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

in  $x = 0$  übereinstimmen.

Die Funktion  $g$  lässt sich abschnittsweise ohne Beträge schreiben:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} (x-1)^3 + x(x+1) & \text{für } 1 \leq x \\ -(x-1)^3 + x(x+1) & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ -(x-1)^3 - x(x+1) & \text{für } x < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 4x - 1 & \text{für } 1 \leq x \\ -x^3 + 4x^2 - 2x + 1 & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ -x^3 + 2x^2 - 4x + 1 & \text{für } x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Für den Differenzenquotienten an  $x_1 = -1$  ergibt sich somit (mit Hilfe von Polynomdivisionen)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{-x^3 + 2x^2 - 4x - 7}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1-0} -x^2 + 3x - 7 = -11 \\ \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{-x^3 + 4x^2 - 2x - 7}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} -x^2 + 5x - 7 = -13, \end{aligned}$$

die Grenzwerte stimmen also nicht überein, die Funktion ist in  $x_1 = -1$  nicht differenzierbar. In  $x_2 = 1$  erhält man analog

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-x^3 + 4x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} -x^2 + 3x + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} x^2 - x + 3 = 3,$$

die Funktion ist somit in  $x_2 = 1$  differenzierbar.

### Aufgabe H 59. Ableitungen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich sowie die erste und zweite Ableitung der Funktionen

(a)  $f(x) = \ln(\tan(x))$ ,      (b)  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ,      (c)  $h(x) = (\ln(x))^x$ .

### Lösungshinweise hierzu:

- (a) Der Definitionsbereich umfasst alle reellen Punkte  $x \in \mathbb{R}$ , an denen der Tangens positiv ist.

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

Die Ableitungen lauten

$$f'(x) = \frac{1}{\tan(x)} \frac{1}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)(\cos(x))^2} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)},$$

$$f''(x) = \frac{-\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{(\sin(x)\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2}.$$

- (b) Der Nenner ist nicht definiert für  $x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$  und verschwindet in den Randpunkten  $x = \pm 2$ .

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$$

Die Ableitungen berechnen sich mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 4} - (x^2 + 1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}}}{x^2 - 4} = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 + 1)x}{(x^2 - 4)^{3/2}} = \frac{x^3 - 9x}{(x^2 - 4)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 9)(x^2 - 4)^{3/2} - (x^3 - 9x)\frac{3}{2}(x^2 - 4)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$= \frac{(3x^2 - 9)(x^2 - 4) - 3x(x^3 - 9x)}{(x^2 - 4)^{5/2}} = \frac{6x^2 + 36}{(x^2 - 4)^{5/2}}$$

(c) Die Potenz ist definiert, falls die Basis positiv ist, d.h. der Definitionsbereich ist

$$D = (1, \infty).$$

Mit der Umformung

$$(\ln(x))^x = e^{x \ln(\ln(x))}$$

können die Ableitungen durch die Kettenregel berechnet werden.

$$f'(x) = e^{x \ln(\ln(x))} \left( \ln(\ln(x)) + x \frac{1}{\ln(x)} \frac{1}{x} \right) = (\ln(x))^x \left( \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

$$f''(x) = \ln(x)^x \left[ \left( \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \right)^2 + \frac{1}{x \ln(x)} - \frac{1}{x(\ln(x))^2} \right]$$

### Aufgabe H 60. Differentiation der Umkehrfunktion

(a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich der Funktion

$$f: D \rightarrow W: x \rightarrow \ln(1 + e^x)$$

und ihrer Umkehrfunktion  $f^{-1}$ . Bestimmen Sie die Ableitung von  $f^{-1}$ .

(b) Zeigen Sie, dass jede der folgenden Funktionen  $f$  auf dem Intervall  $(-1, 1)$  eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzt, und berechnen Sie deren Ableitung jeweils an der angegebenen Stelle  $y = y_0$ .

$$(i) \quad f(x) = x^3 + x + 1, \quad y_0 = 1 \quad (ii) \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad y_0 = \frac{1}{3}$$

### Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und stets positiv, die Logarithmusfunktion ist streng monoton wachsend. Daraus folgt

$$\exp(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\ln(1 + \exp(x)): \mathbb{R} \rightarrow (\ln(1 + 0), \infty) = \mathbb{R}^+.$$

Die Umkehrfunktion lautet somit

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \ln(e^y - 1),$$

und die Ableitung der Umkehrfunktion ergibt sich zu

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) \Big|_{y=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1 + e^{x_0}}{e^{x_0}} = \frac{e^y}{e^y - 1}$$

oder direkt zu

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{d}{dy} \ln(e^y - 1) = \frac{e^y}{e^y - 1}.$$

- (bi) Die Ableitung der Funktion ist  $f'(x) = 3x^2 + 1$ . Da diese stets positiv ist, ist die Funktion streng monoton wachsend und somit umkehrbar. Der Funktionswert  $y_0 = 1$  ergibt sich für  $x_0 = 0$ , damit ist die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle  $f(0)$

$$\left. \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \right|_{y=f(0)} = 1/f'(0) = 1.$$

- (bii) Die Ableitung der Funktion ist nach der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{-1(1+x) - 1(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

Diese rationale Funktion hat keine Nullstelle und einen Pol bei  $x = -1$ . Somit ist  $f$  in  $(-1, 1)$  streng monoton und damit umkehrbar. Der Funktionswert  $y_0 = \frac{1}{3}$  ergibt sich für  $x_0 = \frac{1}{2}$ , somit ist die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle  $y_0 = f(1/2)$

$$\left. \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \right|_{y=f(1/2)} = 1/f'(1/2) = \frac{9/4}{-2} = -\frac{9}{8}.$$

### Aufgabe H 61. Lineare Funktionen

Die Funktion  $f$  sei an einer Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar und genüge für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  der Gleichung  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und die Ableitung konstant ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie  $x = (x - x_0) + x_0$ , um den Differenzenquotienten geeignet umzuformen.

- (b) Beweisen Sie, dass eine Konstante  $a \in \mathbb{R}$  existiert mit  $f(x) = ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie folgende Umformung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0), \quad \xi \in (x, x_0)$$

### Lösungshinweise hierzu:

- (a) Durch Verwendung des Hinweises folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h+x_0-x_0) - f(x+x_0-x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x-x_0) - f(x_0) - f(x-x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und die Ableitung konstant.

(b) Sei  $a := f'(x_0)$ , dann gilt nach dem Mittelwertsatz für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) = f(x_0) + a(x - x_0) = ax + c$$

mit der Konstanten  $c := f(x_0) - ax_0$ .

Allerdings muss gelten:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ a(x+y) + c &= ax + c + ay + c \\ &= a(x+y) + 2c \end{aligned}$$

Folglich muss  $c = 0$  sein, weshalb

$$f(x) = ax$$

bewiesen ist.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 62. Regel von l'Hospital

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{2x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh(x) - 2}{(\sin(x))^2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin(x) - \cos(x))^{\tan(x)}$$

### Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Dabei ist der erste Summand vom Typ „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, hierauf kann also die Regel von l'Hospital angewandt werden.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} - 0 = 0$$

(b) Es liegt der Fall „ $\frac{0}{0}$ “ vor, die Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x \ln(6) - 3^x \ln(3)}{2} = \frac{\ln(6) - \ln(3)}{2} = \frac{1}{2} \ln(2) = \ln(\sqrt{2}).$$

(c) Zunächst liegt der Fall „ $\frac{0}{0}$ “ vor, deshalb folgt mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh(x) - 2}{(\sin(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sinh(x)}{2 \sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sinh(x)}{\sin(2x)}.$$

Auch hier findet sich die Situation „ $\frac{0}{0}$ “, eine nochmalige Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh(x) - 2}{(\sin(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh(x)}{2 \cos(2x)} = 1.$$

(d) Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion lässt sich der gegebene Grenzwert zu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin(x) - \cos(x))^{\tan(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\tan(x) \cdot \ln(\sin(x) - \cos(x))} \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \cdot \ln(\sin(x) - \cos(x)) \right) \end{aligned}$$

umformen. Für den Exponenten ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \cdot \ln(\sin(x) - \cos(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x) - \cos(x))}{\frac{1}{\tan(x)}},$$

es findet sich also die Situation „ $\frac{0}{0}$ “. Die Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \cdot \ln(\sin(x) - \cos(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos(x) + \sin(x)}{\sin(x) - \cos(x)}}{\frac{-1}{(\sin(x))^2}} = \frac{1}{-1} = -1,$$

der gesuchte Grenzwert ist also  $e^{-1} = 1/e$ .

### Aufgabe H 63. Taylor-Entwicklung

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Taylorpolynome der Stufe 3 zum angegebenen Entwicklungspunkt  $x_0$ .

(a)  $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ ,  $x_0 = 2$

(b)  $g(x) = e^{-x} \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$

(c)  $h(x) = \sqrt{x-3}$ ,  $x_0 = 4$

Verwenden Sie in Teil (c) die binomische Reihe.

### Lösungshinweise hierzu:

(a) Auswertung der Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + 3x^2, \\ f'(x) &= 2 + 6x, \\ f''(x) &= 6, \\ f^{(3)}(x) &= f^{(4)}(x) = 0 \end{aligned}$$

am Entwicklungspunkt ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + 0x^3 + 0x^4 \\ &= 17 + 14(x-2) + 3(x-2)^2. \end{aligned}$$

(b) Die bekannten Potenzreihen

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{6}(-x)^3 + \dots = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \\ \sin(x) &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \end{aligned}$$

ergeben durch Multiplikation die Potenzreihe von  $g$ .

$$\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\right) = x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \dots$$

Das Taylorpolynom der Stufe 3 entspricht der Potenzreihe von  $g$ , bei der Terme zu hoher Ordnung vernachlässigt werden.

$$T_3(g, x, 0) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Dies entspricht dem Ergebnis, das man durch die Ableitungen elementar erhält:

$$\begin{array}{ll} g(x) &= e^{-x} \sin(x) & g(0) &= 0 \\ g(x)' &= e^{-x} (-\sin(x) + \cos(x)) & g'(0) &= 1 \\ g(x)'' &= -2e^{-x} \cos(x) & g''(0) &= -2 \\ g(x)''' &= 2e^{-x} (\cos(x) + \sin(x)) & g'''(0) &= 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow T_3(g, x, 0) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(c) Die Funktion  $h$  lässt sich schreiben als

$$h(x) = \sqrt{x-3} = (1 + (x-4))^{1/2},$$

was sich mit Hilfe der binomischen Reihe darstellen lässt als

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x-4)^n = 1 + \frac{1}{2}(x-4) - \frac{1}{4}(x-4)^2 + \frac{1}{16}(x-4)^3 - \dots$$

Das gesuchte Taylor-Polynom ist somit

$$T_3(h, x, 4) = 1 + \frac{1}{2}(x-4) - \frac{1}{8}(x-4)^2 + \frac{1}{16}(x-4)^3.$$

Auch hier erhielte man durch Auswertung der Ableitungen und Verwenden der Definition dasselbe Polynom.

### Aufgabe H 64. Approximationsfehler

Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(x).$$

- (a) Geben Sie eine Formel für die  $n$ -te Ableitung von  $f$  für  $n \geq 1$  an und beweisen Sie diese mit Hilfe einer vollständigen Induktion.
- (b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für den Fehler des Taylor-Polynoms der Stufe  $n$  von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 10$  auf dem Intervall  $[10, 11]$ .



**Lösungshinweise hierzu:** Die Funktion  $f(x) = \ln(x)$  hat die Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}.$$

ⒾA :  $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^0 0! x^{-1}$$

ⒾS :  $n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = ((-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n})' \\ &= (-1)^{n+1}(n-1)!(-n)x^{-n-1} = (-1)^{(n+1)+1}((n+1)-1)!x^{-n-1} \end{aligned}$$

Somit ist das Restglied der Taylorentwicklung

$$R_n(f, x, 10) = \frac{|(-1)^{n+2} n! \xi_{x,x_0}^{-n-1}|}{(n+1)!} |x-10|^{n+1} = \frac{1}{n+1} \left( \frac{|x-10|}{|\xi_{x,x_0}|} \right)^{n+1}$$

für  $x \in [10, 11]$ ,  $\xi_{x,x_0} \in (10, x)$ .

Eine obere Schranke wird für  $\xi = 10$  und  $x = 11$  erreicht, dort ist der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{(n+1)10^{n+1}}.$$

### Aufgabe H 65. Taylorentwicklung mittels Potenzreihen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Taylor-Polynome der Stufe 3 zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , indem Sie bekannte Potenzreihen verwenden.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x - 1 \\ f_2(x) &= (x-1)^2 \\ f_3(x) &= (x-1)^2(e^x - 1) \end{aligned}$$

### Lösungshinweise hierzu:

Aus der bekannten Potenzreihe der Exponentialfunktion folgt

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ f_1(x) &= e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \Rightarrow T_3(f_1, x, 0) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f_2$  ist als Polynom bereits eine Potenzreihe, es gilt also

$$f_2(x) = (x-1)^2 = 1 - 2x + x^2 = T_3(f_2, x, 0).$$

Das Taylorpolynom von  $f_3$  ergibt sich schließlich durch Multiplikation der bereits berechneten Reihen (unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung).

$$\begin{aligned}f_3(x) &= f_2(x) \cdot f_3(x) = (1 - 2x + x^2) \cdot \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) \\&= (x - 2x^2 + x^3) + (1 - 2x + x^2) \frac{x^2}{2} + (1 - 2x + x^2) \frac{x^3}{6} + \dots \\&= x - 2x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \\&= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \\ \Rightarrow T_3(f_3, x, 0) &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\end{aligned}$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 66. Kurvendiskussion

$$\text{Gegeben sei } f: D \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} |x+2| & \text{falls } x \leq -1 \\ -x^2+2 & \text{falls } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) & \text{falls } 1 \leq x \end{cases}$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion von  $f$  durch, wobei Sie mindestens die folgenden Punkte bearbeiten sollen:

maximaler Definitionsbereich, maximaler Wertebereich, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Nullstellen, lokale Extrema, Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, Skizze.

**Lösungshinweise hierzu:** Der maximale Definitionsbereich ist  $D = \mathbb{R}$ .

$f$  hat keine Unstetigkeitsstelle. Denn in den einzelnen zu betrachtenden Intervallen handelt es sich um steige Funktionen und an den Übergängen konvergieren die Grenzwerte gegen die Funktionswerte. Es ist  $\lim_{x \rightarrow -1+0} -x^2+2 = 1 = f(-1)$  und  $\lim_{x \rightarrow 1-0} = 1 = f(1)$ .

$f$  auf  $(-\infty, -1]$  ist in  $x = -2$  nicht differenzierbar, da  $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{|x+2|-|-2+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{|x+2|-|-2+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x+2}{x+2} = 1$  und  $1 \neq -1$ . Jeweils im Inneren der anderen Intervalle handelt es sich um Polynome und somit ist  $f$  dort differenzierbar. Nun betrachten wir die einzelnen Übergänge (sprich  $x_0 = -1$  und  $x_0 = 1$ ).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{|x+2|-|-1+2|}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x+2-1}{x+1} = 1 \\ \neq \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{-x^2+2-(-(-1)^2+2)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{-x^2+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-x^2+2-(-(-1)^2+2)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2 \\ \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-2)^2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) - (-1-2)^2(\frac{3}{2} - \frac{1}{2})}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\frac{1}{2}(x-2)^2(3x-1)-1}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3x^3-7x^2+6x-6}{x-1} = \\ \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(3x^2-4x+6)}{x-1} &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Es ist  $f$  an den Übergängen nicht differenzierbar.

Für die Nullstellen von  $f$  setzt man  $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ . Wir betrachten  $f$  wieder der Reihenfolge nach in den einzelnen Intervallen. In  $(-\infty, -1]$  ist  $f$  wegen des Betrages stets größer oder gleich Null, die Nullstelle ist an  $x = -2$ . In  $(-1, 1)$  gibt es keine Nullstelle, da  $-x^2+2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$  und  $\pm\sqrt{2} \notin (-1, 1)$  gilt. In  $[1, \infty)$  kann man die Nullstelle  $x = 2$  ablesen. (Die andere Nullstelle von  $(x-2)^2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2})$  liegt nicht im betrachteten Intervall und ist somit nicht relevant.)

$f$  hat demnach die Nullstellen  $x = -2$  und  $x = 2$ .

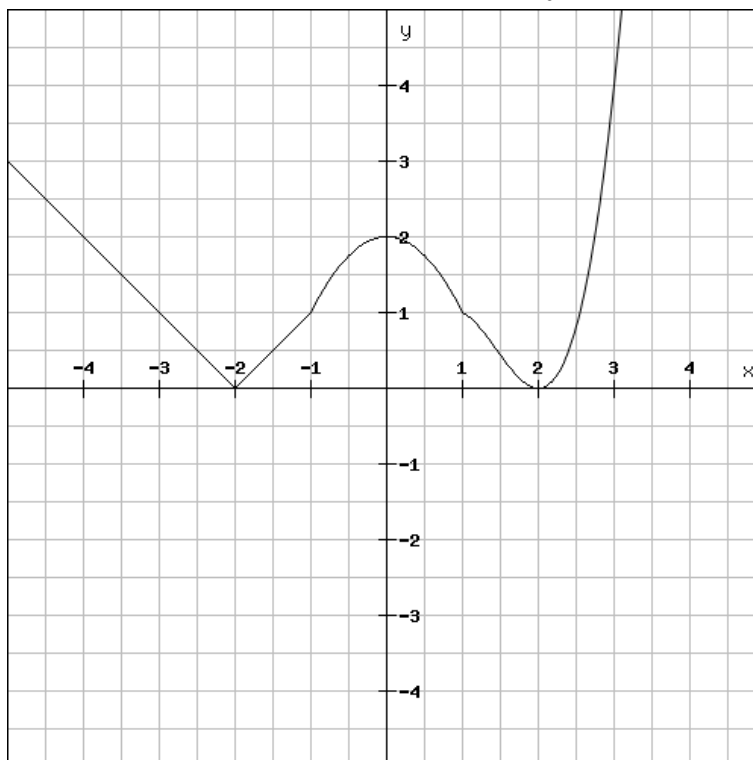
Nun suchen wir die lokalen Extrema. Aus vorigen Überlegungen für das Intervall  $(-\infty, -1)$  ist klar, dass an  $x = -2$  ein lokales Minimum ist (denn  $f(x) > 0$  für  $x \neq -2$  und  $f(-2) = 0$ ). An allen anderen Stellen verschwindet die Ableitung nie, es existieren somit keine kritischen Punkte. In  $(-1, 1)$  ist  $f$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = -2x$ ,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Weiter gilt  $f''(x) = -2$  und  $f''(0) = -2$ , es handelt sich also um ein lokales Maximum. In  $[1, \infty)$  gilt  $f'(x) = 2(x-2)(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(x-2)^2 = (x-2)((3x-1) + \frac{3}{2}(x-2))$  und

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{4}{4,5} = \frac{8}{9} \notin [1, \infty)$ , weiter gilt  $\lim_{x \rightarrow 2-0} (x-2)^2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) \geq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 2+0} (x-2)^2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) \geq 0$ , da  $(x-2)^2 \geq 0$  und  $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0$  für  $x \rightarrow 2 \pm 0$ . Es handelt sich also um ein lokales Minimum.

Wir haben somit die lokalen Minima  $(-2, 0)$  und  $(2, 0)$  und das lokale Maximum  $(0, 2)$ .

Es gilt an den Rändern  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x+2| = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)^2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) = \infty$ .

Zuletzt noch den Wertebereich. Dieser ist nach obigem  $\mathbb{R}_0^+$ . Skizze:



### Aufgabe H 67. Integration

Berechnen Sie

(a)  $\int (\sin(x))^2 dx$

(b)  $\int x^2 \cdot \sin(x) dx$

(c)  $\int \frac{1}{\cos(x) \cdot \sin(x)} dx$

(d)  $\int 2 \frac{\sinh((x+1)^2) \cdot (x+1)}{\cosh((x+1)^2)} dx$

**Lösungshinweise hierzu:**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \sin^2(x) dx &= [-\sin x \cos x] - \int -\cos^2 x dx = [-\sin x \cos x] + \int 1 - \sin^2 x dx \\ &= [-\sin x \cos x + x] - \int \sin^2 x dx \\ \Rightarrow \int \sin^2(x) dx &= \left[ \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \right] \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \int x^2 \sin(x) dx = [-x^2 \cos(x)] + 2 \int x \cos(x) dx$$

$$= \left[ -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) \right] - 2 \int \sin(x) \, dx = \left[ -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) \right]$$

(c) 
$$\int \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} \, dx = \int \frac{1}{\cos(x) \sin(x) \frac{\cos(x)}{\cos(x)}} \, dx = \int \frac{1}{(\cos(x))^2 \tan(x)} \, dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{(\cos(x))^2} \, dx}{\tan(x)} \stackrel{\frac{f'(x)}{f(x)}}{=} \left[ \ln(|\tan(x)|) \right]$$

(d) 
$$\int 2 \frac{\sinh((x+1)^2) \cdot (x+1)}{\cosh((x+1)^2)} \, dx = \left[ \ln(|\cosh((x+1)^2)|) \right],$$
 da der Integrand von der Form  $f'(x)/f(x)$  ist.

**Aufgabe H 68.**

Sei  $K$  ein (geometrischer) Körper. Wenn es eine (Höhen-)Richtung gibt, zu der jeder senkrechte Schnitt Kreisgestalt hat und sich der Radius  $r = r(h)$  stetig in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  ausdrücken lässt, so gilt für das Volumen

$$V(K) = \pi \int_a^b (r(h))^2 \, dh,$$

wobei  $a$  die minimale und  $b$  die maximale Höhenausdehnung des Körpers seien.

Betrachten Sie einen Körper mit  $r(h) = 2 - \cos(h)$  und einer minimalen Höhe  $a = 0$  und einer maximalen Höhe  $b = 2\pi$ .

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie das Volumen. Stellen Sie eine Gleichung für die Höhe  $b$  auf, bei der 75% des Volumens erreicht werden. Können Sie diese Gleichung (ohne elektronische Hilfsmittel) lösen? Gibt es eine Lösung?

**Lösungshinweise hierzu:**  $\pi \int_0^{2\pi} (2 - \cos(h))^2 \, dh$

$$= \pi \int_0^{2\pi} 4 \, dh - 4\pi \int_0^{2\pi} \cos(h) \, dh + \pi \int_0^{2\pi} (\cos(h))^2 \, dh$$

$$= 4\pi \left[ h \right]_0^{2\pi} - 4\pi \left[ \sin(h) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\pi \left[ h + \sin(h) \cos(h) \right]_0^{2\pi} = 8\pi^2 - 0 + \frac{1}{2}2\pi^2 = 9\pi^2,$$

wobei  $\int (\cos(x))^2 \, dx = \left[ +\sin(x) \cos(x) \right] + \int (\sin(x))^2 \, dx$

$$= \left[ +\sin(x) \cos(x) \right] + \int 1 - (\cos(x))^2 \, dx = \left[ +\sin(x) \cos(x) + x \right] - \int (\cos(x))^2 \, dx$$

also  $\int (\cos(x))^2 \, dx = \left[ \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) \right]$ .

Das Volumen des Körpers ist  $9\pi^2$ .

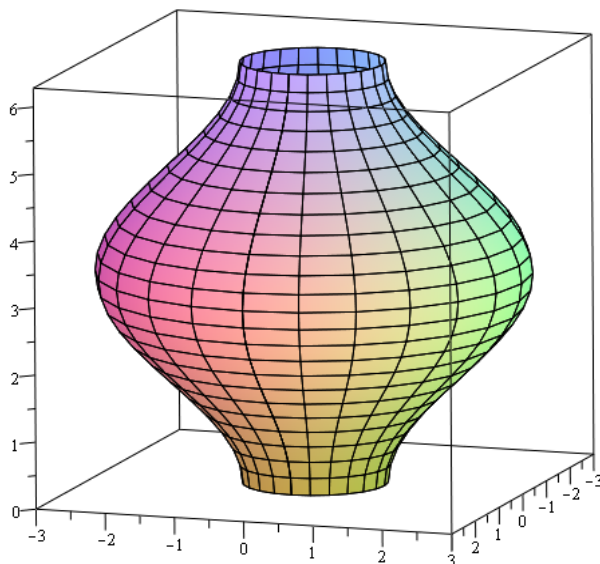
75% von  $9\pi^2$  sind  $\frac{3}{4} \cdot 9\pi^2 = \frac{27\pi^2}{4}$ . Zu lösen ist folgende Gleichung:

$$\frac{27\pi^2}{4} = \pi \int_0^b (2 - \cos(h))^2 \, dh,$$

$$\text{also } \frac{27\pi^2}{4} = 4\pi \left[ h \right]_0^b - 4\pi \left[ \sin(h) \right]_0^b + \frac{1}{2}\pi \left[ h + \sin(h) \cos(h) \right]_0^b$$

somit  $\frac{27\pi^2}{4} = 4b - 4\sin(b) + \frac{1}{2}(b + \sin(b)\cos(b))$  el. Hilfsmittel  $\Leftrightarrow b \approx 3,99026 \approx 1,27014\pi$ .

Skizze



### Aufgabe H 69. Taylor

(a) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \cos(x)$  hat die folgenden Eigenschaften:

- $f'' = -f$
- $f(0) = 1$
- $f'(0) = 0$

Weisen Sie nach, dass die Funktion  $f$  durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Stellen Sie dazu die Taylorreihe  $T(f, x, 0)$  auf und zeigen Sie, dass diese gegen  $f$  konvergiert.

*Hinweis:* Verwenden Sie  $A_x := \sup\{f(\xi) | 0 \leq \xi \leq |x|\}$  und  $B_x := \sup\{f'(\xi) | 0 \leq \xi \leq |x|\}$ .

(b) Gegeben sei die Funktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_0^x \cos(t^2) dt$ .

Entwickeln Sie die Funktion  $F$  unter Verwendung der Potenzreihe aus (a) in eine Potenzreihe um  $x_0 = 0$ .

(Dazu brauchen Sie die Funktion  $F$  selbst nicht zu berechnen.)

**Lösungshinweise hierzu:**

- (a) Wir stellen das  $n$ -te Taylorpolynom auf und betrachten das zugehörige Restglied. Dies ist gegeben durch  $R_n(f(x), x, 0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ , wobei  $\xi$  zwischen  $x$  und  $0$  liegt. Wir benötigen eine Abschätzung für die  $(n+1)$ -te Ableitung. Hierzu betrachten wir, die im Hinweis gegebenen Zahlen,  $A_x$  und  $B_x$ .

Wir definieren  $m_x := \max\{|A_x|, |B_x|\}$  und sehen ein, dass  $f^{(n+1)}(\xi) \leq m_x$  gilt (dies folgt mit der ersten Eigenschaft, bzw. durch Ableiten dieser). Der Betrag des Restgliedes lässt sich also durch  $\frac{m_x}{(n+1)!} |x|^{n+1}$  nach oben abschätzen. Gleichzeitig wissen wir, dass diese Abschätzung für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Somit verschwindet das Restglied für große  $n$ , d.h. die Taylorreihe konvergiert gegen die Funktion.

Nachsatz: Die Zahlen  $A_x$  und  $B_x$  sind stets endlich, da die Funktion durch ihre erste Eigenschaft auch stetig ist und ihr Definitionsbereich ganz  $\mathbb{R}$  ist.

- (b) Wir leiten  $F$  einmal nach  $x$  ab und erhalten  $F'(x) = \cos(x^2)$ . Es ist  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$  die Potenzreihe für  $\cos(x)$ , somit ist  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}$  die Potenzreihe für  $\cos(x^2)$ .

$$F(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k}}{(2k)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^x t^{4k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[ \frac{t^{4k+1}}{4k+1} \right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)} x^{4k+1}.$$

Proben:  $x = 0$  ergibt den Wert  $0$ ,  $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)} x^{4k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)} \frac{d}{dx} x^{4k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)} (4k+1) x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}$ , was genau die Potenzreihe für  $\cos(x^2)$  ist.

(Von den Studenten nicht erwartet. Aber zur Vollständigkeit werden nun noch die Konvergenzradien betrachtet um zu belegen, dass das, was gemacht wurde, auch legal ist. Es bleibt also noch zu betrachten, dass die Radien alle  $\infty$  sind.

Es gilt  $\sqrt[4k]{\frac{1}{(2k)!}} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , da  $\cos(\cdot)$  den Konvergenzradius  $\infty$  hat. Es bleibt

noch zu zeigen, dass  $\sqrt[4k+1]{\frac{1}{(2k)!(4k+1)}}$  ebenfalls gegen Null strebt für  $k \rightarrow \infty$ .

$$\sqrt[4k+1]{\frac{1}{(2k)!(4k+1)}} = \underbrace{\sqrt[4k+1]{\frac{1}{(2k)!}}}_{\rightarrow 0, \text{ da } \sqrt[4k]{\frac{1}{(2k)!}} \rightarrow 0} \underbrace{\sqrt[4k+1]{\frac{1}{4k+1}}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 70. Integration gebrochener rationaler Funktionen

Man berechne die Integrale

$$(a) \int \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2} dx$$

$$(b) \int \frac{x^2}{1+x^3} dx$$

$$(c) \int \frac{x}{(x^2+2x+3)^3} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{1+x^4} dx$$

Hinweis: Es mag helfen, den Nenner zuerst komplex zu faktorisieren.

### Lösungshinweise hierzu:

(a) Ansatz:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2}.$$

Substitution  $v = x^2$ ,  $\frac{dv}{dx} = 2x$  ergibt

$$\int f(x) dx = \int 2 \frac{dv}{(v-1)^2} = \frac{-2}{v-1} = \left[ \frac{-2}{x^2-1} \right]$$

(b) Es gilt  $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ . Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

Einsetzen der Werte  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{2}{3}$ ,  $c = -\frac{1}{3}$  ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2-x+1} dx &= \left[ \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x^2-x+1| \right] \\ &= \left[ \frac{1}{3} (\ln|x+1| + \ln|x^2-x+1|) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{3} (\ln|(x+1)(x^2-x+1)|) \right] \\ &= \frac{1}{3} [\ln|x^3+1|] \end{aligned}$$

Andere Alternative ist die Substitution mit  $x^3 = u$ :

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{3} [\ln|x^3+1|]$$



(c)

$$\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 3)^3} dx = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\int \frac{2x+2}{(x^2 + 2x + 3)^3} dx}_I - \underbrace{\int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^3} dx}_{II} \right)$$

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{Lemma 3.4.8.1}}{=} \left[ \frac{-1}{2(x^2 + 2x + 3)^2} \right] \\ II &= 2 \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^3} dx \\ &\stackrel{u = \frac{x+1}{\sqrt{2}}}{=} 2 \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{1}{(u^2 + 1)^3} du \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.4.9}}{=} 2 \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \frac{3}{4} \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du + \left[ \frac{u}{4(u^2 + 1)^2} \right] \right) \\ &\stackrel{3.4.14}{=} 2 \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[ \arctan(u) + \frac{u}{u^2 + 1} \right] + \left[ \frac{u}{4(u^2 + 1)^2} \right] \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{3}{8} \left[ \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{x^2 + 2x + 3} \right] + \left[ \frac{x+1}{\sqrt{2}(x^2 + 2x + 3)^2} \right] \right) \end{aligned}$$

Insgesamt ist das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + 2x + 3)^3} dx &= \left[ \frac{-1}{4(x^2 + 2x + 3)^2} - \frac{3\sqrt{2}}{64} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{x^2 + 2x + 3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \right] \\ &= \left[ -\frac{1}{8} \frac{x+3}{(x^2 + 2x + 3)^2} - \frac{3\sqrt{2}}{64} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{3}{32} \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} \right]. \end{aligned}$$

(d)

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx = \int \frac{1}{(1 - \sqrt{2}x + x^2)(1 + \sqrt{2}x + x^2)} dx = \int \frac{ax+b}{1 - \sqrt{2}x + x^2} + \frac{cx+d}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx$$

Die speziellen Werte werden durch das folgende LGS bestimmt:

$$\begin{aligned} b + d &= 1 \\ x(a + \sqrt{2}b + c - \sqrt{2}d) &= 0 \\ x^2(\sqrt{2}a + b - \sqrt{2}c + d) &= 0 \\ x^3(a + c) &= 0 \end{aligned}$$

und es ergibt sich  $a = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $d = \frac{2}{4}$ .

Einsetzen der Werte:

$$\underbrace{\int \frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx}_I + \underbrace{\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx}_{II}$$

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) \right]$$

$$II = +\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}x + x^2) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right]$$

Insgesamt ist das Ergebnis:

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx = \left[ -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|1 - \sqrt{2}x + x^2| + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|1 + \sqrt{2}x + x^2| + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right]$$

### Aufgabe H 71. *krummlinig berandete Flächen*

Gegeben sind die Funktionen  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -x^2 + 2x$  und  $g_\alpha: [0, 2] \mapsto \mathbb{R}: x \mapsto 2x + \alpha$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(a) Bestimmen Sie die Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{R}$  der Elemente  $\alpha$ , für welche

$$\{x \in [0, 2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} \neq \emptyset.$$

Geben Sie für jedes  $\alpha \in I$  die Menge  $\{x \in [0, 2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\}$  explizit an.

(b) Die Graphen von  $f$  und  $g_\alpha$  schließen zusammen in dem Bereich  $[0, 2]$  eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche  $F_\alpha$ .

### Lösungshinweise hierzu:

(a) Zu untersuchen ist, für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  mindestens eine Lösung  $x$  der Gleichung  $f(x) = g_\alpha(x)$  im Intervall  $[0, 2]$  liegt. Es gilt:

$$f(x) = g_\alpha(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 2x + \alpha \Leftrightarrow x^2 = -\alpha.$$

Dies wird für alle  $\alpha \leq 0$  durch  $x = \sqrt{-\alpha}$  oder  $x = -\sqrt{-\alpha}$  gelöst. Letzteres braucht nicht weiter verfolgt zu werden, da nur Lösungen  $x \in [0, 2]$  interessant sind. Für  $\alpha \in [-4, 0] = I$  folgt dann  $x \in [0, 2]$ .

- (b) Um  $F_\alpha$  berechnen zu können, ist es nötig zu untersuchen, für welche  $x \in [0, 2]$  die Ungleichung  $f(x) - g_\alpha(x) \leq 0$  erfüllt ist und für welche  $x \in [0, 2]$  die Ungleichung  $f(x) - g_\alpha(x) \geq 0$  gilt. Die Funktion  $f - g_\alpha$  ist als Differenz stetiger Funktionen stetig, also befinden sich diese Vorzeichenwechsel nur an Nullstellen  $f - g_\alpha$ . In Teil (a) wurde gezeigt, dass für  $\alpha \in [-4, 0]$  gilt:

$$\{x \in [0, 2] | f(x) - g_\alpha(x) = 0\} = \{x \in [0, 2] | f(x) = g_\alpha(x)\} = \{\sqrt{-\alpha}\}.$$

Für  $x \in [0, \sqrt{-\alpha}]$  ist  $f(x) - g_\alpha \geq 0$  und für  $x \in [\sqrt{-\alpha}, 2]$  ist  $f(x) - g_\alpha(x) \leq 0$ .  
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \int_0^2 |f(x) - g_\alpha(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{-\alpha}} |f(x) - g_\alpha(x)| \, dx + \int_{\sqrt{-\alpha}}^2 |f(x) - g_\alpha(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{-\alpha}} |f(x) - g_\alpha(x)| \, dx + \int_{\sqrt{-\alpha}}^2 -|f(x) - g_\alpha(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{-\alpha}} -x^2 - \alpha \, dx + \int_{\sqrt{-\alpha}}^2 x^2 + \alpha \, dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 - \alpha x \right]_0^{\sqrt{-\alpha}} + \left[ \frac{1}{3}x^3 + \alpha x \right]_{\sqrt{-\alpha}}^2 \\ &= \frac{8}{3} + 2\alpha - \frac{4}{3}\alpha \sqrt{-\alpha}. \end{aligned}$$

Für  $\alpha > 0$  oder  $\alpha < -4$  muss das Integral nicht aufgeteilt werden.

Es ist somit für  $\alpha > 0$

$$F_\alpha = \int_0^2 g_\alpha(x) - f(x) \, dx = \int_0^2 \alpha + x^2 \, dx = \frac{8}{3} + 2\alpha$$

und für  $\alpha < -4$

$$F_\alpha = \int_0^2 f(x) - g_\alpha(x) \, dx = \int_0^2 -x^2 - \alpha \, dx = -\frac{8}{3} - 2\alpha.$$

### Aufgabe H 72. Integration durch Substitution

Berechnen Sie

(a)  $\int \sin(\ln x) \, dx$

(b)  $\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} \, dx$

(c)  $\int (\ln x)^2 \, dx$

**Lösungshinweise hierzu:**

(a) Substitution:  $\ln(x) = u$ ,  $\frac{1}{x} = \frac{du}{dx}$ ,  $x = e^u$

$$\begin{aligned}\int \sin(u)e^u \, du &= [\sin(u)e^u] - \int \cos(u)e^u \, du \\ &= [\sin(u)e^u] - [\cos(u)e^u] - \int \sin(u)e^u \, du\end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt:

$$\int \sin(\ln(x)) \, dx = \frac{1}{2} [\sin(\ln(x))x - \cos(\ln(x))x]$$

(b) Substitution:  $\arctan(x) = u$ ,  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{du}{dx}$

$$\int u^2 \, du = \left[ \frac{1}{3} u^3 \right]$$

Rücksubstitution ergibt:

$$\int \frac{(\arctan(x))^2}{1+x^2} \, dx = \left[ \frac{(\arctan(x))^3}{3} \right]$$

(c) Substitution:  $\ln(x) = u$ ,  $\frac{1}{x} = \frac{du}{dx}$ ,  $x = e^u$

$$\begin{aligned}\int u^2 e^u \, du &= [u^2 e^u] - \int 2ue^u \, du \\ &= [u^2 e^u] - [2ue^u] + [2e^u]\end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt:

$$\int (\ln x)^2 \, dx = [x \ln(x)^2 - 2x \ln(x) + 2x]$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 73. *uneigentliche Integrale*

Konvergieren folgende Integrale? Berechnen Sie sie (falls möglich).

(a)  $\int_{-2}^{+\infty} 3^{-x} dx$     (b)  $\int_0^1 \ln(x) dx$     (c)  $\int_0^3 \frac{1}{x^2-4} dx$

und (d)  $\int_0^1 \arccos(x) dx$ , für die Umkehrfunktion des Cosinus  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

### Lösungshinweise hierzu:

(a) 
$$\int_{-2}^{\infty} 3^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-2}^b \exp(-\ln(3)x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{\exp(-\ln(3)x)}{-\ln(3)} \right]_{-2}^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\exp(-\ln(3)b)}{\ln(3)} + \frac{\exp(2\ln(3))}{\ln(3)} = \frac{\exp(2\ln(3))}{\ln(3)} = \frac{3^2}{\ln(3)} = \frac{9}{\ln(3)}$$

(b) 
$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \ln(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ x \ln(x) \right]_a^1 - \int_a^1 x \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ x \ln(x) - x \right]_a^1 \stackrel{\text{l'Hopital}}{=} -1$$

Zum Gleichheitszeichen gekennzeichnet durch l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

(c) Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$  hat Polstellen an  $x = -2$  und  $x = 2$ . Die Stelle 2 ist in dem Intervall über das integriert wird. Wir zerlegen das Integral in  $\int_0^2 \frac{1}{x^2-4} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^2-4} dx$ . Wir betrachten diese Teilintervalle und zeigen, dass zumindest ein Integral divergiert und somit das ganze Integral nicht konvergiert.

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-4} dx = \lim_{b \rightarrow 2} \int_0^b \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx \stackrel{\text{PBZ}}{=} \lim_{b \rightarrow 2} \int_0^b \frac{-1}{4} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-2} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow 2} \left[ \frac{-1}{4} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x-2| \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow 2} -\frac{\ln|b+2|}{4} + \frac{\ln|b-2|}{4} + \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\ln(2)}{4}$$

$$= \lim_{b \rightarrow 2} -\frac{\ln(4)}{4} + \frac{\ln|b-2|}{4} = -\infty$$

Zum Gleichheitszeichen gekennzeichnet durch PBZ:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x+2) = (A+B)x - 2A + 2B \Leftrightarrow$$

$$A+B = 0 \wedge -2A+2B = 1, \text{ also } 1 = -2(-B)+2B = 4B \text{ und somit } B = \frac{1}{4}, A = -\frac{1}{4}.$$

(d) Wir berechnen zuerst die Stammfunktion ohne Grenzen.

$$\int \arccos(x) dx \stackrel{\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{=} \left[ x \arccos(x) \right] - \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\stackrel{\text{Substitution: } u=1-x^2, du=-2x dx}{=} \left[ x \arccos(x) \right] + \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{-2x} = \left[ x \arccos(x) \right] - \left[ \sqrt{u} \right]$$

$$\stackrel{\text{Resub}}{=} \left[ x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} \right]$$

Zwischendurch am Term  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  hat man sehen können, dass es sich um ein uneigentliches Integral handelt (da der Nenner gegen Null strebt für  $x \rightarrow 1$ ).

Wir betrachten nun das bestimmte Integral

$$\left[ x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = (\arccos(1) - 0) - (0 - 1) \stackrel{\arccos(1)=0}{=} 1.$$

### Aufgabe H 74. uneigentliche Integrale

- (a) Hat die Fläche, die von den Graphen der Funktionen  $f(x) = \arctan(x)$  und  $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$  und der Geraden  $x = 1$  eingeschlossen wird, rechts der Geraden, endlichen Inhalt?

Berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

- (b) Konvergiert das Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ ?

- (c) Konvergiert  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\cos(x) - \sin(x))^2}{x^2} dx$ ?

### Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es konvergieren  $f$  und  $g$  beide gegen  $\frac{\pi}{2}$ . Nun klären wir, ob  $f$  oder  $g$  größer ist auf  $[1, \infty)$ . Wir betrachten hierzu:

$$\arctan(x) > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \quad | \tan(\cdot)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\arctan(x)) > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \tan\left(\frac{1}{x}\right), \text{ diese Aussage ist wahr (vgl. 1.12.5).}$$

Somit ist der  $f$  für alle  $x \in [1, \infty)$  größer als  $g$ .

Wir berechnen die Stammfunktion von  $\arctan(x)$ .

$$\int \arctan(x) dx = \left[ x \arctan(x) \right] - \int x \left( \frac{d}{dx} \arctan(x) \right) dx$$

$$\stackrel{\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}{=} \left[ x \arctan(x) \right] - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\text{Substitution: } u \stackrel{=}{=} 1+x^2, \quad du = 2x dx \quad \left[ x \arctan(x) \right] - \int \frac{x du}{u \cdot 2x} = \left[ x \arctan(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ \ln(|u|) \right]$$

$$\stackrel{\text{Resub.}}{=} \left[ x \arctan(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ \ln(1+x^2) \right]$$

Jetzt betrachten wir

$$\int_1^{+\infty} f(x) - g(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \arctan(x) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{\pi}{2} x + \ln|x| \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{b \arctan(b)}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) - \frac{\pi}{2} b + \ln(b) - \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{2} - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - \frac{1}{2} \ln(1+b^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} + \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - \ln(\sqrt{1+b^2})}_{\rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

Die Fläche hat den endlichen Inhalt  $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$ .

- (b) Wir werden die Frage mit dem Majorantenkriterium beantworten. Hierzu zerlegen wir das Integral in drei Teile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \int_{-\infty}^{-1} \exp(-x^2) dx + \int_{-1}^{+1} \exp(-x^2) dx + \int_{+1}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$$

Auf dem Intervall  $(-\infty, -1]$  können wir  $\exp(-x^2)$  durch  $\exp(x)$  nach oben abschätzen.

$$\text{Des Weiteren wissen wir } \int_{-\infty}^{-1} \exp(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\exp(x)]_a^{-1}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \exp(-1) - \exp(a) = \frac{1}{e} < \infty$$

Auf dem Intervall  $(-1, 1)$  schätzen wir  $\exp(-x^2)$  durch 1 nach oben ab und erhalten

$$\int_{-1}^1 1 dx = 2 < \infty.$$

Zuletzt schätzen wir auf  $[1, \infty)$  die Funktion durch  $\exp(-x)$  ab und erhalten

$$\int_1^{\infty} \exp(-x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-\exp(-x)]_1^{\infty}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\exp(-b) - (-\exp(-1)) = \frac{1}{e} < \infty$$

Wir haben eine konvergente Majorante gefunden, somit konvergiert das Integral.

- (c) Wir finden eine divergente Minorante.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\cos(x) - \sin(x))^2}{x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\cos(x))^2 - 2\sin(x)\cos(x) + (\sin(x))^2}{x^2} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1 - 2\sin(x)\cos(x)}{x^2} dx \stackrel{2\sin(x)\cos(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]}{\geq} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{x^2} dx$$

Dies ist bekannt als divergent aus der Vorlesung.

### Aufgabe H 75. Ober- und Untersumme

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$  gilt.

- (b) Es sei  $y > 0$  und  $f: [0, y] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3$ . Berechnen Sie mittels Ober- und Untersummen  $\int_0^y f(x) dx$ .

Wählen Sie dabei die Partitionen so, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilungspunkten immer gleich ist.

### Lösungshinweise hierzu:

- (a) Beweis via vollständiger Induktion:

$$\text{(IA)} \quad \sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \frac{1^2}{4}(1+1)^2$$

$$\text{(IH)} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

**(IS)** Betrachte  $\frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \frac{n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4}{4} = \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$ ,

dies soll das Ergebnis sein für  $\sum_{k=1}^{n+1} k^3$ . Berechne nun  $\sum_{k=1}^{n+1} k^3$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} + \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4} = \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}. \end{aligned}$$

Wir haben somit Gleichheit, die Behauptung stimmt also.

**(b)** Wähle als Partition  $\{\frac{0}{n}y, \frac{1}{n}y, \dots, \frac{k}{n}y, \dots, \frac{n}{n}y\}$ .

$$I_k := \inf\{f(x)|x \in [\frac{k-1}{n}y, \frac{k}{n}y]\} = \frac{(k-1)^3}{n^3}y^3, \quad S_k := \sup\{f(x)|x \in [\frac{k-1}{n}y, \frac{k}{n}y]\} = \frac{k^3}{n^3}y^3.$$

$$\text{Somit } \underline{S} = \sum_{k=1}^n I_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^3}{n^3}y^3 \frac{y}{n} = \frac{y^4}{n^4} \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \frac{y^4}{n^4} \sum_{j=1}^{n-1} j^3$$

$$\stackrel{(a)}{=} \frac{y^4}{n^4} \frac{(n-1)^2}{4} n^2 = \frac{y^4}{4} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \frac{y^4}{4} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \text{und } \bar{S} &= \sum_{k=1}^n S_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3}y^3 \frac{y}{n} = \frac{y^4}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 \stackrel{(a)}{=} \frac{y^4}{n^4} \frac{n^2}{4} (n+1)^2 \\ &= \frac{y^4}{4} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \frac{y^4}{4} \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

### Aufgabe H 76. Funktionsanpassung

Es sei  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq 5$  mit folgenden Eigenschaften:

- für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt  $\int_{-c}^c f(x) dx = 0$
- $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{6}$
- $\int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{9}{2}$
- $f'(1) = 0$

Bestimmen Sie  $f$  und fertigen Sie eine Skizze an.

**Lösungshinweise hierzu:**  $f$  hat die Gestalt  $f(x) = \sum_{i=0}^5 a_i x^i$ .

$$\begin{aligned} \text{Nun berechnen wir } 0 &\stackrel{!}{=} \int_{-c}^c f(x) dx = \left[ a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \frac{a_4}{5} x^5 + \frac{a_5}{6} x^6 \right]_{-c}^c \\ &= a_0 c + \frac{a_1}{2} c^2 + \frac{a_2}{3} c^3 + \frac{a_3}{4} c^4 + \frac{a_4}{5} c^5 + \frac{a_5}{6} c^6 - (a_0(-c) + \frac{a_1}{2}(-c)^2 + \frac{a_2}{3}(-c)^3 + \frac{a_3}{4}(-c)^4 + \\ &\quad \frac{a_4}{5}(-c)^5 + \frac{a_5}{6}(-c)^6) \\ &= 2(a_0 c + \frac{a_2}{3} c^3 + \frac{a_4}{5} c^5) \\ &\Rightarrow a_0 = a_2 = a_4 = 0 \end{aligned}$$

Wir schreiben nun die anderen Eigenschaften auf und werden hieraus ein lineares Gleichungssystem erhalten.

$$-\frac{1}{6} = \int_{-1}^0 f(x) dx = \left[ \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_3}{4} x^4 + \frac{a_5}{6} x^6 \right]_{-1}^0 = -\left( \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_5}{6} \right)$$



Durchmultiplizieren mit  $-12$  liefert  $6a_1 + 3a_3 + 2a_5 = 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{9}{2} &= \int_{-1}^2 f(x) dx = \left[ \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_3}{4}x^4 + \frac{a_5}{6}x^6 \right]_{-1}^2 = \frac{a_1}{2}4 + \frac{a_3}{4}16 + \frac{a_5}{6}64 - \left( \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_5}{6} \right) \\ &= \frac{a_1}{2}4 + \frac{a_3}{4}16 + \frac{a_5}{6}64 - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Durchmultiplizieren mit  $6$  liefert  $12a_1 + 24a_2 + 64a_3 = 28$ .

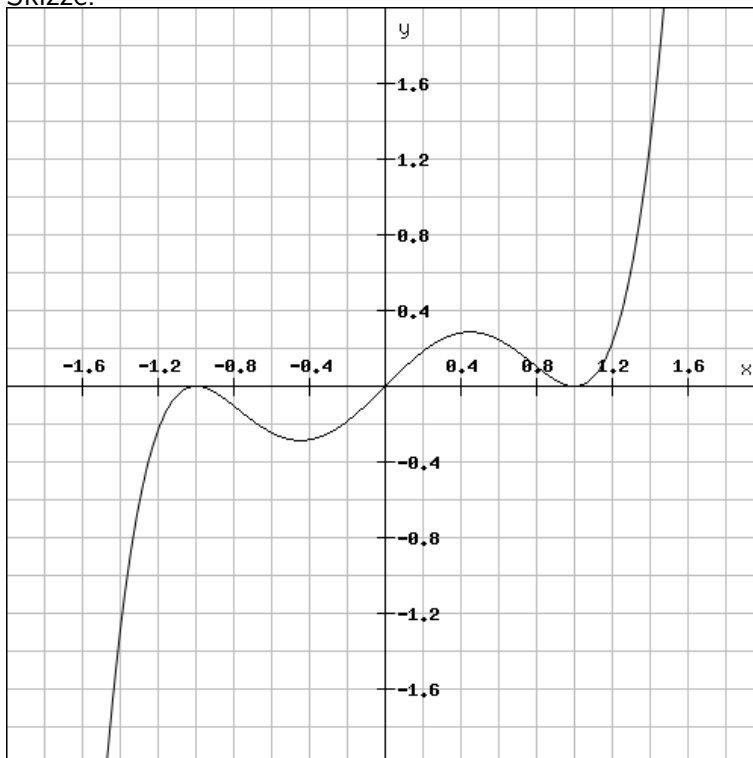
$$f'(x) = a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 \Rightarrow f'(1) = a_1 + 3a_3 + 5a_5 = 0.$$

Insgesamt ergibt sich das LGS  $\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 2 \\ 12 & 24 & 64 & 28 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right)$ .

Dies hat die Lösung  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = -2$ ,  $a_5 = 1$ .

Das Polynom  $f$  hat somit folgende Gestalt  $f(x) = x - 2x^3 + x^5$ .

Skizze:



## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 77. Potenzreihen

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius  $\rho$  und die ersten zwei Ableitungen der Funktion

$$f: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)} x^{2k+2}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für  $f''$ .

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für  $f$ .

(d) Zeigen Sie unter Verwendung der Potenzreihe für  $f'$ , dass

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

### Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)} x^{2k+2} &= \sum_{j=4}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j)(2j-1)} x^{2j} \\ &= \sum_{j=4}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j)(2j-1)} u^j \quad \text{mit } u = x^2. \end{aligned}$$

Wir berechnen den Konvergenzradius in der Variablen  $u$ :

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\left| \frac{(-1)^{j-1}}{(2j)(2j-1)} \right|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[j]{2j}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[j]{2j-1}} = 1,$$

also konvergiert die Reihe für  $|u| \leq 1$ . Rücksubstitution ergibt, dass die Reihe für  $|x| \leq 1$  konvergiert.

Summandenweises Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \\ f''(x) &= \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

- (b) Innerhalb des Konvergenzbereichs gilt  $|-x^2| < 1$ , daher handelt es sich um eine konvergente geometrische Reihe und es gilt

$$f''(x) = \sum_{k=3}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1 - (-x^2)} - (1 - x^2 + x^4) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 - x^4$$

- (c) Integrieren ergibt

$$[f'(x)] = \int \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 - x^4 \, dx = \left[ \arctan(x) - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right].$$

Einsetzen des Arguments 0 liefert

$$f'(x) = \arctan(x) - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5.$$

Nochmaliges Integrieren ergibt

$$[f(x)] = \left[ x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^6 \right].$$

Einsetzen des Arguments 0 liefert

$$f(x) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^6.$$

- (d) In Teil c) wurde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \arctan(x)$$

gezeigt. Einsetzen von 1 ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

### Aufgabe H 78. Stetigkeit

Lassen sich die folgenden Funktionen im Ursprung stetig fortsetzen?

(a)  $f_1: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\} \rightarrow \mathbb{R}: (x,y)^\top \mapsto \frac{x+y^2}{x^2+y^2}$

(b)  $f_2: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\} \rightarrow \mathbb{R}: (x,y)^\top \mapsto \frac{x^4-y^4}{x^2+2y^2}$

**Lösungshinweise hierzu:**

(a) Die Folge  $(\frac{1}{n}, 0)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $(0, 0)$ . Die Funktionswerte

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} + 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = n$$

konvergieren nicht. Also ist die Funktion im Ursprung nicht stetig ergänzbar.

(b) Im ganzen Definitionsbereich gilt

$$\left| \frac{x^4 - y^4}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \left| \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \right| = |x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Für  $|(x, y) - (0, 0)| < \sqrt{\varepsilon}$  ist

$$|f(x, y) - 0| \leq x^2 + y^2 \leq \varepsilon.$$

Also lässt sich die Funktion durch den Funktionswert 0 stetig fortsetzen.

### Aufgabe H 79. $\Gamma$ -Funktion und Stirling-Formel

Die  $\Gamma$ -Funktion (siehe 3.7.12) ist definiert durch

$$\Gamma: (0, +\infty) : \mathbb{R} : x \mapsto \int_{0+\infty}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\Gamma$  für alle  $x \in (0, +\infty)$  die Gleichung  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  erfüllt.  
 (b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  die Gleichung  $\Gamma(n+1) = n!$  gilt.  
 (c) Zeigen Sie durch Betrachtung geeigneter Ober- beziehungsweise Untersummen, dass für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:

$$\int_2^{n+1} \ln(x-1) dx \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(x) dx$$

(d) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:

$$e \left( \frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq e \left( \frac{n+1}{e} \right)^{n+1}$$

*Hinweis:* Dies ist eine (leicht vereinfachte) Version der sogenannten Stirling-Formel, die oft in der Form  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$  auftaucht.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)**

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-e^{-t}t^x]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} x t^{x-1} dt \\ &= 0 + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

**(b)** Wir beweisen die Formel mit vollständiger Induktion:**(IA)** Der Wert von  $\Gamma(1)$  beträgt

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1 = 0!.$$

**(IH)** Sei  $\Gamma(n+1) = n!$ **(IS)**

$$\begin{aligned}\Gamma(n+2) &= (n+1)\Gamma(n+1) && \text{nach (a)} \\ &= (n+1)n! && \text{nach (IH)} \\ &= (n+1)!\end{aligned}$$

**(c)** Wir berechnen Untersumme der Funktion

$$f: [1, n+1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(x).$$

Bezüglich der Partition  $P := \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n+1\}$  des Intervalls  $[1, n+1]$ :

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, P) &= \sum_{k=1}^n \inf \{ \ln(x) \mid x \in [k, k+1] \} \cdot ((k+1) - k) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(k) \cdot 1 \quad (\text{da der Logarithmus monoton strigend ist})\end{aligned}$$

Wir berechnen Obersumme der Funktion

$$g: [2, n+1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(x-1)$$

bezüglich der Partition  $Q := \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leq k \leq n+1\}$  des Intervalls  $[2, n+1]$ :

$$\begin{aligned}\overline{S}(g, Q) &= \sum_{k=2}^n \sup \{ \ln(x-1) \mid x \in [k, k+1] \} \cdot ((k+1) - k) \\ &= \sum_{k=2}^n \ln(k) \cdot 1 \quad (\text{wieder aufgrund der Monotonie})\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{array}{rcl}
\int_2^{n+1} \ln(x-1) \, dx & \leq & \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(x) \, dx \\
[(x-1) \ln(x-1) - (x-1)]_2^{n+1} & \leq & \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq [x \ln(x) - x]_1^{n+1} \\
n \ln(n) - n + 1 & \leq & \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1 \\
e^{n \ln(n) - n + 1} & \leq & e^{\sum_{k=1}^n \ln(k)} \leq e^{(n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1} \\
n^n \cdot e^{-n} \cdot e & \leq & e^{\ln(n!)} \leq (n+1)^{(n+1)} \cdot e^{-(n+1) \cdot e} \\
e \left(\frac{n}{e}\right)^n & \leq & n! \leq e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}
\end{array}$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 80. kritische Stellen

Berechnen Sie die kritischen Stellen folgender Funktionen.

- (a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2y^2 - 3xy^4$   
(b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \exp(x)(y^2 + x^2y)$   
(c)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto x^3 + x^2y - 2xyz + yz^2 + z^3$   
(d)  $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto \sin(x) \cos(y) \tan(z)$

**Lösungshinweise hierzu:** Um die kritischen Stellen zu berechnen, setzen wir den Gradientenvektor gleich dem Nullvektor.

- (a)  $\text{grad } f(x, y) = (x^2 + 2xy^2 - 3y^4, 2x^2y - 12xy^3)^\top \stackrel{!}{=} (0, 0)^\top$ . Die partielle Ableitung nach  $x$  ist Null genau dann, wenn  $x_{1,2} = \frac{-2y^2 \pm \sqrt{4y^4 - 4(-3y^4)}}{2} = \frac{-2y^2 \pm 4y^2}{2} = -y^2 \pm 2y^2$ , die partielle Ableitung nach  $y$  ( $2x^2y - 12xy^3 = 2xy(x - 6y^2)$ ) ist Null genau dann, wenn  $x = y = 0$  oder  $x = 6y^2$ . Beide Ableitungen verschwinden gleichzeitig nur für  $x = y = 0$ , d.h.  $f$  hat eine kritische Stelle in  $(0, 0)$ .
- (b)  $\text{grad } f(x, y) = (\exp(x)(y^2 + x^2y) + \exp(x)2xy, (2y + x^2)\exp(x))^\top \stackrel{!}{=} (0, 0)^\top$ . Die partielle Ableitung nach  $x$  lässt sich auch so schreiben  $y(y + x^2 + 2x)\exp(x)$ , sie ist Null genau dann, wenn  $y = 0$  oder  $y = -x^2 - 2x$ . Die partielle Ableitung nach  $y$  ist Null genau dann, wenn  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . Beide Ableitungen verschwinden gleichzeitig nur für  $x = y = 0$ , d.h.  $f$  hat eine kritische Stelle in  $(0, 0)$ .
- (c)  $\text{grad } f(x, y, z) = (3x^2 + 2xy - 2yz, x^2 - 2xz + z^2, -2xy + 2yz + 3z^2)^\top \stackrel{!}{=} (0, 0, 0)^\top$ . Die partielle Ableitung nach  $y$  lässt sich schreiben als  $(x - z)^2$  und ist genau dann Null, wenn  $x = z$  gilt. Setzen wir diese Bedingung in die anderen Ableitungen ein, so erhalten wir  $0 \stackrel{!}{=} 3x^2 + 2xy - 2xy = 3x^2 \Leftrightarrow x = 0$  in beiden Fällen. An  $y$  wird keine Bedingung gestellt. D.h. die partiellen Ableitungen verschwinden gleichzeitig für  $x = 0, z = 0$  und  $y$  beliebig. Die kritischen Stellen befinden sich bei  $(0, y, 0)$  mit  $y \in \mathbb{R}$ .
- (d)  $\text{grad } f(x, y, z) = (\cos(x) \cos(y) \tan(z), -\sin(x) \sin(y) \tan(z), \frac{\sin(x) \cos(y)}{(\cos(z))^2})^\top \stackrel{!}{=} (0, 0, 0)^\top$ . Die partielle Ableitung nach  $x$  verschwindet für  $z = 0$  und beliebige  $x$  und  $y$ . Die partielle Ableitung nach  $y$  verschwindet genau dann, wenn  $x = 0$  oder  $y = 0$  oder  $z = 0$  gilt. Zuletzt ist die Ableitung nach  $z$  Null, wenn  $x = 0$  ist mit beliebigen  $y$  oder  $z$ . D.h. der Gradient ist der Nullvektor, falls  $x = z = 0$  und  $y$  beliebig.

### Aufgabe H 81. Richtungsableitung, Taylor

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto \exp(yz)(\cosh(x) + (y + z)^2)$ .

- (a) Bestimmen Sie an der Stelle  $(1, 1, 1)$  die Ableitungen der Funktion  $f$  in die Richtungen  $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)^\top$  und  $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)^\top$ .
- (b) Berechnen Sie  $T_1(f, (x, y, z), (0, 1, 0))$  und  $T_2(f, (x, y, z), (0, 1, 0))$ . Welchen Fehler weist die Näherung von  $f$  durch  $T_1(f, (x, y, z), (0, 1, 0))$  bzw. durch  $T_2(f, (x, y, z), (0, 1, 0))$  an der Stelle  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  auf?
- (c) Bestimmen Sie (unabhängig von (a) und (b)) mit Hilfe einer linearen Approximation einen Näherungswert für  $\sqrt{1,1^2 + 2,1^2 + 1,9^2}$ . Benutzen Sie dazu ein Taylor-Polynom der Stufe eins einer passenden Funktion  $g$  mit dem nächsten ganzzahligen Entwicklungspunkt.

**Lösungshinweise hierzu:**

- (a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \sinh(x) \exp(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = z \cosh(x) \exp(yz) + z \exp(yz)(y+z)^2 + 2(y+z) \exp(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = y \cosh(x) \exp(yz) + y \exp(yz)(y+z)^2 + 2(y+z) \exp(yz)$$

Der Gradient ausgewertet an  $(1, 1, 1)$  ist also  $(\frac{e^2-1}{2}, (\cosh(1)+8)e, (\cosh(1)+8)e)^\top$ . Die Richtungsableitung ergibt sich als Skalarprodukt aus der Richtung und des Gradienten.

Es ergibt sich hier:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)^\top \cdot \left(\frac{e^2-1}{2}, (\cosh(1)+8)e, (\cosh(1)+8)e\right)^\top \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(0 + (\cosh(1)+8)e + 2(\cosh(1)+8)e) = \frac{3(\cosh(1)+8)e}{\sqrt{5}} = \frac{(3\cosh(1)+24)e}{\sqrt{5}} \\ & \text{und } \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)^\top \cdot \left(\frac{e^2-1}{2}, (\cosh(1)+8)e, (\cosh(1)+8)e\right)^\top = \frac{(3\cosh(1)+24)e}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

- (b) Wir berechnen nun die weiteren Ableitungen:

$$\partial_x \partial_x f(x, y, z) = \cosh(x) \exp(yz)$$

$$\partial_x \partial_y f(x, y, z) = \partial_y \partial_x f(x, y, z) = z \exp(yz) \sinh(x)$$

$$\partial_x \partial_z f(x, y, z) = \partial_z \partial_x f(x, y, z) = y \exp(yz) \sinh(x)$$

$$\partial_y \partial_y f(x, y, z) = \exp(yz)(z^2 \cosh(x) + 2 + 4(y+z)z + z^2(y+z)^2)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_z f(x, y, z) &= \partial_z \partial_y f(x, y, z) \\ &= \exp(yz)(yz \cosh(x) + yz(y+z)^2 + 2z(y+z) + \cosh(x) + (y+z)^2 + 2y(y+z) + 2) \end{aligned}$$

$$\partial_z \partial_z f(x, y, z) = \exp(yz)(y^2 \cosh(x) + 2 + 4(y+z)y + y^2(y+z)^2)$$

Es ist  $f(0, 1, 0) = (\cosh(0) + (1+0)^2) \exp(0) = 1 + 1 = 2$

und  $\text{grad } f(0, 1, 0) = (0, 2, 4)^\top$ ,

$$\text{sowie } H f(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$



Mit diesen Werten ergibt sich

$$T_1(f, (x, y, z), (0, 1, 0)) = f(0, 1, 0) + (x - 0, y - 1, z - 0)^T \bullet \text{grad } f(0, 1, 0) \\ = 2 + (x, y - 1, z) \bullet (0, 2, 4)^T = 2 + 0 + 2(y - 1) + 4z = 2y + 4z$$

und  $T_2(f, (x, y, z), (0, 1, 0))$

$$= f(0, 1, 0) + (x - 0, y - 1, z - 0)^T \bullet \text{grad } f(0, 1, 0) + \frac{1}{2}(x - 0, y - 1, z - 0) \text{H} f(0, 1, 0)(x - 0, y - 1, z - 0)^T \\ = 2y + 4z + \frac{1}{2}x^2 + (y - 1)^2 + 6(y - 1)z + 4z^2.$$

Wir betrachten nun die Fehler. Es ist  $f(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2e^{\frac{1}{4}}$  el. Hilfsmittel  $\approx 2,56805083$ ,

$$T_1(f, (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1, 0)) = 1 + 2 = 3$$

$$\text{und } T_2(f, (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1, 0)) = 1 + 2 + 0 + \frac{1}{2} - \frac{6}{4} + 1 = \frac{11}{4}.$$

Somit sind die Fehler 0,431949167 und 0,181949167.

- (c) Die ganzen Zahlen 1, 2 und 2 sind die nächsten zu den Werten in der Aufgabenstellung, des Weiteren hat  $g$  die Gestalt

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Berechne nun die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial}{\partial y} g(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Somit ist der Gradient  $\text{grad } g(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^T$  bzw.

es hat  $T_1(g, (x, y, z), (1, 2, 2))$  die Form

$$T_1(g, (x, y, z), (1, 2, 2)) = g(1, 2, 2) + ((x, y, z) - (1, 2, 2))^T \bullet \text{grad } g(1, 2, 2) = \\ 3 + (x - 1, y - 2, z - 2) \bullet \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)^T = 3 + \frac{x - 1 + 2y - 4 + 2z - 4}{3}.$$

Somit nimmt  $T_1(g, (x, y, z), (1, 2, 2))$  aus gewertet an  $(1, 1, 2, 1, 1, 9)$  den Wert  $3 + \frac{0,1+0,2-0,2}{3} = 3\frac{1}{30} = 3,0\bar{3}$  an.

Ein Näherungswert mittels el. Hilfsmittel für  $\sqrt{1,1^2 + 2,1^2 + 1,9^2}$  ist 3,03809151.

### Aufgabe H 82. geometrische Interpretation, Rotationsfläche

Gegeben sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \cos(x^2 + y^2)$  mit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\pi\}$ .

- (a) Berechnen Sie den Gradienten von  $f$ .

- (b) Der Graph von  $f$  kann als Bild einer Abbildung

$$g: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3: (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h(r))^T$$

dargestellt werden, wobei  $r$  für den Radius und  $\varphi$  für den Winkel der Polarkoordinaten stehen. Die Abbildung  $g$  parametrisiert so eine Rotationsfläche.

Geben Sie  $h(r)$  so an, dass der Graph von  $f$  mit dem Bild von  $g$  übereinstimmt.

- (c) Bilden Sie die partiellen Ableitungen

$$\partial_r g(r, \varphi) = \left( \frac{\partial}{\partial r} g_1(r, \varphi), \frac{\partial}{\partial r} g_2(r, \varphi), \frac{\partial}{\partial r} g_3(r, \varphi) \right)^T \quad \text{und} \\ \partial_\varphi g(r, \varphi) = \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1(r, \varphi), \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2(r, \varphi), \frac{\partial}{\partial \varphi} g_3(r, \varphi) \right)^T.$$

Für welche  $(r, \varphi)$  sind diese linear unabhängig?

- (d) Sei  $T_{(r,\varphi)}g := \{g(r, \varphi) + \lambda \partial_r g(r, \varphi) + \mu \partial_\varphi g(r, \varphi) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . Überprüfen Sie, ob es sich hierbei um die Tangentialebene im Punkt  $(r, \varphi)$  an das Bild von  $g$  handelt, indem Sie die Tangentialebenen des Graphen von  $f$  betrachten.

**Lösungshinweise hierzu:**

- (a) Die partiellen Ableitungen von  $f$  sind  $\frac{\partial}{\partial x} \cos(x^2 + y^2) = -2x \sin(x^2 + y^2)$  und  $\frac{\partial}{\partial y} \cos(x^2 + y^2) = -2y \sin(x^2 + y^2)$ ,  
somit ist der Gradient  $\text{grad } f(x, y) = (-2x \sin(x^2 + y^2), -2y \sin(x^2 + y^2))^T$ .
- (b) Es soll der Graph von  $f$  mit dem Bild von  $g$  übereinstimmen. Betrachte hierzu  $x$  und  $y$  in Polarkoordinaten, es gilt  $x = r \cos(\varphi)$  und  $y = r \sin(\varphi)$ , wobei  $r$  für den Radius und  $\varphi$  für den Winkel der Polarkoordinaten stehen. Insbesondere gilt  $x^2 + y^2 = r^2$ . Es lässt sich  $h$  also schreiben als  $h(r) = \cos(r^2)$ .  
Insgesamt hat  $g$  die Gestalt  $g: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \cos(r^2))^T$ .
- (c) Es ist  $\partial_r g(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -2r \sin(r^2))^T$  und  $\partial_\varphi g(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)^T$ .  
Wir überprüfen mittel des Kreuzproduktes, ob die Vektoren linear unabhängig sind. Das Kreuzprodukt ist der Nullvektor genau dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind.  
 $\partial_r g(r, \varphi) \times \partial_\varphi g(r, \varphi) = (2r^2 \sin(r^2) \cos \varphi, 2r^2 \sin(r^2) \sin \varphi, r)^T$ ,  
dies ist genau dann der Nullvektor, wenn  $r = 0$  gilt. Für alle anderen Werte von  $(r, \varphi)$  sind die partiellen Ableitungen von  $g$  stets linear unabhängig.
- (d) Wir wissen aus (c) schon, dass es sich bei  $T_{(r,\varphi)}g$  tatsächlich für  $r > 0$  um eine Ebene handelt, da die Richtungsvektoren l.u. sind. Wir betrachten die Normale an den Graphen von  $f$  bzw. die Normale an die Tangentialebene. Diese ist im Punkt  $(a, f(a))$  gegeben durch die Gleichung  $z = T_1(f, (x, y), a)$  (vgl. Skript 4.4.14). Wir schreiben  $a = (a_1, a_2)$  und berechnen  
 $z = T_1(f, (x, y), (a_1, a_2)) = f(a_1, a_2) + ((x, y) - (a_1, a_2)) \bullet \text{grad } f(a_1, a_2)$   
 $= \cos(a_1^2 + a_2^2) + (x - a_1, y - a_2)^T \bullet (-2a_1 \sin(a_1^2 + a_2^2), -2a_2 \sin(a_1^2 + a_2^2))^T$   
 $= \cos(a_1^2 + a_2^2) + 2a_1^2 \sin(a_1^2 + a_2^2) + 2a_2^2 \sin(a_1^2 + a_2^2) - 2a_1 \sin(a_1^2 + a_2^2)x - 2a_2 \sin(a_1^2 + a_2^2)y$   
Hieran können wir ein Vielfaches der Normalen ablesen,  
nämlich  $(2a_1 \sin(a_1^2 + a_2^2), 2a_2 \sin(a_1^2 + a_2^2), 1)^T$ .  
Betrachten wir nun  $a$  auch in Polarkoordinaten  $a_1 = r \cos \varphi$  und  $a_2 = r \sin \varphi$  und schreiben  $(2r \sin(r^2) \cos \varphi, 2r \sin(r^2) \sin \varphi, 1)^T$ , so erkennen wir dieses als ein  $r$ -faches Vielfaches des Kreuzproduktes aus (c). Somit haben die Ebenen die gleichen Normalen. Per Konstruktion haben die Ebenen auch die gleichen Stützstellen, sie sind also gleich. D.h.  $T_{(r,\varphi)}g$  ist die Tangentialebene an  $g$  im Punkt  $(r, \varphi)$ .

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 83. kritische Stellen

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktionen

$$\begin{aligned} f: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z)^T \mapsto \sin(x)(\cosh(y+z) + z^2) \quad \text{und} \\ g: U_2 \left( \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \right) &\rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z)^T \mapsto x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x^2yz \end{aligned}$$

sowie deren Typ.

**Lösungshinweise hierzu:** Der Gradient von  $f$  ist

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x)(\cosh(y+z) + z^2) \\ \sin(x) \sinh(y+z) \\ \sin(x)(\sinh(y+z) + 2z) \end{pmatrix}.$$

Wegen  $\cosh(y+z) + z^2 \geq 1$  ergibt Nullsetzen der ersten Komponente des Gradienten  $x = \frac{\pi}{2}$  oder  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Für diese beiden Werte von  $x$  ist  $\sin(x) \neq 0$  und das Nullsetzen der zweiten Komponente des Gradienten ergibt  $y = -z$ . Die dritte Komponente liefert  $z = 0$ . Wir erhalten also die beiden kritischen Stellen  $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)^T$  und  $(\frac{3\pi}{2}, 0, 0)^T$ . Die Hesse-Matrix von  $f$  ist

$$Hf \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)(\cosh(y+z) + z^2) & \cos(x) \sinh(y+z) & \cos(x)(\sinh(y+z) + 2z) \\ \cos(x) \sinh(y+z) & \sin(x) \cosh(y+z) & \sin(x) \cosh(y+z) \\ \cos(x)(\sinh(y+z) + 2z) & \sin(x) \cosh(y+z) & \sin(x)(\cosh(y+z) + 2) \end{pmatrix}$$

An den kritischen Stellen entstehen die Hesse-Matrizen

$$Hf \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Hf \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Diese haben die Eigenwerte  $-1$ ,  $2 - \sqrt{2}$  und  $2 + \sqrt{2}$  beziehungsweise  $1$ ,  $-2 - \sqrt{2}$  und  $-2 + \sqrt{2}$ . Also liegt bei  $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)^T$  und bei  $(\frac{3\pi}{2}, 0, 0)^T$  jeweils ein Sattelpunkt vor: Es gibt *keine* Extremalstellen.

Der Gradient von  $g$  ist

$$\nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2xyz \\ 4y - x^2z \\ 4z - x^2y \end{pmatrix}.$$

Nullsetzen der ersten Komponente ergibt  $2x(1 - yz) = 0$ . Falls  $x = 0$  ist, ergibt sich  $(0, 0, 0)^T$  als einzige Lösung. Im Fall  $x \neq 0$  liefert die erste Komponente die Gleichung  $1 - yz = 0$  und damit  $z = \frac{1}{y}$ . Einsetzen ergibt die beiden Gleichungen  $4y - \frac{x^2}{y} = 0$  und  $\frac{4}{y} - x^2y = 0$ . Auflösen der ersten Gleichung nach  $x^2$  und Einsetzen ergibt  $1 - y^4 = 0$ . Diese

Gleichung hat die (reellen) Lösungen  $y = 1$  und  $y = -1$ . Die Gleichung  $\nabla g(x, y, z)^\top = 0$  hat also in  $\mathbb{R}^3$  die Lösungen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hiervon liegen nur  $P_1$  und  $P_2$  im Definitionsbereich  $U_2 \left( \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top \right)$ ; für die anderen ist der Abstand von  $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top$  zu groß. Die Hesse-Matrix von  $g$  ist

$$\text{Hg} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2yz & -2xz & -2xy \\ -2xz & 4 & -x^2 \\ -2xy & -x^2 & 4 \end{pmatrix}.$$

An den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  ergeben sich die Hesse-Matrizen

$$\text{Hg} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \text{Hg} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von  $\text{Hg}(P_1)$  sind 2 und 4 (doppelt); also liegt bei  $P_1$  ein lokales Minimum vor. Wegen  $\det(\text{Hg}(P_2)) = -256$  ist wenigstens ein Eigenwert von  $\text{Hg}(P_2)$  negativ (das Produkt der Eigenwerte ist ja gerade die Determinante). Die Spur der Hessematrix ist die Summe der Eigenwerte. Da  $\text{Sp}(\text{Hg}(P_2)) = 0 + 4 + 4 = 8$  positiv ist, können nicht alle drei Eigenwerte negativ sein. Also gibt es Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen, und wir erkennen, dass bei  $P_2$  ein Sattelpunkt vorliegt.

#### Aufgabe H 84. Taylor-Polynom

In der Relativitätstheorie wird die Energie  $E$  eines Teilchens der Masse  $m$  in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beschrieben durch

$$E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: v \mapsto E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\langle v|v \rangle}{c^2}}},$$

wobei  $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$  die Geschwindigkeit und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Funktion  $E$  der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt  $v = (0, 0, 0)$ .

**Lösungshinweise hierzu:** Der Gradient und die Hesse-Matrix von  $E$  sind

$$\nabla E(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\langle v|v \rangle}{c^2}}^3} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3mv_1^2}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} + \frac{m}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{3/2}} & \frac{3mv_1v_2}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_1v_3}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} \\ \frac{3mv_1v_2}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_2^2}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} + \frac{m}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{3/2}} & \frac{3mv_2v_3}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} \\ \frac{3mv_1v_3}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_2v_3}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_3^2}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} + \frac{m}{\left(1-\frac{\langle v|v \rangle}{c^2}\right)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

mit  $\langle v|v \rangle = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ .

Einsetzen der Stelle  $(0, 0, 0)$  ergibt

$$T_2(E, v, (0, 0, 0)) = mc^2 + \frac{1}{2}m \langle v|v \rangle = mc^2 + \frac{1}{2}m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$

### Aufgabe H 85. kritische Stellen

Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^T \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{für } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

und deren Typ.

**Lösungshinweise hierzu:** An der Stelle  $(0, 0)$  ist die Funktion nicht stetig, also ist sie auch nicht differenzierbar und  $(0, 0)$  ist keine kritische Stelle. Allerdings ist die Funktion bei  $(0, 0)$  partiell differenzierbar — es ist Vorsicht geboten! Wir setzen  $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Für  $(x, y) \in D$  ist der Gradient

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{x^2 + y^4} - \frac{2x^2y^2}{(x^2 + y^4)^2} \\ \frac{2xy}{x^2 + y^4} - \frac{4xy^5}{(x^2 + y^4)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^4} \begin{pmatrix} y^2(-x^2 + y^4) \\ 2xy(x^2 - y^4) \end{pmatrix}.$$

Nullsetzen der ersten Komponente ergibt  $y^2(x^2 - y^4) = 0$  und damit  $y = 0$  oder  $x^2 = y^4$ . Jede dieser Bedingungen macht auch die zweite Komponente zu Null. Kritische Stellen liegen also bei  $y = 0$ , bei  $x = y^2$  und bei  $x = -y^2$ .

Für  $x > 0$  gilt  $f(x, y) \geq 0$  und für  $x < 0$  gilt  $f(x, y) \leq 0$ . Also liegen an den Stellen mit  $y = 0, x > 0$  lokale Minima vor; an den Stellen mit  $y = 0, x < 0$  lokale Maxima, da der Funktionswert an diesen Stellen 0 ist. An den Stellen mit  $x = 0 \neq y$  ergeben sich Sattelpunkte, da der Funktionswert an diesen Stellen 0 beträgt und sich in jeder Umgebung eines solchen Punktes Punkte mit negativen und Punkte mit positivem Funktionswert finden lassen.

Weiterhin gilt

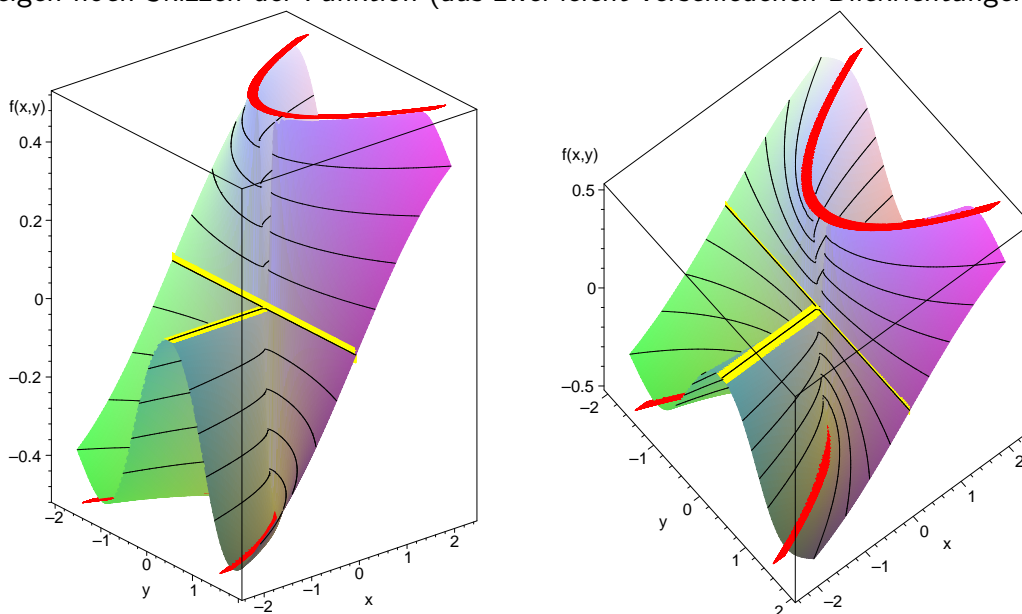
$$\begin{aligned} & (x + y^2)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & x^2 + 2xy^2 + y^4 \geq 0 \\ \Rightarrow & x^2 + y^4 \geq -2xy^2 \\ \Rightarrow & -\frac{1}{2} \leq \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = f\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (x - y^2)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 2xy^2 + y^4 \geq 0 \\ \Rightarrow & x^2 + y^4 \geq 2xy^2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \geq \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = f\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Da die Funktion an allen Punkten  $(x, y) \in D$  mit  $x = y^2$  den Wert  $\frac{1}{2}$  annimmt, befinden sich an diesen Stellen (globale) Maxima. Da die Funktion an allen Punkten  $(x, y) \in D$  mit  $x = -y^2$  den Wert  $-\frac{1}{2}$  annimmt, befinden sich an diesen Stellen (globale) Minima.

Wir zeigen noch Skizzen der Funktion (aus zwei leicht verschiedenen Blickrichtungen):



Gelb sind die Achsen markiert, rot die Maxima und Minima. Beachten Sie den „Schlitz“ entlang der vertikalen Achse! Die gelben Linien zeigen auch, dass die partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$  existieren; die Funktionen  $f_x$  und  $f_y$  sind aber nicht stetig bei  $(0, 0)$ .

**Aufgabe H 86.** *Optimierung unter Nebenbedingungen*

Im  $\mathbb{R}^2$  sollen auf dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung  $n$  Punkte so verteilt werden, dass das von diesen Punkten gebildete  $n$ -Eck maximalen Flächeninhalt hat. Bestimmen Sie die Anordnung der Punkte, indem Sie ein Optimierungsproblem aufstellen und dieses lösen. *Hinweis:* Bilden Sie die Verbindungsgeraden von den Punkten zum Mittelpunkt des Kreises und untersuchen Sie die Winkel zwischen diesen Geraden.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir bezeichnen die Verbindungsstrecke von  $P_j$  zum Ursprung mit  $s_j$ . Die Winkel zwischen  $s_j$  und  $s_{j+1}$  bezeichnen wir für  $1 \leq j \leq n-1$  mit  $\vartheta_j$ , den Winkel zwischen  $s_n$  und  $s_1$  bezeichnen wir mit  $\vartheta_n$ . Wir betrachten 3 verschiedene Fälle:

- (a) Fall 1: Alle Winkel  $\vartheta_j$  sind kleiner als  $\pi$ . Der gesuchte Flächeninhalt des Polygons ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke, die durch zwei aufeinanderfolgende Punkte und den Mittelpunkt gebildet werden. Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen  $a$  und  $b$ , die einen Winkel  $\varphi$  einschließen, beträgt  $\frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin(\varphi)$ . Damit beträgt der zu maximierende Flächeninhalt des Polygons

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(\vartheta_j).$$

Die Winkel  $\vartheta_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  müssen die Nebenbedingung  $\sum_{j=1}^n \vartheta_j = 2\pi$  erfüllen. Die Methode von Lagrange ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos(\vartheta_1) + \lambda \cdot 1 &= 0 \\ \frac{1}{2} \cos(\vartheta_2) + \lambda \cdot 1 &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} \cos(\vartheta_n) + \lambda \cdot 1 &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \vartheta_j &= 2\pi. \end{aligned}$$

Da keiner der auftretenden Winkel größer als  $\pi$  ist, ergibt sich hieraus

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_n$$

und somit  $\vartheta_j = \frac{2\pi}{n}$  für alle  $j$ .

Der gesamte Flächeninhalt des  $n$ -Ecks beträgt dann  $F_{n,\text{Max}} = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ .

- (b) Fall 2: Einer der Winkel  $\vartheta_j$  ist größer als  $\pi$  und  $n = 3$ . In diesem Fall ist der Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks kleiner als 1. Der in Fall 1 berechnete maximale Inhalt ist  $F_{3,\text{Max}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{27}{16}} > 1$  und damit größer als der entstehende Inhalt.
- (c) Fall 3: Einer der Winkel  $\vartheta_j$  ist größer als  $\pi$  und  $n > 3$ . In diesem Fall ist das Polygon vollständig in einem Halbkreis enthalten, und seine Fläche wird deswegen kleiner als  $\frac{\pi}{2}$ . Der Flächeninhalt des in Fall 1 berechneten Polygons ist  $F_{n,\text{Max}} \geq F_{4,\text{Max}} = 2 > \frac{\pi}{2}$ . Also wird im vorliegenden Fall der maximale Flächeninhalt nicht erreicht.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 87. Gradientenfeld

Gegeben sei das Vektorfeld  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$(x, y, z)^T \mapsto \left( \frac{7y + 2xz + 6x^2y^3 + \alpha x^3y^2z}{1 + x^2y^2}, \frac{7x - \alpha y + 6x^3y^2 - 2x^2y^3}{1 + x^2y^2}, \frac{\alpha}{2} + x^2 \right)^T,$$

mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Für welche  $\alpha$  ist  $g$  ein Gradientenfeld?

**Lösungshinweise hierzu:** Damit  $g$  ein Gradientenfeld ist, muss die Rotation Null sein.

Die Rotation ist definiert als

$$\text{rot } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_y f_3(x, y, z) - \partial_z f_2(x, y, z) \\ \partial_z f_1(x, y, z) - \partial_x f_3(x, y, z) \\ \partial_x f_2(x, y, z) - \partial_y f_1(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Berechne die einzelnen partiellen Ableitungen der Einträge, die benötigt werden.

$$\partial_y \frac{\alpha}{2} + x^2 = 0, \quad \partial_z \frac{7x - \alpha y + 6x^3y^2 - 2x^2y^3}{1 + x^2y^2} = 0$$

$$\partial_z \frac{7y + 2xz + 6x^2y^3 + \alpha x^3y^2z}{1 + x^2y^2} = \frac{2x + \alpha x^3y^2}{1 + x^2y^2}, \quad \partial_x \frac{\alpha}{2} + x^2 = 2x = \frac{2x + 2x^3y^2}{1 + x^2y^2}$$

$$\partial_x \frac{7x - \alpha y + 6x^3y^2 - 2x^2y^3}{1 + x^2y^2} = \frac{6x^4y^4 + 11x^2y^2 + 2(\alpha - 2)xy^3 + 7}{(1 + x^2y^2)^2},$$

$$\partial_y \frac{7y + 2xz + 6x^2y^3 + \alpha x^3y^2z}{1 + x^2y^2} = \frac{6x^4y^4 + 2(\alpha - 2)x^3yz + 11x^2y^2 + 7}{(1 + x^2y^2)^2}$$

Beachte, dass  $\mathbb{R}^3$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Die Rotation ist genau dann Null, wenn  $\alpha = 2$  gilt.

### Aufgabe H 88. Jacobimatrix, Kugelkoordinaten

Gegeben sei  $f: D \rightarrow f(D) \subseteq \mathbb{R}^3: (r, \alpha, \beta)^T \mapsto (r \cos(\alpha) \cos(\beta), r \cos(\alpha) \sin(\beta), r \sin(\alpha))^T$ .

Wählen Sie eine möglichst große offene Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  so, dass  $f$  injektiv ist.

Berechnen Sie die Jacobimatrix von  $f$ . Berechnen Sie außerdem die Determinante der Jacobimatrix der Umkehrfunktion von  $f$  an der Stelle  $(x, y, z)^T = (1, 1, 1)^T$ .

**Lösungshinweise hierzu:** Der Punkt  $(0, \alpha, \beta)^T$  wird auf  $(0, 0, 0)^T$  abgebildet,  $f$  ist also hier nicht injektiv. Weiter ist  $f$  in den Punkten  $(r, \pm \frac{\pi}{2}, \beta)^T$  nicht injektiv, denn diese werden abgebildet auf  $(0, 0, \pm r)^T$ .

Sei  $(a, b, c)$  ein Punkt im  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ , dann existiert  $(r, \alpha, \beta)$ , sodass  $f(r, \alpha, \beta) = (a, b, c)$ . Denn

- $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$
- man kann  $(r \cos \alpha, \beta)$  als Polarkoordinaten der  $(x, y)$ -Ebene betrachten
- $r \sin \alpha$  gibt die Höhe an



Ebenso ist klar, dass  $r > 0$  sein soll um Injektivität zu erhalten.

Ein sinnvoller Definitionsbereich wäre nach obigem  $\tilde{D} = \{(r, \alpha, \beta) \mid r > 0, \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \beta \in [0, 2\pi)\}$ .

Dieser ist aber nicht offen, wie in der Aufgabe gefordert. Wir nehmen die größte offene Menge

$D$ , die in  $\tilde{D}$  enthalten ist. Es ergibt sich somit  $D = \{(r, \alpha, \beta) \mid r > 0, \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \beta \in (0, 2\pi)\}$ ,

und der zugehörige Wertebereich ist

$$f(D) = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}^+\}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}\}.$$

Berechne nun die Jacobimatrix. Die Ableitungen sind:

$$\partial_r f_1(r, \alpha, \beta) = \cos \alpha \cos \beta, \quad \partial_\alpha f_1(r, \alpha, \beta) = -r \sin \alpha \cos \beta, \quad \partial_\beta f_1(r, \alpha, \beta) = -r \cos \alpha \sin \beta$$

$$\partial_r f_2(r, \alpha, \beta) = \cos \alpha \sin \beta, \quad \partial_\alpha f_2(r, \alpha, \beta) = -r \sin \alpha \sin \beta, \quad \partial_\beta f_2(r, \alpha, \beta) = r \cos \alpha \cos \beta$$

$$\partial_r f_3(r, \alpha, \beta) = \sin \alpha, \quad \partial_\alpha f_3(r, \alpha, \beta) = r \cos \alpha, \quad \partial_\beta f_3(r, \alpha, \beta) = 0$$

Es ergibt sich hieraus:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -r \sin \alpha \cos \beta & -r \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \beta & -r \sin \alpha \sin \beta & r \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Den Bildpunkt  $(1, 1, 1)^\top$  erreicht man durch den Urbildpunkt  $(\sqrt{3}, \arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{\pi}{4})^\top$ . Berechne nun die Determinante der Jacobimatrix von  $f$ .

Es ist

$$\begin{aligned} \det J f(r, \alpha, \beta) &= -r^2 (\cos \beta)^2 (\sin \alpha)^2 \cos \alpha - r^2 (\cos \alpha)^3 (\sin \beta)^2 \\ &\quad - r^2 (\sin \alpha)^2 (\sin \beta)^2 \cos \alpha - r^2 (\cos \alpha)^3 (\cos \beta)^2 \\ &= r^2 (\cos \alpha)^3 - r^2 (\sin \alpha)^2 \cos \alpha \\ &= -r^2 \cos \alpha \end{aligned}$$

und werte dies an  $(\sqrt{3}, \arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{\pi}{4})^\top$  aus, es ergibt sich

$$\begin{aligned} \det J f(\sqrt{3}, \arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{\pi}{4}) &\stackrel{\cos(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}})) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{=} -3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= -\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass die Jacobimatrix der Umkehrfunktion von  $f$  die Inverse zur Jacobimatrix von  $f$  ist, weiter wissen wir, dass die Determinante einer Inverse zu einer Matrix gerade der Kehrwert der Determinante der Matrix ist. Somit hat die Determinante der Jacobimatrix der Umkehrfunktion von  $f$  den Wert  $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ .

### Aufgabe H 89. Divergenz, Rotation, Potential

Berechnen Sie die Divergenz, die Rotation und, falls möglich, das Potential folgender Vektorfelder.

(a)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z)^\top \mapsto (x^2, y^2, -z^2)^\top$

(b)  $f: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z)^\top \mapsto (yx^{y-1} \sin(z), x^y \ln(x) \sin(z), x^y \cos(z))^\top$

$$(c) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y)^\top \mapsto (\exp(xy), \cos(xy))^\top$$

$$(d) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z)^\top \mapsto \left( \frac{x}{y^2+1}, \frac{y}{z^2+1}, \frac{z}{x^2+1} \right)^\top$$

**Lösungshinweise hierzu:**

$$(a) \operatorname{div} f = \partial_x x^2 + \partial_y y^2 + \partial_z (-z^2) = 2x + 2y - 2z$$

$$\operatorname{rot} f = (\partial_y(-z^2) - \partial_z y^2, \partial_z x^2 - \partial_x(-z^2), \partial_x y^2 - \partial_y x^2)^\top = (0, 0, 0)^\top$$

Die Rotation ist Null und  $\mathbb{R}^3$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, also existiert ein Potential  $U$ .

$$\text{Betrachte } U(x, y, z) = \int U_x(x, y, z) dx = \frac{x^3}{3} + c(y, z),$$

$$U_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} c(y, z) = y^2 \Rightarrow c(y, z) = \frac{y^3}{3} + k(z),$$

$$U_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} c(y, z) = -z^2 \Rightarrow c(y, z) = -\frac{z^3}{3} + \tilde{k}(y), \text{ also insgesamt}$$

$$U(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 - z^3}{3} + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}. \text{ Probe bestätigt Ergebnis.}$$

$$(b) \operatorname{div} f = \partial_x y x^{y-1} \sin(z) + \partial_y x^y \ln(x) \sin(z) + \partial_z x^y \cos(z)$$

$$= y(y-1)x^{y-2} \sin(z) + x^y (\ln(x))^2 \sin(z) - x^y \sin(z)$$

$$= x^{y-2} \sin(z) (y(y-1) + x^2 (\ln(x))^2 - x^2)$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_y x^y \cos(z) - \partial_z x^y \ln(x) \sin(z) \\ \partial_z y x^{y-1} \sin(z) - \partial_x x^y \cos(z) \\ \partial_x x^y \ln(x) \sin(z) - \partial_y y x^{y-1} \sin(z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^y \ln(x) \cos(z) - x^y \ln(x) \cos(z) \\ y x^{y-1} \cos(z) - y x^{y-1} \cos(z) \\ \sin(z) (y x^{y-1} \ln(x) + x^y \frac{1}{x} - x^{y-1} - y x^{y-1} \ln(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Rotation ist Null und  $\mathbb{R}_+^3$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, also existiert ein Potential  $U$ .

$$\text{Betrachte } U(x, y, z) = \int U_x(x, y, z) dx = x^y \sin(z) + c(y, z),$$

$$U_y(x, y, z) = x^y \ln(x) \sin(z) + \frac{\partial}{\partial y} c(y, z) \stackrel{!}{=} f_2 = x^y \ln(x) \sin(z) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} c(y, z) = 0,$$

$$U_z(x, y, z) = x^y \cos(z) + \frac{\partial}{\partial z} c(y, z) \stackrel{!}{=} f_3 = x^y \cos(z) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} c(y, z) = 0$$

also insgesamt  $U(x, y, z) = x^y \sin(z) + k$  mit  $k \in \mathbb{R}$ . Probe bestätigt das Ergebnis.

$$(c) \operatorname{div} f = \partial_x \exp(xy) + \partial_y \cos(xy) = y \exp(xy) - x \sin(xy)$$

$$\operatorname{rot} f = \partial_x \cos(xy) - \partial_y \exp(xy) = -y \sin(xy) - x \exp(xy) \text{ (vgl. 5.2.3.)}$$

$$(d) \operatorname{div} f = \partial_x \frac{x}{y^2+1} + \partial_y \frac{y}{z^2+1} + \partial_z \frac{z}{x^2+1} = \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\operatorname{rot} f = \left( \partial_y \frac{z}{x^2+1} - \partial_z \frac{y}{z^2+1}, \partial_z \frac{x}{y^2+1} - \partial_x \frac{z}{x^2+1}, \partial_x \frac{y}{z^2+1} - \partial_y \frac{x}{y^2+1} \right)^\top$$

$$= \left( \frac{2yz}{(z^2+1)^2}, \frac{2xz}{(x^2+1)^2}, \frac{2xy}{(y^2+1)^2} \right)^\top$$

**Aufgabe H 90.** geometrische Bedeutung des Gradienten

Gegeben sei eine Wendelfläche als Graph der Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^\top \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

wobei  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > 0\}$ . Ein Wassertropfen kriecht, bedingt durch die Schwerkraft, auf dieser Wendelfläche in einer Bahn mit konstantem Abstand zur  $z$ -Achse. Die Schwerkraft sei in Richtung  $(0, 0, -1)^T$  gerichtet.

Um die Bahn des Tropfen nachzuvollziehen, betrachten Sie eine Kurve in  $D$ , die durch  $u: (0, \pi) \rightarrow D: t \mapsto (\sin(t), \cos(t))$  gegeben ist, und bilden diese Kurve unter  $f$  ab. Berechnen Sie den Gradienten von  $f$  und werten diesen an der Stelle  $u(t)$  aus. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit  $\dot{u}(t) = \frac{d}{dt}u(t)$ . Berechnen Sie  $\dot{c}(t) = \frac{d}{dt}(\sin(t), \cos(t), f(u(t)))$ . Dies ist die Tangente der Kurve, die der Tropfen auf dem Graphen beschreibt.

**Lösungshinweise hierzu:** Berechne zuerst den Gradienten von  $f$ . Es ist  $\text{grad } f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)^T$ . Werte dies nun an der Stelle  $u(t)$  aus,

es ist  $\text{grad } f(u(t)) = \frac{1}{(\sin(t))^2+(\cos(t))^2}(-\cos(t), \sin(t))^T$ .

Berechne nun  $\dot{u}(t) = \frac{d}{dt}(\sin(t), \cos(t))^T = (\cos(t), -\sin(t))^T$ , dies ist gerade das Negative des Gradienten von  $f$ .

Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges, also wird Tropfen in die entgegengesetzte Richtung kriechen.

Berechne  $\frac{d}{dt}f(u(t)) = \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right) = \frac{1}{\frac{(\cos(t))^2}{(\sin(t))^2}+1} \frac{-\sin(t) \sin(t) - \cos(t) \cos(t)}{(\sin(t))^2} = -1$ , hiermit

ist  $\dot{c}(t) = (\cos(t), -\sin(t), -1)^T$ .

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

### Aufgabe H 91. Längenberechnung und Kurvenintegrale skalarer Funktionen

Gegeben sei die skalare Funktion

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto \frac{2y}{x} + 1$$

und die Kurve

$$C: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \left(2t, t^2, \frac{1}{3}t^3\right)^T.$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale  $\int_C f(s) \, ds$  und  $\int_C 1 \, ds$ . Begründen Sie mittels einer Abschätzung der Integranden, welcher Integralwert der größere von beiden ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir berechnen zuerst das Kurvenintegral

$$\int_C 1 \, ds.$$

Nach Vorlesung gilt

$$\int_C 1 \, ds = \int_1^3 1 \cdot |C'(t)| \, dt.$$

Dies ist gerade die Länge der Kurve. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_C 1 \, ds &= \int_1^3 |C'(t)| \, dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2} \, dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{(2+t^2)^2} \, dt \\ &= \int_1^3 (2+t^2) \, dt \\ &= \left[2t + \frac{t^3}{3}\right]_1^3 = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun das andere Kurvenintegral

$$\begin{aligned}
 \int_C f(s) \, ds &= \int_1^3 f(C(t)) \cdot |C'(t)| \, dt \\
 &= \int_1^3 \left( \frac{2t^2}{2t} + 1 \right) (2 + t^2) \, dt \\
 &= \int_1^3 (t + 1) (2 + t^2) \, dt \\
 &= \left[ t^2 + \frac{t^4}{4} + 2t + \frac{t^3}{3} \right]_1^3 \\
 &= \frac{122}{3}.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass

$$\int_C 1 \, ds < \int_C f(s) \, ds$$

ist. Es gilt

$$\int_C 1 \, ds = \int_1^3 1 \cdot (2 + t^2) \, dt.$$

Es gilt:  $1 < 1 + t$  für alle  $t \in [1, 3]$ . Somit erhalten wir mit Hilfe des ersten Teils

$$\begin{aligned}
 \int_C 1 \, ds &= \int_1^3 1 \cdot (2 + t^2) \, dt \\
 &< \int_1^3 (1 + t) \cdot (2 + t^2) \, dt \\
 &= \int_C f(s) \, ds.
 \end{aligned}$$

Explizit ist natürlich  $\frac{38}{3} < \frac{122}{3}$ .

### Aufgabe H 92. Kurvendiskussion

Gegeben sei die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)^\top.$$

- (a) Man bestimme die Tangente an  $C$  in  $C(1)$ . Man bestimme alle Punkte auf  $C$  mit Tangente in Richtung einer der Koordinatenachsen. Skizze!
- (b) Es sei  $S$  die Strecke mit den Endpunkten  $A = (0, 0)$  und  $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ . Man bestimme den Flächeninhalt der durch  $C$  und  $S$  eingeschlossenen Fläche.  
*Hinweis:* Man kann  $dy = y'(t) dt$  verwenden.

**Lösungshinweise hierzu:**

- (a) Die Ableitung

$$C'(t) = \left( \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \right)^T$$

hat an  $t = 1$  den Wert  $C'(1) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)^T$ .

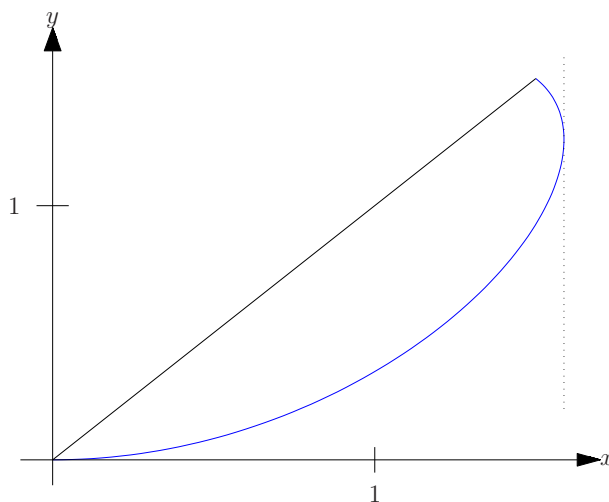
Damit hat die Tangente im Punkt  $C(1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$  die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

wodurch sich z.B. durch Addition der Komponentengleichungen die Gleichungsdarstellung  $x + y = 3$  ergibt.

Die Tangenten verlaufen in Richtung einer Koordinatenachse, wenn die Ableitung (nur) in einer Komponente verschwindet. Dies gilt bei  $t = \sqrt[3]{1/2}$  für die erste Komponente und bei  $t = 0$  für die zweite Komponente. (Die zweite Nullstelle  $t = \sqrt[3]{2}$  ist außerhalb des Parameterbereichs.)

Die Kurve hat also an  $C(0) = (0, 0)^T$  eine waagerechte und an  $C(\sqrt[3]{1/2}) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})^T$  eine senkrechte Tangente.



- (b) Aus der Skizze ist ersichtlich, dass die Kurve als Graph einer Funktion  $y \mapsto x(y)$  aufgefasst werden kann und damit die gesuchte Fläche dem Integral

$$F = \int_0^{3/2} x(y) - y \, dy$$

entspricht.

Substituiert man mit (der zweiten Komponente) der Parametrisierung der Kurve ergibt sich

$$F = \int_0^1 (x(y(t)) - y(t))y'(t) dt$$

wobei  $x(y(t)) = x(t)$  der (ersten Komponente der) Parametrisierung entspricht.

Es ist also

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \left( \frac{3t}{1+t^3} - \frac{3t^2}{1+t^3} \right) \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{9t^2(1-t)(2-t^3)}{(1+t^3)^3} dt \end{aligned}$$

und die Integration mit Partialbruchzerlegung ( $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$ ) ergibt  $F = 3/4$ .

### Aufgabe H 93. Potential, Kurvenintegral

Gegeben sei das Gradientenfeld  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y)^T \mapsto (2x + y, x + 1)^T$ .

- Bestimmen Sie ein Potential für  $g$ . Entscheiden Sie, ob dieses Potential eine harmonische Funktion ist.
- Berechnen Sie das Kurvenintegral von  $g$  über den Halbkreis von  $(0, -1)^T$  nach  $(0, 1)^T$  mit Radius 1 durch  $(1, 0)^T$  ohne das Potential zu verwenden.
- Berechnen Sie das Kurvenintegral von  $g$  über die Strecke von  $(0, -1)^T$  nach  $(0, 1)^T$  ohne das Potential zu verwenden.
- Bestätigen Sie die Resultate aus (b) und (c) mit Hilfe des Potentials.

### Lösungshinweise hierzu:

- Wir berechnen ein Potential  $U(x, y)$  von  $g$ :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int 2x + y dx = x^2 + xy + c(y) \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) &= x + \frac{\partial}{\partial y} c(y) \stackrel{!}{=} g_2(x, y) = x + 1 \\ \Rightarrow c(y) &= y + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Somit ist  $U(x, y) = x^2 + xy + y$  ein Potential von  $g$ . Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

Wir überprüfe nun, ob  $U$  eine harmonische Funktion ist, also ob  $\Delta U(x, y) = 0$  gilt.

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) = 2 + 0 = 2 \neq 0$$

d.h.  $U$  ist keine harmonische Funktion.

(b) Wir parametrisieren die Kurve durch

$$C: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\sin(t), \cos(t))^T.$$

Somit nimmt das Kurvenintegral folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(C(t)) \bullet C'(t) dt &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 2 \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^\pi 2 \sin(t) \cos(t) - (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 + \sin(t) dt \\ &= \left[ (\sin(t))^2 + t + \sin(t) \cos(t) - t - \cos(t) \right]_0^\pi = 2 \end{aligned}$$

(c) Wir parametrisieren die Kurve durch  $C: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (0, -1 + t)^T$ . Somit nimmt das Kurvenintegral folgenden Wert an.

$$\int_0^2 \begin{pmatrix} -1 + t \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 1 dt = 2$$

(d) Wir verwenden nun das Potential. Wenn ein Potential existiert, dann ist das Integral wegunabhängig. In (a) haben wir ein Potential berechnet, mittels diesem überprüfen wir nun die Rechnungen aus (b) und (c).

Sei  $K$  eine Kurve mit dem Anfangspunkt  $(0, -1)^T$  und dem Endpunkt  $(0, 1)^T$ , dann gilt

$$\int_K g(x) \bullet dx = U(0, -1) - U(0, 1) = 2$$

#### Aufgabe H 94. Kurvenintegral, Potential

(a) Es sei das Vektorfeld  $v$  gegeben durch

$$v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2x_3^2 + 1 \\ 2x_1^2x_2x_3^2 + 1 \\ 2x_1^2x_2^2x_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein Potential von  $v$  an, falls ein solches existiert.

(b) Ferner sei ein Weg in  $\mathbb{R}^3$  gegeben

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} e^t + t^2 \\ t^2 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int_C v(x) \bullet dx$ .

*Hinweis:* Benutzen Sie das Potential.



(c) Es sei das Vektorfeld  $w$  gegeben durch

$$w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2x_3^2 + 1 + x_2 \\ 2x_1^2x_2x_3^2 + 1 \\ 2x_1^2x_2^2x_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Sei  $K$  die durch  $C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$  parametrisierte Kurve. Skizzieren Sie  $K$ . Bestimmen Sie das Umlaufintegral  $\oint_K w(x) \bullet dx$ .

*Hinweis:* Vergleichen Sie  $w$  und  $v$ .

**Lösungshinweise hierzu:**

(a) Die Jacobimatrix von  $v$

$$Jv(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_2^2x_3^2 & 4x_1x_2x_3^2 & 4x_1x_2^2x_3 \\ 4x_1x_2x_3^2 & 2x_1^2x_3^2 & 4x_1^2x_2x_3 \\ 4x_1x_2^2x_3 & 4x_1^2x_2x_3 & 2x_1^2x_2^2 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und das Definitionsgebiet  $\mathbb{R}^3$  ist einfach zusammenhängend. Es existiert also ein Potential.

Für das Potential  $U(x_1, x_2, x_3)$  gilt

$$U(x_1, x_2, x_3) = \int v_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1 + c(x_2, x_3).$$

Da die partielle Ableitung von  $U$  nach  $x_2$  der zweiten Komponente von  $v$  entsprechen muss ist

$$\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_2x_3^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} c(x_2, x_3) \stackrel{!}{=} 2x_1^2x_2x_3^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} c(x_2, x_3) = 1$$

und damit

$$c(x_2, x_3) = \int 1 dx_2 = x_2 + \tilde{c}(x_3)$$

also

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1 + x_2 + \tilde{c}(x_3).$$

Die partielle Ableitung von  $U$  nach  $x_3$  muss der dritten Komponente von  $v$  entsprechen, daher ist

$$\frac{\partial}{\partial x_3} U(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_2^2x_3 + \tilde{c}'(x_3) \stackrel{!}{=} 2x_1^2x_2^2x_3 + 1 \Rightarrow \tilde{c}'(x_3) = 1 \Rightarrow \tilde{c}(x_3) = x_3 + \tilde{\tilde{c}}$$

und damit ein Potential ( $\tilde{\tilde{c}} = 0$ ):

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3.$$

- (b) Da  $v$  ein Potential besitzt, kann das Wegintegral über die Potentialdifferenz am Endpunkt und am Anfangspunkt des Wegs bestimmt werden.

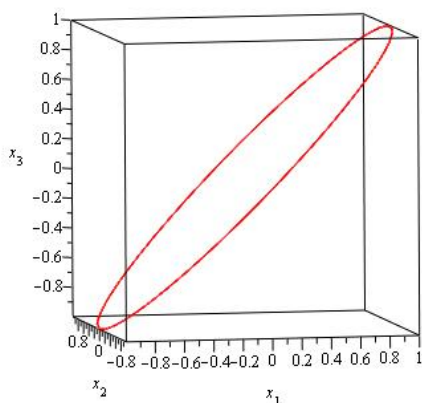
Der Endpunkt ist  $C(1) = (e^1 + 1, 1, 2)^T$ .

Der Anfangspunkt ist  $C(0) = (1, 0, 1)^T$ .

Der Wert des Kurvenintegrals ist damit

$$U(e+1, 1, 2) - U(1, 0, 1) = 4(e+1)^2 + e+1+1+2 - 0 - 1 - 0 - 1 = 4e^2 + 9e + 6.$$

- (c) Die Kurve  $K$  ist eine Ellipse, die als Schnitt des Zylinders mit der Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  und der Ebene mit der Gleichung  $x_1 = x_3$  entsteht.



Das Vektorfeld  $w$  unterscheidet sich von  $v$  nur in der ersten Komponente um einen Summanden  $x_2$ .

Das Kurvenintegral kann also aufgeteilt werden:

$$\oint_K w(x) \bullet dx = \oint_K v(x) \bullet dx + \oint_K \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet dx$$

Das erste Integral verschwindet, da  $v$  ein Potential besitzt. Das zweite Integral berechnet sich zu

$$\oint_K \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt = - \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 dt = -\pi.$$

### Aufgabe H 95. Zirkulation und Ausfluss

Gegeben sind die Geschwindigkeitsfelder einer Strömung

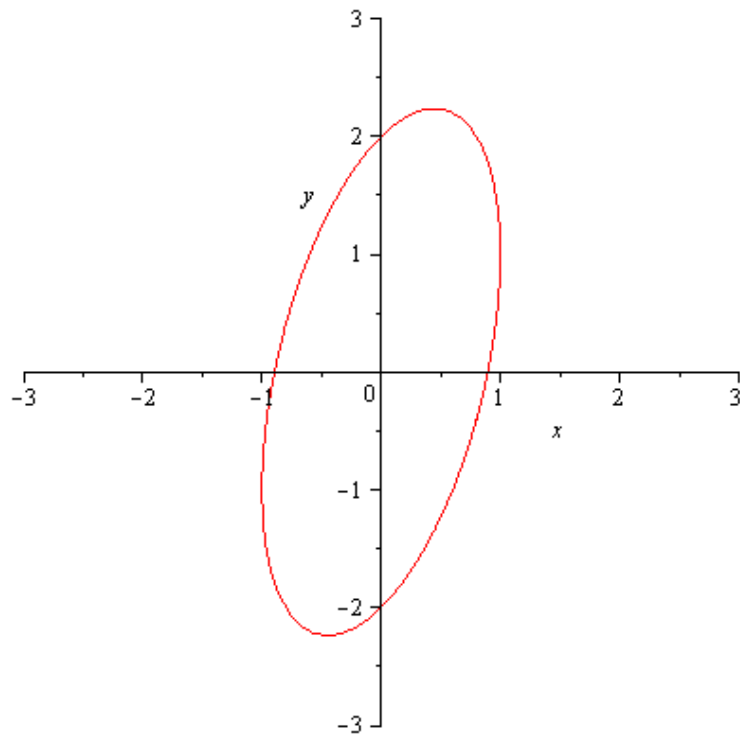
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ und } g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -u \end{pmatrix}.$$

Sei  $E$  die durch  $C: [0, 2\pi]: t \rightarrow (\sin(t), \sin(t) + 2 \cos(t))$  parametrisierte Kurve. Skizzieren Sie die Kurve.

- (a) Bestimmen Sie die Zirkulation von  $f$  und von  $g$  längs  $E$ .
- (b) Bestimmen Sie den Ausfluss von  $f$  und von  $g$  durch  $E$ .
- (c) Geben Sie eine Gleichung an, die  $E$  als Quadrik beschreibt.

**Lösungshinweise hierzu:**

Skizze:



Es gilt  $C'(t) = (\cos(t), \cos(t) - 2 \sin(t))^T$ .

**(a)**

$$\begin{aligned}
Z(f, E) &= \int_0^{2\pi} f(C(t)) \cdot C'(t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) + 2\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - 2\sin(t) \end{pmatrix} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -2\sin(t)\cos(t) + 2(\cos(t))^2 - 2(\sin(t))^2 \, dt \\
&= \left[ \sin(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(g, E) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - 2\sin(t) \end{pmatrix} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin(t)\cos(t) + 2(\sin(t))^2 \, dt \\
&= \left[ \frac{1}{2}(2t - \sin(2t) + (\cos(t))^2) \right]_0^{2\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

**(b)**

$$\begin{aligned}
A(f, E) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) + 2\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -2 \, dt = -4\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(g, E) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) \, dt \\
&= \left[ -\frac{1}{2}(\cos(t))^2 \right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

**(c)** Es gilt  $(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$  für alle  $t$ . $E$  ist gegeben durch

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sin(t) \wedge y = \sin(t) + 2\cos(t) \wedge t \in [0, 2\pi]\}.$$

Wir schreiben  $\cos(t)$  als  $\sqrt{1-x^2}$  und erhalten

$$y = x + 2\sqrt{1-x^2}.$$

Wir formen diese Gleichung folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
y = x + 2\sqrt{1-x^2} &\Leftrightarrow y - x = 2\sqrt{1-x^2} \\
&\Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 = 4 - 4x^2 \\
&\Leftrightarrow y^2 - 2xy + 5x^2 = 4.
\end{aligned}$$

Dies lässt sich auch so darstellen:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0,$$

dies ist die Gleichung einer Quadrik.

**Aufgabe H 96.** *Parametrisierung, Extremstellen*

Sei  $g$  die Gerade im  $\mathbb{R}^3$  durch die Punkte  $(0, 0, 0)$  und  $(1, 1, 1)$ . Sei  $h$  die Gerade durch die Punkte  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$ .

- (a) Bestimmen Sie Punkte  $P$  auf  $g$  und  $Q$  auf  $h$  derart, dass die Gerade durch  $P$  und  $Q$  senkrecht auf  $g$  und  $h$  steht. Berechnen Sie den Abstand von  $P$  und  $Q$ .
- (b) Parametrisieren Sie die Geraden  $g$  und  $h$ . Berechnen Sie den minimalen Abstand eines Punktes von  $g$  von einem Punkt von  $h$  unter Verwendung des Gradienten des Quadrats der Abstandsfunktion. Vergleichen Sie mit dem Resultat aus (a).

**Lösungshinweise hierzu:**

- (a) Da der Punkt  $P$  auf  $g$  liegt, hat sein Ortsvektor die Form  $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ . Da der

Punkt  $Q$  auf  $h$  liegt, hat sein Ortsvektor die Form  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Der Verbindungs-

vektor  $v = \vec{QP}$  ist demnach  $v = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - r - t \\ r - t \end{pmatrix}$ . Wir berechnen die Skalarprodukte

von  $v$  mit den Richtungsvektoren der Geraden  $g$  und  $h$  und verlangen, dass beide 0 sind. Das ergibt die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -t + 1 - r - t + r - t &= 0 \\ -1 + r + t + r - t &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir  $t = \frac{1}{3}$  und  $r = \frac{1}{2}$ . Also ist  $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  und  $Q = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Der Abstand beträgt  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ .

- (b) Wir Parametrisieren die Geraden wie oben mit

$$g = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid p = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$h = \left\{ q \in \mathbb{R}^3 \mid q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das zu minimierende Quadrat des Abstands beträgt also

$$(d(p, q))^2 = (t - 0)^2 + (t - (1 - r))^2 + (t - r)^2.$$

Nullsetzen des Gradienten in den Variablen  $t$  und  $r$  ergibt die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2t + (2(t - 1 + r) + 2(t - r)) &= 0 \\ 2(t - 1 + r) - 2(t - r) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir wie oben  $t = \frac{1}{3}$  und  $r = \frac{1}{2}$ . Dies ist ein Minimum der Funktion  $(d(p, q))^2$ , da diese ein nach oben geöffnetes Paraboloid beschreibt. Da die Wurzelfunktion monoton ist, nehmen  $d(p, q)$  und  $(d(p, q))^2$  ihr Minimum an der selben Stelle an. Die beiden Punkte sind also  $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  und  $Q = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Der minimale Abstand beträgt  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ .