D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

15. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2014

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 46. *Konvergenz und Werte von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie ihren Wert an, falls er existiert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{3^{2k+1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{3^k}{7^{k/2}(2k+3)}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{3}{(3k+1)(3k+7)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{3^{2k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^k$$

Konvergent als geometrische Reihe mit $q = 7/9 < 1$ und Reihenwert

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-7/9} = \frac{3}{2}$$

(b)

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{3^k}{7^{k/2}(2k+3)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{9}{7}\right)^{k/2}}_{>7/9} \frac{1}{2k+3} \geqq \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \geqq \frac{7}{18}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Bestimmt divergent gegen $+\infty$ mit harmonischer Reihe als Minorante.

(c) Der Ansatz $\frac{3}{(3k+1)(3k+7)} = \frac{A}{3k+1} + \frac{B}{3k+7}$ führt auf

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{3}{(3k+1)(3k+7)} = \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+2)+1}\right).$$

Betrachtet man nun die Partialsummenfolge

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+2)+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{16} - \frac{1}{22} + \frac{1}{19} - \cdots - \frac{1}{3(n+1)+1} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3(n+2)+1}\right) \end{aligned}$$

heben sich alle Terme bis auf die ersten beiden positiven und die letzten beiden negativen auf, und der Grenzübergang liefert als Reihenwert $(1/13 + 1/16)/2 = 29/416$.

Aufgabe H 47. *Parameterabhängige Reihe*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^j - j!}{|a|^j \cdot j!}$$

in Abhängigkeit von dem Parameter $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lösungshinweise hierzu: Für $a > 0$ ist $|a| = a$ und somit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^j - j!}{|a|^j \cdot j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^j - j!}{a^j \cdot j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{j!} - \frac{1}{a^j} \right].$$

Für $a < 0$ gilt $|a| = -a$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^j - j!}{|a|^j \cdot j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^j - j!}{(-a)^j \cdot j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{j!} - \left(-\frac{1}{a}\right)^j \right].$$

In beiden Fällen ist der erste Teil absolut konvergent (Exponentialreihe).
Die Summe ist also wegen (1.9.3) genau dann konvergent, wenn dies für den zweiten Teil gilt. Dies ist jeweils eine geometrische Reihe, die genau für $|1/a| < 1$, also für $|a| > 1$ konvergiert.

Aufgabe H 48. *Stetigkeit*

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j \colon D_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x + |x|}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}, & x \neq 2 \\ -1, & x = 2 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subseteq \mathbb{R}$, für den die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_2.

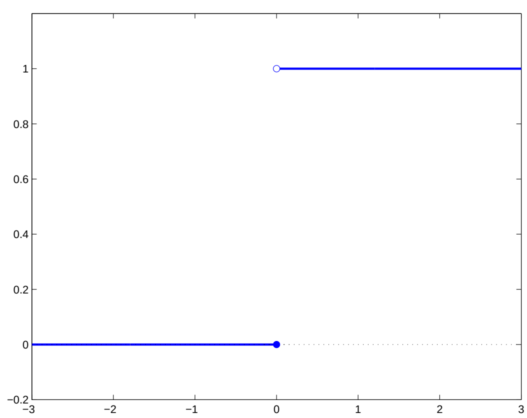
(b) Finden Sie zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subseteq U_\varepsilon(f_2(2))$.

(c) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_1(U_\delta(0) \cap D_1) \subseteq U_\varepsilon(f_1(0))$ gilt?

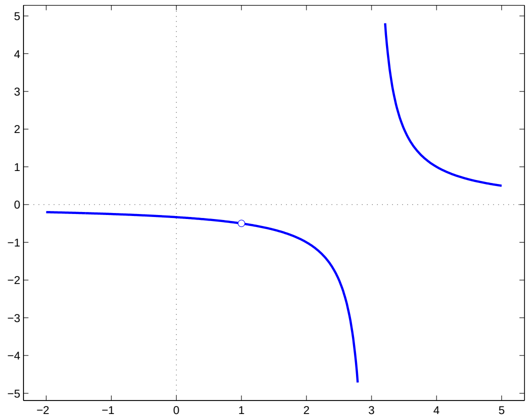
(d) Ist die Funktion f_1 stetig an der Stelle $x = 0$? Ist f_2 stetig an der Stelle $x = 2$?

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- Das Schaubild von f_1



- Das Schaubild von f_2



Die Funktion f_1 kann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden, d.h. $D_1 = \mathbb{R}$. Für f_2 formt man Zähler und Nenner um:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2), \qquad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3),$$

und da eine gesonderte Vorschrift für $x = 2$ existiert, ist der maximale Definitionsbereich $D_2 = \mathbb{R} \smallsetminus \{1, 3\}$. (Die Funktion ist an $x = 1$ zwar stetig fortsetzbar, aber dennoch nicht definiert.)

(b) $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(2))$ gilt, wenn für alle x-Werte, die weniger als δ von 2 entfernt liegen der Abstand des Bildes $f_2(x)$ von $f_2(2)$ kleiner ε ist.
Das δ muss also so klein gewählt werden, dass für jedes $x \in U_\delta(2) \cap D_2$ der Abstand $|f_2(x) - f_2(2)| < \varepsilon$ wird.
Es ist für $\delta < 1$ und $x \in U_\delta(2)$

$$|f_2(x) - f_2(2)| = \left| \frac{1}{x-3} - (-1) \right| = \left| \frac{x-2}{-(1-(x-2))} \right| < \frac{\delta}{1-\delta},$$

da $x - 2 \in (-\delta, \delta)$ auf $1 - (x-2) \in (1-\delta, 1+\delta)$ führt.
Das δ muss also so gewählt werden, dass $\frac{\delta}{1-\delta} \leqq \varepsilon$, d.h. $\delta \leqq \varepsilon/(1+\varepsilon) < 1$.

(c) Weil für alle $x > 0$

$$|f_1(x) - f_1(0)| = |f_1(x)| = 1$$

gilt, existiert zu $\varepsilon \in (0, 1]$ kein $\delta > 0$ mit $f_2(U_\delta(0) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(0))$.

(d) Die ε-δ-Definition der Stetigkeit liefert mit den vorigen beiden Aufgabenteilen:
Die Funktion f_1 ist nicht stetig an $x = 0$ und f_2 ist stetig an $x = 2$.

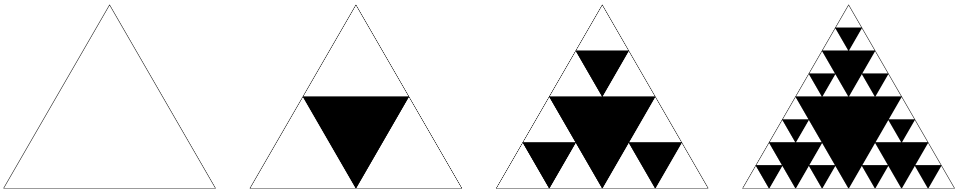
Aufgabe H 49. *Sierpiński-Dreieck*

Gegeben sei ein gleichseitiges weißes Dreieck der Seitenlänge 1 (Schritt 0). Die Verbindungsstrecken der Seitenmittelpunkte bilden ein kleineres Dreieck, das schwarz eingefärbt wird (Schritt 1). Wiederholt man diesen Vorgang für alle nun vorhandenen weißen Dreiecke, so erhält man die unten abgebildete Folge geometrischer Figuren.

(a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der im n-ten Schritt neu entstehenden schwarzen Dreiecke sowie die Seitenlänge und den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks.

(b) Geben Sie die Gesamtlänge L_n aller Seiten aller nach n Schritten vorhandenen schwarzen Dreiecke an und berechnen Sie den Grenzwert von L_n für $n \to \infty$.

(c) Geben Sie die Gesamtfläche A_n aller nach n Schritten vorhandenen schwarzen Dreiecke an und berechnen Sie den Grenzwert von A_n für $n \to \infty$.



Schritt 0 Schritt 1 Schritt 2 Schritt 3

Lösungshinweise hierzu: Wir benutzen die bekannten Formeln

$$\ell = 3s, \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s \qquad \text{und} \qquad a = \frac{1}{2}\,sh = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^2$$

für den Umfang ℓ, die Höhe h und den Flächeninhalt a eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge s. Zur Vereinfachung setzen wir $q := \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

(a) Pro Schritt entstehen aus jedem weißen Dreieck drei weiße und ein schwarzes Dreieck, jeweils mit halber Seitenlänge. Ausgehend von einem weißen Dreieck mit Seitenlänge 1 sind nach n Schritten insgesamt 3^n weiße Dreiecke mit Seitenlänge $(\frac{1}{2})^n$ vorhanden.

Die Anzahl m_n der im n–ten Schritt neu entstehenden schwarzen Dreiecke ist gleich der Zahl der nach dem $(n-1)$–ten Schritt insgesamt vorhandenen weißen Dreiecke, also $m_n = 3^{n-1}$. Die neuen schwarzen Dreiecke haben die Seitenlänge $s_n = (\frac{1}{2})^n$, und für ihren Umfang ℓ_n bzw. Flächeninhalt a_n ergibt sich

$$\ell_n = 3s_n = 3 \cdot (\tfrac{1}{2})^n \qquad \text{und} \qquad a_n = q s_n^2 = q \cdot (\tfrac{1}{2})^{2n} = q \cdot (\tfrac{1}{4})^n.$$

(b) L_n ist die Summe der Umfänge aller vom ersten bis zum n–ten Schritt entstandenen schwarzen Dreiecke, d. h.

$$L_n = m_1 \cdot \ell_1 + m_2 \cdot \ell_2 + \ldots + m_n \cdot \ell_n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \ell_j = \sum_{j=1}^{n} 3^{j-1} \cdot 3 \cdot (\tfrac{1}{2})^j = \sum_{j=1}^{n} (\tfrac{3}{2})^j.$$

Nach Lemma 1.9.1 konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \sum_{j=1}^{\infty} (\tfrac{3}{2})^j$$

nicht, da die Reihenglieder $(\frac{3}{2})^j$ keine Nullfolge bilden. Da alle Reihenglieder positiv sind, ist L_n bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(c) A_n ist die Summe der Flächeninhalte aller vom ersten bis zum n–ten Schritt entstandenen schwarzen Dreiecke, d. h.

$$A_n = m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + \ldots + m_n \cdot a_n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{n} 3^{j-1} \cdot q \cdot (\tfrac{1}{4})^j = \tfrac{q}{3} \sum_{j=1}^{n} (\tfrac{3}{4})^j .$$

Wegen $|\frac{3}{4}| < 1$ folgt mit der Formel für die geometrische Reihe (Beispiel 1.8.4) :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \tfrac{q}{3} \sum_{j=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^j = \tfrac{q}{3} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^j - (\tfrac{3}{4})^0 \right) = \tfrac{q}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 \right) = q = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.$$

Das ist gerade der Flächeninhalt des weißen Ausgangsdreiecks!

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 50. *Einseitige Funktionsgrenzwerte*

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 1, 5\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10}{(x^3 + 3x^2 - 4)|x - 5|}\,.$$

(a) Ist f stetig?

(b) Zerlegen Sie Zähler und Nenner soweit wie möglich in Faktoren.

(c) Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken des Definitionsbereiches. An welchen Stellen ist f stetig ergänzbar?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Satz 1.12.3 sind die Polynomfunktionen

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10$$

und

$$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 + 3x^2 - 4$$

stetig. Da

$$|x - 5| = \begin{cases} -x + 5 & \text{für } x < 5 \\ x - 5 & \text{für } x \geqq 5 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \to 5-0} -x + 5 = \lim_{x \to 5+0} x - 5 = 0$$

gilt, ist die Funktion $B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x - 5|$ ebenfalls stetig. Nach Satz 1.12.4 (2.) ist die Funktion

$$N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x^3 + 3x^2 - 4)|x - 5|$$

stetig. Da die Funktion N im gesamten Definitionsbereich von f nicht Null wird (siehe Teil (b)), ist nach Satz 1.12.4 (3.) die Funktion f stetig.

(b) Das Polynom $X^4 - 5X^3 - 3X^2 + 17X - 10$ hat Nullstellen bei $X_1 = -2$, $X_2 = 1$ und $X_3 = 5$. Polynomdivision ergibt

$$X^4 - 5X^3 - 3X^2 + 17X - 10 = (X + 2)(X - 5)(X - 1)^2\,.$$

Das Polynom X^3+3X^2-4 hat die Nullstellen $X_1 = -2$ und $X_2 = 1$. Polynomdivision ergibt

$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X - 1)(X + 2)^2\,.$$

(c)

- bei $x = -2$:

$$\lim_{x\to-2-0} f(x) = \lim_{x\to-2-0} \frac{(x+2)(x-5)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)^2|x-5|} = \lim_{x\to-2-0} \frac{(x-5)(x-1)}{(x+2)|x-5|} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2+0} f(x) = \lim_{x\to-2+0} \frac{(x+2)(x-5)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)^2|x-5|} = \lim_{x\to-2+0} \frac{(x-5)(x-1)}{(x+2)|x-5|} = +\infty$$

Hier ist f nicht stetig ergänzbar, da $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ nicht existiert.

- bei $x = 1$:

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0} \frac{(x+2)(x-5)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)^2|x-5|} = \lim_{x\to1-0} \frac{(x-5)(x-1)}{(x+2)|x-5|} = 0$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to1+0} \frac{(x+2)(x-5)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)^2|x-5|} = \lim_{x\to1+0} \frac{(x-5)(x-1)}{(x+2)|x-5|} = 0$$

Hier ist f stetig ergänzbar durch den Wert $f(1) = 0$.

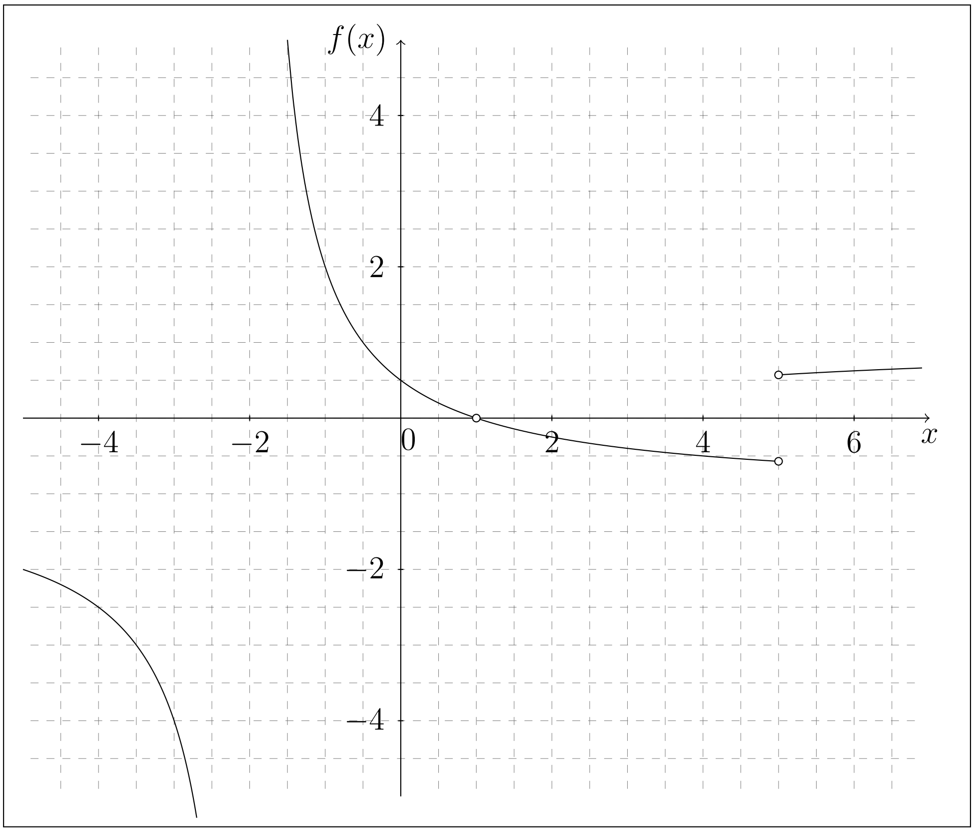
- bei $x = 5$:

$$\lim_{x\to5-0} f(x) = \lim_{x\to5-0} \frac{(x+2)(x-5)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)^2|x-5|} = \lim_{x\to5-0} \frac{(x-5)(x-1)}{(x+2)|x-5|} = -\frac{4}{7}$$

$$\lim_{x\to5+0} f(x) = \lim_{x\to5+0} \frac{(x+2)(x-5)(x-1)^2}{(x-1)(x+2)^2|x-5|} = \lim_{x\to5+0} \frac{(x-5)(x-1)}{(x+2)|x-5|} = \frac{4}{7}$$

Hier ist f nicht stetig ergänzbar, da $\lim\limits_{x\to5} f(x)$ nicht existiert.

(d)



Aufgabe H 51. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte (ohne Verwendung der Regel von l'Hospital, aber unter Verwendung der Stetigkeit der Wurzelfunktion).

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x^4-13x^3-13x^2+21x}{-3x^4+4x^3+15x^2-5x+15}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{4x^4+3x^2}-\sqrt{4x^4+5x^2}}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\cos(x))^4-13\sin(x)+\cos(x)}{\frac{x^4+3}{x^2}+\frac{17x^3+19}{13x^3+11x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin(x)+\ln(\ln(x))$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{5x^4-13x^3-13x^2+21x}{-3x^4+4x^3+15x^2-5x+15} &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(5x^3+2x^2-7x)}{(x-3)(-3x^3-5x^2-5)} \\ &= -\frac{132}{131}\end{aligned}$$

(b) Vereinfachen wir zunächst wie folgt

$$\frac{x}{\sqrt{4x^4+3x^2}-\sqrt{4x^4+5x^2}} = \frac{x}{|x|\left(\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2+5}\right)}.$$

Um den Betrag aufzulösen, müssen wir zwischen dem links- und dem rechtsseitigen Limes unterscheiden, d.h.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-0} \frac{x}{|x|\left(\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2+5}\right)} &= \lim_{x\to 0-0} \frac{-1}{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2+5}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0} \frac{x}{|x|\left(\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2+5}\right)} &= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2+5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} < 0\end{aligned}$$

Ein Funktionsgrenzwert an der Stelle 0 existiert also nicht.

(c) Zunächst schätzen wir für $x>0$ den Betrag wie folgt ab

$$\begin{aligned}\left|\frac{(\cos(x))^4-13\sin(x)+\cos(x)}{\frac{x^4+3}{x^2}+\frac{17x^3+19}{13x^3+11x}}\right| &= \frac{|(\cos(x))^4-13\sin(x)+\cos(x)|}{\frac{x^4+3}{x^2}+\frac{17x^3+19}{13x^3+11x}} \\ &\leqq \frac{15}{\frac{x^4+3}{x^2}+\frac{17x^3+19}{13x^3+11x}} \\ &= \frac{15(13x^4+11x^2)}{(x^4+3)(13x^2+11)+(17x^4+19x)} \\ &= \frac{195x^4+165x^2}{13x^6+28x^4+39x^2+19x+33}.\end{aligned}$$

Da gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{195x^4 + 165x^2}{13x^6 + 28x^4 + 39x^2 + 19x + 33} = 0\,,$$

können wir folgern, dass auch

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\cos(x))^4 - 13\sin(x) + \cos(x)}{\frac{x^4+3}{x^2} + \frac{17x^3+19}{13x^3+11x}} = 0$$

gilt.

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (\sin(x) + \ln(\ln(x))) &\geqq \lim_{x\to+\infty} (\ln(\ln(x)) - 1)\\ &= \infty,\end{aligned}$$

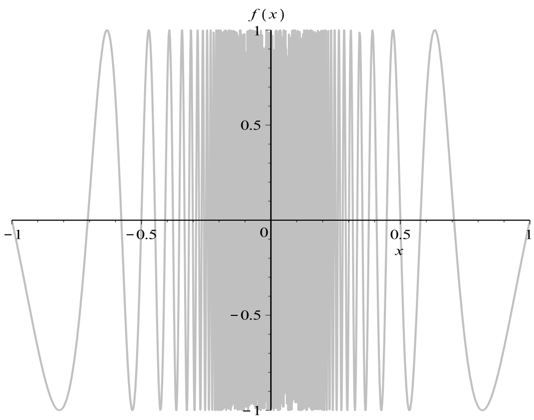
da der Logarithmus unbeschränkt und monoton ist.

Aufgabe H 52. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

Ihr Computerplot ist rechts dargestellt.



(a) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{\frac{2}{1+4n}}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{1+4n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+4n}} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{\left(\sqrt{\frac{2}{1+4n}}\right)^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi(1+4n)}{2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

(b) Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{\frac{2}{3+4n}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{3+4n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+4n}} = 0$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(b_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{\left(\sqrt{\frac{2}{3+4n}}\right)^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi(3+4n)}{2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

(c) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{für gerades n} \\ b_n & \text{für ungerades n} \end{cases}$$

hat den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, da sowohl die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit geradem Index besteht, als auch die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit ungeradem Index besteht, gegen den Grenzwert 0 konvergiert. Es gilt

$$f(c_n) = \begin{cases} 1 & \text{für gerades n} \\ -1 & \text{für ungerades n} \end{cases} .$$

Die Folge $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ hat also zwei verschiedene Häufungspunkte und konvergiert nicht.

(d) Die Funktion f ist unstetig im Punkt $x = 0$, da die gegen 0 konvergierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(0) = 0$ nicht erfüllt, vergleiche Definition 1.10.3 .

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 53. *Gleichheitsproblem*

(a) Besitzt die Gleichung $\sin(x) + 2x = 2^x$ mehrere reelle Lösungen?

Lösungshinweise hierzu: Ja. Seien nämlich $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x = e^{(\ln 2)x}$ und $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x) + 2x$. Mit

$$\begin{aligned} &f(0) = 1 > 0 = g(0), \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{\pi}{2}} < 2^2 < 1 + \pi = g\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ &f(\pi) = 2^\pi > 2^3 > 0 + 2\pi = g(\pi) \end{aligned}$$

hat die stetige (!) Abbildung $f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens zwei Vorzeichenwechsel und damit hat $f - g$ nach dem Zwischenwertsatz mindestens zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$.

(b) Seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{4}x + 2\cos(x) + 2.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(0, +\infty)$ mindestens drei Lösungen hat. Sie dürfen dabei benutzen, dass $\ln$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig ist.

Lösungshinweise hierzu: Wir zeigen, dass die stetige (!) Abbildung $f-g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mindestens drei Vorzeichenwechsel hat. Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty < 4 = \lim_{x \to 0+} g(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty > -\infty = \lim_{x \to \infty} g(x).$$

An den Stelle $x_1 = \pi$ gilt

$$f(x_1) = \ln(\pi) > 0 > -\frac{\pi}{4} = g(x_1).$$

An der Stelle $x_2 = 2\pi$ gilt

$$f(x_2) = \ln(2\pi) \overset{(1)}{<} 2 < 4 - \frac{\pi}{2} = g(x_2).$$

Dabei gilt (1) mit $e^2 > (2,7)^2 > 7 > 2\pi$.
Also haben wir: $f(x) - g(x)$ ist kleiner 0 für x nahe 0, größer 0 für $x = \pi$, kleiner 0 für $x = 2\pi$, größer 0 für x nahe bei ∞ – mit anderen Worten: die stetige Abbildung $f - g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ hat mindestens drei Vorzeichenwechsel und damit nach dem Zwischenwertsatz auch mindestens drei Nullstellen, wie behauptet.

Aufgabe H 54. *Umkehrfunktionen*

Gegeben sind die Mengen $M = \mathbb{R} \smallsetminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ und $N = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und die Funktionen

$$f\colon M \to N\colon x \mapsto \frac{x}{2 - x^2}, \qquad g\colon N \to M\colon x \mapsto -\frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2} + 2}.$$

(a) Berechnen Sie $f(g(x))$. Ist g die Umkehrfunktion von f?

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$f(g(x)) = \frac{-\frac{1}{2x}+\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}}{2-\left(-\frac{1}{2x}+\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2x}+\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}}{\frac{2}{2x}\left(-\frac{1}{2x}+\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}\right)+2-2} = x.$$

Nein! Es reicht nicht zu zeigen, dass $f(g(x)) = x$ für alle $x \in N$ gilt. Wie in Definition 1.13.7 festgelegt, muss man ebenfalls überprüfen, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$ ist. Es gilt beispielsweise an der Stelle $x = -1\ :\ g(f(-1)) = g(-1) = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}} = 2 \neq -1$.

(b) Geben Sie Teilmengen $\tilde{N} \subseteqq N$ und $\tilde{M} \subseteqq M$ so an, dass die jeweiligen Einschränkungen von f und g Umkehrfunktionen voneinander sind.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= -\frac{2-x^2}{2x}+\sqrt{\frac{(2-x^2)^2}{(2x)^2}+2} = -\frac{2-x^2}{2x}+\sqrt{\left(\frac{x^2+2}{2x}\right)^2} \\ &= -\frac{2-x^2}{2x}+\frac{x^2+2}{2|x|}. \end{aligned}$$

Schränkt man also f auf $\tilde{M} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 0, x \neq \sqrt{2}\right\} \subseteqq M$ ein und g auf $\tilde{N} = N$, so sind die jeweiligen Einschränkungen von f und g Umkehrfunktionen voneinander. Denn es gilt für $x > 0$

$$g(f(x)) = -\frac{2-x^2}{2x}+\frac{x^2+2}{2|x|} = x.$$

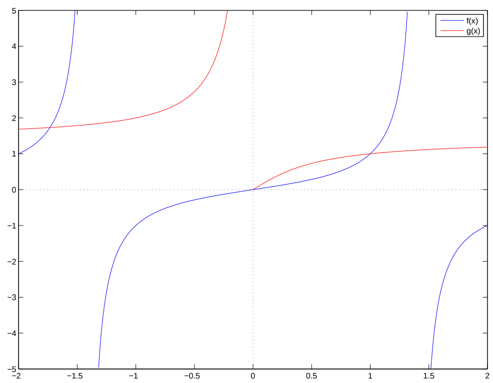
(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+0} g(x)$.

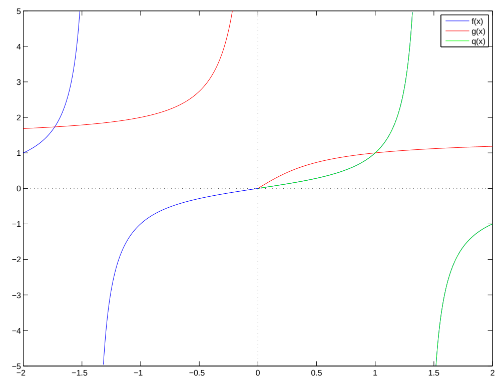
Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+0} g(x) &= \lim_{x\to 0+0} \sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}-\frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}-\frac{1}{2x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}+\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}+\frac{1}{2x}} \\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}+\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{2x}{x\sqrt{\frac{1}{4x^2}+2}+\frac{x}{2x}} \\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{2x}{\sqrt{\frac{1}{4}+2x^2}+\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

(d) Skizzieren Sie die Graphen von f und g und markieren Sie die Graphen der Einschränkungen aus **(b)**.

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen die Einschränkung von f auf $\tilde{M}$ mit $q\colon \tilde{M} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x}{2-x^2}$. Dann sind im linken Bild die Funktionen f und g zu sehen und im rechten Bild ist die Einschränkung q in grün dargestellt.





Aufgabe H 55. *Potenzreihen*

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen die Koeffizienten a_j und den Entwicklungspunkt z_0 für die Darstellung in der Form von Definition 1.14.2 an. Bestimmen Sie den Konvergenzradius. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-nz)^n \left(\frac{z}{n}\right)^{n+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{(n^2)}} z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}(z+3-\sqrt{2}\mathrm{i})^n$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{25}(z^2-6\mathrm{i}z-9)\right)^n$

Lösungshinweise hierzu: Eine Potenzreihe hat nach Definition 1.14.2 die Darstellung

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j ,$$

d.h. die Reihen müssen entsprechend umgeformt werden.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-nz)^n \left(\frac{z}{n}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (z-0)^{2n+1}$$

Somit ist $z_0 = 0$ und $a_j = \frac{(-1)^n}{n}$ für $j = 2n+1, n \in \mathbb{N}$ und sonst $a_j = 0$.
Da $\overline{\lim}_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{1/n} = 1$ ist der Konvergenzradius $\varrho = 1$.
Gesonderte Randbetrachtung: Sowohl für -1 als auch für 1 ergibt sich die alternierende harmonische Reihe. Die Reihe ist also für die Randpunkte konvergent und das reelle Konvergenzintervall ist $[-1, 1]$.

(b) Die Reihe muss nicht umgeformt werden. Es ist $z_0 = 0$, $a_0 = 0$ und $a_j = \frac{j!}{2^{(j^2)}}, j > 0$.
Die Quotienten der Koeffizientenfolge sind

$$\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \frac{(j+1)!}{2^{(j+1)^2}} \frac{2^{(j^2)}}{j!} = \frac{j+1}{2^{2j+1}} = \frac{1}{2^j} \underbrace{\frac{j+1}{2^{j+1}}}_{\leqq 1} \to 0$$

und somit ist der Konvergenzradius $\varrho = \infty$ und die Folge auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}(z+3-\sqrt{2}\mathrm{i})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}(z-(-3+\sqrt{2}\mathrm{i})^n$$

Somit ist $a_0 = 0$, $a_j = \frac{(2j)!}{j!}, j > 0$ und $z_0 = -3+\sqrt{2}\mathrm{i}$.
Mit dem Quotientenkriterium folgt aus

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{n+1} = 4n+2 \to +\infty\,,$$

der Konvergenzradius $\varrho = 0$ und es gibt kein $z \in \mathbb{R}$, für das die Reihe konvergiert.

(d)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{25}(z^2-6\mathrm{i}z-9)\right)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^{2n}}(z-3\mathrm{i})^{2n}$$

Hier ist also $z_0 = 3\mathrm{i}$ und $a_j = 5^{-j}$ für $j = 6, 8, \ldots$ und sonst $a_j = 0$.
Mit dem Wurzelkriterium folgt aus

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} 1/5 = 1/5$$

der Konvergenzradius $\varrho = 5$.
Gesonderte Randbetrachtung: Der Kreis um $3\mathrm{i}$ mit Radius 5 schneidet die reelle Achse bei -4 und 4, und für beide Werte haben dann alle Reihenglieder den Betrag 1, bilden also keine Nullfolge.
Das reelle Konvergenzintervall ist somit $(-4, 4)$.

Aufgabe H 56. *Potenzreihen?*

Gegeben sind die Reihen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,(z^2-2z+1)^k$ und $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,(z^2-2z-1)^k$.

- **(a)** Bestimmen Sie die Reihenwerte $f(0), f(2), g(0), g(2)$.
- **(b)** Bestätigen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass für zwei Punkte a und b in einem Kreis auch deren Mittelpunkt $(a+b)/2$ im selben Kreis liegt:
  $\forall a, b, z_0 \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{R}^+ : \quad a \in U_r(z_0) \wedge b \in U_r(z_0) \implies \frac{a+b}{2} \in U_r(z_0)$.
- **(c)** Formen Sie $f(z)$ in eine Potenzreihe um. Begründen Sie mit Hilfe der ersten beiden Aufgabenteile, warum $f(1)$ konvergiert, ohne die Reihe selbst zu untersuchen.
- **(d)** Überprüfen Sie, dass $g(1)$ nicht konvergiert. Begründen Sie damit und mit den ersten beiden Aufgabenteilen, dass sich $g(z)$ nicht in eine Potenzreihe umformen lässt.

Lösungshinweise hierzu:

- **(a)** Es ist $f(0) = f(2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(1/2)^k$ und der Grenzwert dieser geometrischen Reihe ist $1/(1-1/2) = 2$.

  Des weiteren ist $g(0) = g(2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1/2)^k$ und der Grenzwert dieser geometrischen Reihe ist $1/(1+1/2) = 2/3$.

(b) Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\left|\frac{a+b}{2}-z_0\right| = \left|\frac{a-z_0}{2}+\frac{b-z_0}{2}\right| \leqq \left|\frac{a-z_0}{2}\right|+\left|\frac{b-z_0}{2}\right| = \frac{1}{2}\,|a-z_0|+\frac{1}{2}\,|b-z_0| < \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r\,.$$

Der Mittelpunkt $(a+b)/2$ hat somit einen Abstand von z_0 der kleiner als r ist, liegt also im Kreis.

(c)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,(z^2-2z+1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,(z-1)^{2k}\,.$$

Potenzreihen haben einen Konvergenzkreis. Da $1=(0+2)/2$, liegt 1 im Kreis der auch 0 und 2 enthält, und da f dort konvergiert, muss es dies auch an 1 tun.

(Da $0, 1$ und 2 auf einer Geraden liegen, können Sie nicht alle auf dem Rand des Kreises liegen. D.h. auch wenn 0 und 2 Kreisrandpunkte sind, ist 1 im Kreisinneren.)

(d) Setzt man 1 in g ein ergibt sich $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ und diese Reihe konvergiert nicht (keine Nullfolge).

Potenzreihen haben einen Konvergenzkreis. Da $1=(0+2)/2$ liegt 1 in jedem Kreis der auch 0 und 2 enthält. Da g an 0 und 2 konvergiert, nicht aber an 1, kann es keinen Konvergenzkreis geben und somit ist g keine Potenzreihe.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 57. *Ableitungen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}\cosh(x)\,, \qquad g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (2x)^{x/3} \qquad \text{und}$$
$$h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln|1-2x|\,.$$

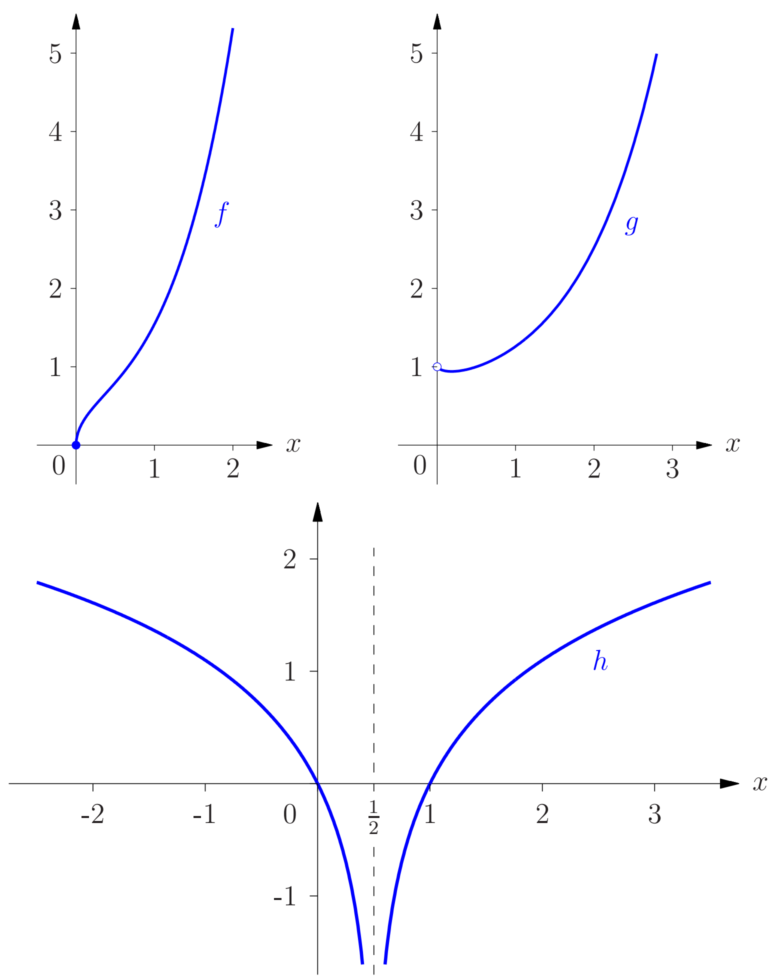
(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(b) Bestimmen Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung. Geben Sie den Definitionsbereich dieser Ableitungsfunktionen an.

(c) Leiten Sie durch vollständige Induktion eine allgemeine Formel für $h^{(n)}(x)$ her.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Graphen der Funktionen f, g und h auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich:



(b) Für f erhält man mit der Produktregel und der Quotientenregel:

$$f'(x) = \sqrt{x}\sinh x + \frac{\cosh x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x\sinh x + \cosh x}{2\sqrt{x}} \qquad \text{und}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x}\,(2x\cosh x + 3\sinh x) - \dfrac{2x\sinh x + \cosh x}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{(4x^2-1)\cosh x + 4x\sinh x}{4x\sqrt{x}}, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = +\infty$ muss der Punkt $x = 0$ ausgeschlossen werden.

Aus der Darstellung $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x\ln(2x)}$ folgt mit der Kettenregel und der Produktregel:

$$g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x\ln(2x)}\left(\tfrac{1}{3}\ln(2x) + \tfrac{1}{3}x\cdot\tfrac{2}{2x}\right) = \underbrace{(2x)^{x/3}}_{=g(x)}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\ln(2x)\right),$$

$$g''(x) = g(x)\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{2x} + g'(x)\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\ln(2x)\right) = (2x)^{x/3}\left[\tfrac{1}{3x} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\ln(2x)\right)^2\right],$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Für h ergibt sich mit der Kettenregel und der Quotientenregel:

$$h'(x) = -\frac{2}{1-2x} \qquad \text{und} \qquad h''(x) = -\frac{4}{(1-2x)^2}, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{\tfrac{1}{2}\}.$$

(c) Mit der Quotientenregel folgt weiter:

$$h'''(x) = -\frac{16}{(1-2x)^3}, \qquad h^{(4)}(x) = -\frac{96}{(1-2x)^4}, \qquad \ldots$$

Vermutung: $h^{(n)}(x) = -\dfrac{(n-1)!\,2^n}{(1-2x)^n}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

IA Für $n = 1$ ist $h^{(1)}(x) = h'(x) = -\dfrac{2}{1-2x} = -\dfrac{0!\,2^1}{(1-2x)^1}$ ✓

IS Ist $h^{(n)}(x) = -\dfrac{(n-1)!\,2^n}{(1-2x)^n}$ wahr, so liefert die Quotientenregel:

$$h^{(n+1)}(x) = -\frac{(1-2x)^n\cdot 0 - (n-1)!\,2^n\cdot n(1-2x)^{n-1}(-2)}{(1-2x)^{2n}} = -\frac{n!\,2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}} \qquad ✓$$

Aufgabe H 58. *Potenzreihen*

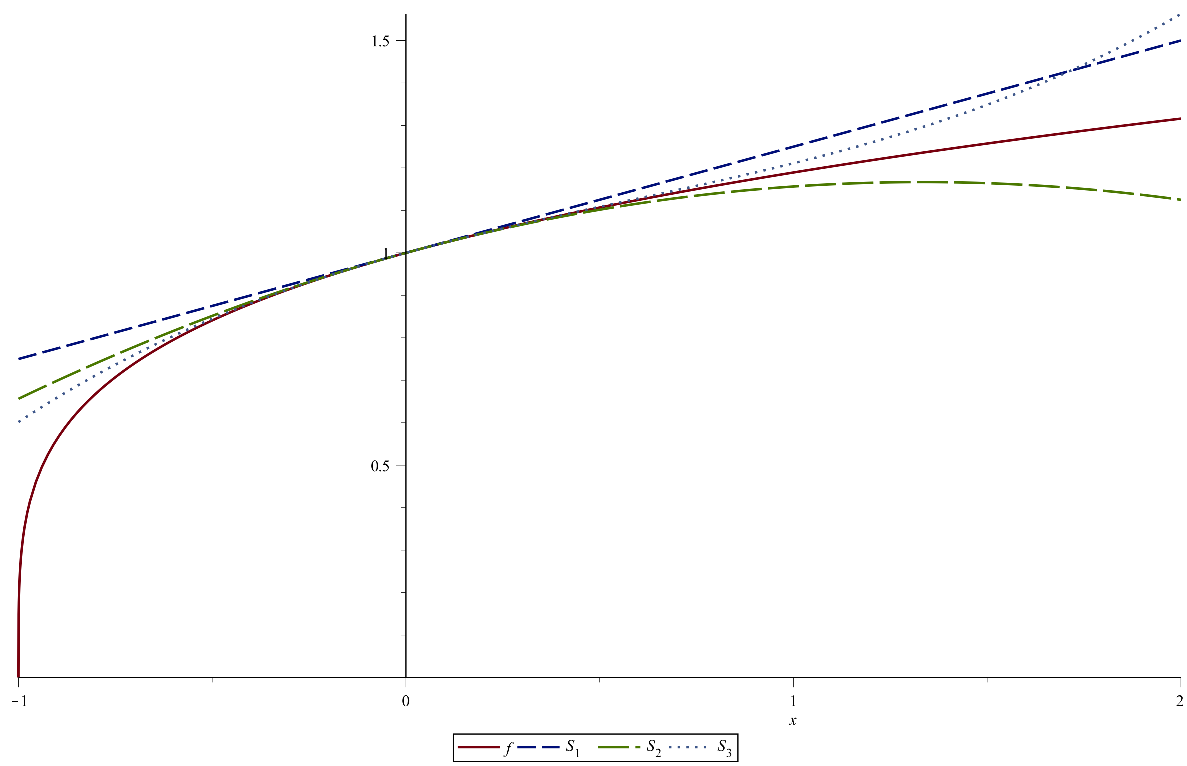
Sei $f\colon [-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt[4]{1+x}$. Geben Sie mit Hilfe von 1.14.16 eine Potenzreihe für f auf $(-1,1)$ an. Geben Sie die Partialsummen S_0, S_1, S_2 und S_3 der Potenzreihe an. Zeichnen Sie die Graphen von f, S_1, S_2 und S_3 auf $[-1,2]$ in ein Schaubild.

Lösungshinweise hierzu: Nach 1.14.16 gilt für $x \in (-1,1)$

$$\sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{4}}{n} x^n .$$

Die ersten Partialsummen sind

$$\begin{aligned}
S_0 &= \sum_{n=0}^{0} \binom{\frac{1}{4}}{n} x^n = \binom{\frac{1}{4}}{0} x^0 = 1 \\
S_1 &= \sum_{n=0}^{1} \binom{\frac{1}{4}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{4}x \\
S_2 &= \sum_{n=0}^{2} \binom{\frac{1}{4}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 \\
S_3 &= \sum_{n=0}^{3} \binom{\frac{1}{4}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3
\end{aligned}$$



Aufgabe H 59. *Differenzierbarkeit*

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}\,, & \text{für } x \geqq 0 \\ -\sqrt{-x}\,, & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x| + |x-1|\ .$$

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob f an der Stelle $x_0 = 0$ und g an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ differenzierbar ist.

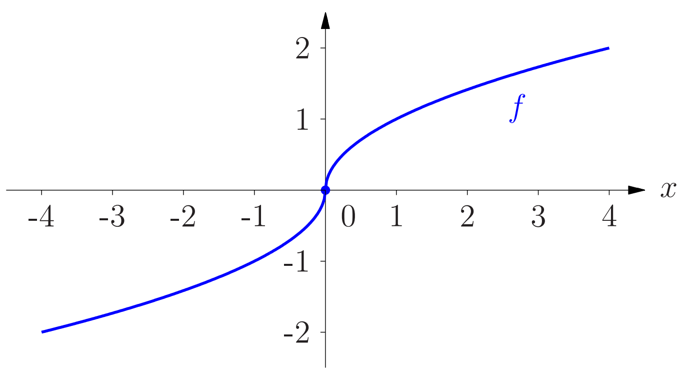
(c) Finden Sie ein Polynom p so, dass die Funktion

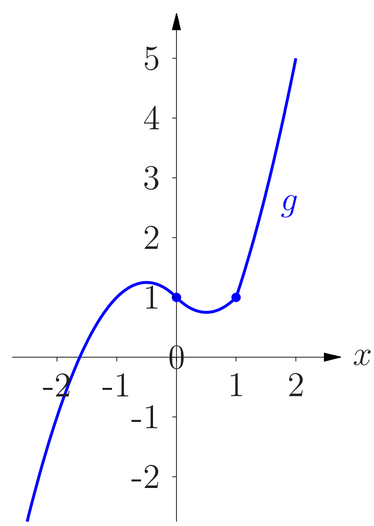
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \ln\left(2+x^2\right) & \text{für } \ x \leqq 1 \\ p(x) & \text{für } \ x > 1 \end{cases}$$

zweimal differenzierbar, aber nicht dreimal differenzierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Graphen der Funktionen f und g :





Zum Zeichnen von g verwendet man die betragsfreie Darstellung

$$g(x) \;=\; \begin{cases} -x^2 - x + 1\,, & \text{für } x \leqq 0 \\ x^2 - x + 1\,, & \text{für } 0 < x \leqq 1 \\ x^2 + x - 1\,, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

(b) Für den Differenzenquotienten von f bei $x_0 = 0$ gilt

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \;=\; \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} \;=\; \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} \;=\; +\infty.$$

Da kein endlicher rechtsseitiger Grenzwert vorliegt, existiert auch

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

nicht, d. h. f ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Im Fall der Funktion g ergibt sich:

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \;=\; \lim_{x\to 0+0} \frac{(x^2-x+1)-1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0+0} (x-1) \;=\; -1,$$

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \;=\; \lim_{x\to 0-0} \frac{(-x^2-x+1)-1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0-0} (-x-1) \;=\; -1,$$

d. h. g ist bei $x_0 = 0$ differenzierbar mit $g'(x_0) \;=\; \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \;=\; -1$.

An der Stelle $x_1 = 1$ ist g nicht differenzierbar, denn es gilt:

$$\lim_{x\to x_1+0} \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \;=\; \lim_{x\to 1+0} \frac{(x^2+x-1)-1}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1+0} (x+2) \;=\; 3,$$

$$\lim_{x\to x_1-0} \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \;=\; \lim_{x\to 1-0} \frac{(x^2-x+1)-1}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1-0} x \;=\; 1.$$

(c) Wir berechnen zunächst die Ableitungen der Funktion

$$l\colon \quad (-\infty,1] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \ln(2+x^2)\,.$$

Das ergibt

$$l'\colon \quad (-\infty,1] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \frac{2x}{2+x^2}$$

$$l''\colon \quad (-\infty,1] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \frac{4-2x^2}{(2+x^2)^2}$$

$$l'''\colon \quad (-\infty,1] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \frac{16x^3}{(2+x^2)^3} - \frac{12x}{(2+x^2)^2}$$

Für p wählen wir ein Polynom vom Grad 2 (es wird sich am Ende der Rechnung herausstellen, dass das genügt). Um die Rechnung einfacher zu gestalten, setzen wir mit

$$p(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

an. Damit die Funktion h stetig ist (diese Eigenschaft muss erfüllt sein, damit h differenzierbar werden kann), muss

$$\lim_{x\to 1-0} h(x) = \lim_{x\to 1+0} h(x)$$

gelten. Daraus erhalten wir die Bedingung

$$\lim_{x\to 1-0} \ln\left(2+x^2\right) = \lim_{x\to 1+0} a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

und daraus $c = \ln(3)$. Nun wollen wir mit Hilfe des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 1$ dafür sorgen, dass h differenzierbar ist. Dafür soll gelten

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}\,.$$

Wir erhalten

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln(2+x^2)-\ln(3)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{a(x-1)^2+b(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} (a(x-1)+b) = b\,.$$

Da die Funktion l differenzierbar und die Funktion l' stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln(2+x^2)-\ln(3)}{x-1} = l'(1) = \frac{2}{3}$$

und wir erhalten $b = \frac{2}{3}$. Damit hat h die Ableitung

$$h'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x}{2+x^2} & \text{für } x \leqq 1 \\ 2a(x-1)+\frac{2}{3} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Damit h zweimal differenzierbar wird, betrachten wir den Differenzenquotienten von h' an der Stelle $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1-0} \frac{h'(x)-h'(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+0} \frac{h'(x)-h'(1)}{x-1} \\ \lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{2x}{2+x^2}-\frac{2}{3}}{x-1} &= \lim_{x\to 1+0} \frac{2a(x-1)+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}{x-1} \\ l''(1) &= 2a \\ \frac{1}{9} &= a \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$p(x) = \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{9}(x-1)^2 = \ln(3) - \frac{5}{9} + \frac{4}{9}\,x + \frac{1}{9}\,x^2$$

und

$$h''\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{4-2x^2}{(2+x^2)^2} & \text{für } x \leqq 1 \\ \frac{2}{9} & \text{für } x > 1 \end{cases}\,.$$

Diese Funktion h'' ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{h''(x)-h''(1)}{x-1} = l'''(1) = -\frac{20}{27}$$

und

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{h''(x)-h''(1)}{x-1} = 0$$

sind verschieden.

Aufgabe H 60. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Schreiben Sie $f(x) = (\sin(x))^2(\cos(x))^3$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(mx)$ und $\cos(nx)$, mit $m,\, n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Schreiben Sie $g(x) = \sin(4x)$ als Linearkombination von Termen der Form $(\sin(x))^j(\cos(x))^k$, mit $j,\, k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Leiten Sie die folgenden Formeln her:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)}{2} + \frac{\cos(x-y)}{2} \qquad \text{und}$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big), \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Einsetzen der Formeln aus (1.14.18),

$$\sin(x) \;=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \qquad \text{und} \qquad \cos(x) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),$$

folgt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned} (\sin(x))^2 &= -\tfrac{1}{4}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 \;=\; -\tfrac{1}{4}\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \qquad \text{und} \\ (\cos(x))^3 &= \tfrac{1}{8}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3 \;=\; \tfrac{1}{8}\,(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned} (\sin(x))^2(\cos(x))^3 &= -\tfrac{1}{32}\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) \\ &= -\tfrac{1}{32}\,(-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}) \\ &= \tfrac{1}{8}\cos(x) - \tfrac{1}{16}\cos(3x) - \tfrac{1}{16}\cos(5x). \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $\sin(4x) \;=\; \mathrm{Im}[\cos(4x) + \mathrm{i}\sin(4x)] \;=\; \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x})$ und erhalten wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^4 \;=\; (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^4 \\ &= (\cos(x))^4 + 4\mathrm{i}(\cos(x))^3\sin(x) - 6(\cos(x))^2(\sin(x))^2 \\ &\quad - 4\mathrm{i}\cos(x)(\sin(x))^3 + (\sin(x))^4 \end{aligned}$$

die Formel $\sin(4x) \;=\; 4\sin(x)(\cos(x))^3 - 4(\sin(x))^3\cos(x)$.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig; beispielsweise kann $\sin(x)(\cos(x))^3$ durch

$$\sin(x)\cos(x)(1 - (\sin(x))^2) \;=\; \sin(x)\cos(x) - (\sin(x))^3\cos(x)$$

ersetzt oder der gesamte Term mit $1 = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2$ multipliziert werden.

(c) Mit $\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$ und $\cos(y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(y) &= \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}) \\
&= \tfrac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x+y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x-y)}\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+y)}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)}}{4} = \frac{\cos(x+y)}{2} + \frac{\cos(x-y)}{2}\,.
\end{aligned}$$

Die zweite Formel folgt aus der ersten, denn es ist

$$\begin{aligned}
2\cos\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big) &= 2\left[\frac{\cos(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2})}{2} + \frac{\cos(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2})}{2}\right] \\
&= \cos(x) + \cos(y).
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61.

Gegeben ist die Funktion

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von $\tanh$. Untersuchen Sie $\tanh$ auf Nullstellen, Extremalstellen und Monotonie. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x)$. Skizzieren Sie den Graphen von $\tanh$ und geben Sie den Wertebereich an.

Lösungshinweise hierzu: Bezüglich der Ableitung gilt:

$$\tanh'(x) = \frac{(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2} \overset{\text{Beispiel 2.3.3}}{=} \frac{1}{(\cosh(x))^2} > 0.$$

Extremalstellen gibt es daher nach Lemma 2.4.2 keine, da $\tanh'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Wegen Satz 2.4.8 ist $\tanh$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend. Bezüglich der Nullstellen gilt:

$$\tanh(x) = 0 \Leftrightarrow \sinh(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x = 0.$$

Bezüglich der Grenzwerte gilt

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

und damit

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = 1$$

bzw.

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = -1.$$

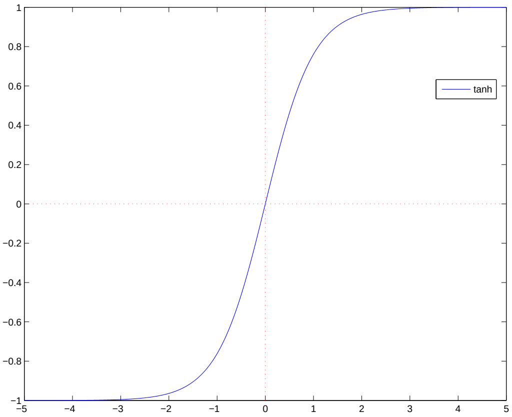
Der Wertebereich ist $W_{\tanh} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

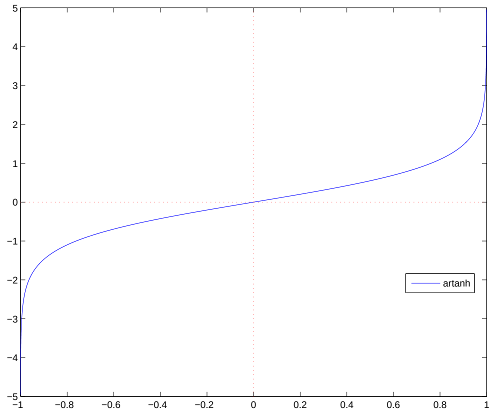
(b) Es ist artanh definiert als die Umkehrfunktion von $\tanh$. Skizzieren Sie den Graphen von artanh und geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich an. Begründen Sie, dass Satz 2.3.1 anwendbar ist, und berechnen Sie damit die Ableitung von artanh.

Lösungshinweise hierzu: Der Definitionsbereich von artanh ist der Wertebereich von $\tanh$, also $D_{\operatorname{artanh}} = W_{\tanh} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$. Genauso ist der Wertebereich von artanh der Definitionsbereich von $\tanh$ also $W_{\operatorname{artanh}} = D_{\tanh} = \mathbb{R}$.

Zur Anwendbarkeit von Satz 2.3.1: Nach **(a)** ist $\tanh$ streng monoton und stetig, an jeder Stelle differenzierbar mit Ableitung ungleich 0. Somit ist der Satz anwendbar und für die Ableitung gilt mit $y_0 = \tanh(x_0)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \operatorname{artanh}(y)\bigg|_{y=y_0} = \frac{1}{\tanh'(x_0)} = \frac{1}{1 - (\tanh(x_0))^2} = \frac{1}{1 - y_0^2}\ .$$





(c) Beweisen Sie:

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Hinweis: Satz 2.4.6 aus der Vorlesung kann dabei helfen.

Lösungshinweise hierzu: Mit dem **(b)**-Teil gilt

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

und wir berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) &= \frac{1}{2}\frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}\ .\end{aligned}$$

Nach Satz 2.4.6 gilt dann

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c\,.$$

Setzt man in diese Identität $x = 0$ ein, so folgt

$$c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) + c = \operatorname{arsinh}(0) = 0$$

und damit ist $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ bewiesen.

Aufgabe H 62. *Monotonie und Mittelwertsatz*

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1.$$

Skizzieren Sie die Graphen dieser drei Funktionen in ein Koordinatensystem.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst stellen wir fest, dass für $x = 1$ alle drei Funktionen den Wert 0 annehmen. Betrachten wir nun die Ableitungen der Funktionen, so erhalten wir

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x} > 1,$$

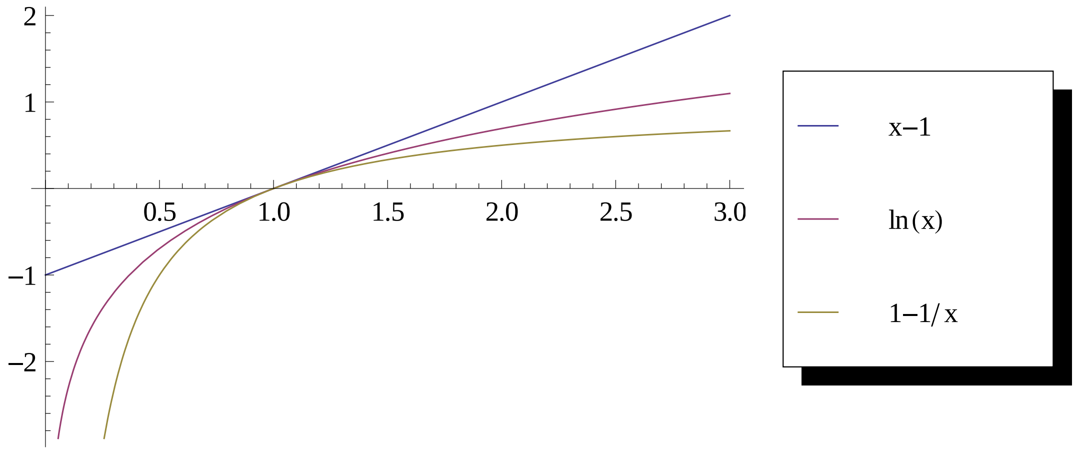
für $0 < x < 1$, sowie

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < 1,$$

für $x > 1$.

Mit Hilfe der Kennzeichnung monotoner Funktionen folgern wir nun, dass die Differenzfunktion $\ln(x) - 1 - \frac{1}{x}$ für $x < 1$ monoton fällt und für $x > 1$ monoton steigt. Da die Differenz an der Stelle 1 gerade 0 ist, ist die Differenzfunktion $\ln(x) - 1 - \frac{1}{x}$ also für alle $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ positiv. Damit haben wir die erste Ungleichung gezeigt.

Analog dazu gilt für die Differenzfunktion $(x - 1) - \ln(x)$, dass diese für $x < 1$ monoton fällt und für $x > 1$ monoton steigt. Wiederrum gilt somit die Ungleichung, da die Differenz an der Stelle 1 gerade 0 ist.



(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\left|\cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right) - \cos\left(\mathrm{e}^{-y}\right)\right| \leqq |x - y|.$$

Begründen Sie außerdem, dass Gleichheit nur für $x = y$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass ein $\xi \in [x, y]$ existiert, so dass

$$\frac{\cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right) - \cos\left(\mathrm{e}^{-y}\right)}{x - y} = f'(\xi)$$

gilt. Einsetzen der Ableitung der Funktion f und durchmultiplizieren mit $(x-y)$ liefert die Gleichheit

$$\cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right)-\cos\left(\mathrm{e}^{-y}\right)=(x-y)(-\mathrm{e}^{-\xi}\cdot(-\sin(\mathrm{e}^{-\xi}))).$$

Diese Gleichheit liefert insbesondere die Gleichheit der Beträge

$$\left|\cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right)-\cos\left(\mathrm{e}^{-y}\right)\right|=|x-y|\cdot\left|\mathrm{e}^{-\xi}\right|\cdot\left|\sin(\mathrm{e}^{-\xi})\right|.$$

Da für $\xi\in\mathbb{R}^+$ gilt, dass $|\mathrm{e}^{-\xi}|\leqq 1$ und $|\sin(\mathrm{e}^{-\xi})|\leqq 1$ ist, gilt die behauptete Ungleichung

$$\left|\cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right)-\cos\left(\mathrm{e}^{-y}\right)\right|\leqq|x-y|.$$

Gleichheit kann hier nur in zwei Fällen gelten: Zum Einen, wenn $|x-y|=0$ ist, was gerade bedeutet, dass $x=y$ ist. Zum Anderen, wenn $\left|\mathrm{e}^{-\xi}\right|\cdot\left|\sin(\mathrm{e}^{-\xi})\right|=1$ ist, was aber für $x\in\mathbb{R}^+$ niemals erfüllt ist.

Aufgabe H 63. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin(x))^2}{\sin(x^2)}$

Lösungshinweise hierzu: Der Ausdruck ist von der Form „$\frac{0}{0}$“, daher erhalten wir durch mehrfaches Anwenden der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))^2}{\sin(x^2)}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)\sin(x)}{2x\cos(x^2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\sin(x)}{x\cos(x^2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x))^2-(\sin(x))^2}{\cos(x^2)-2x^2\sin(x^2)}\\&=1\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$

Lösungshinweise hierzu: Der Ausdruck ist von der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“, daher erhalten wir durch mehrfaches Anwenden der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{2\mathrm{e}^x-2}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{2\mathrm{e}^x}\\&=0\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)$

Lösungshinweise hierzu: Der Ausdruck ist von der Form „$\infty-\infty$", daher formen wir diesen zunächst in einen Bruch um. Anschließend kann die Regel von l'Hospital angewandt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{(x+1)\ln(x+1)+x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}+1}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(\frac{\sin(x)}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)$

Lösungshinweise hierzu: Der Ausdruck ist ebenfalls von der Form „$\infty-\infty$", daher formen wir diesen zunächst in einen Bruch um. Anschließend kann die Regel von l'Hospital angewandt werden:

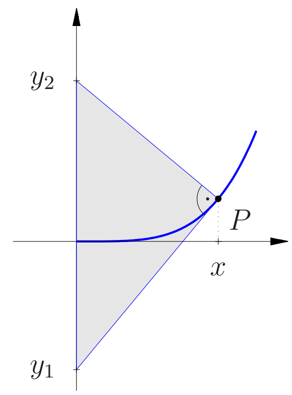
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{\sin(x)}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0-0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0-0}\frac{-\sin(x)}{6x}\\
&= \lim_{x\to 0-0}\frac{-\cos(x)}{6}\\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 64. *Extremwerte*

Das graue Dreieck wird durch die y-Achse sowie durch die Tangente und Normale an den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^4$ im Punkt P begrenzt.

Bestimmen Sie y_1 und y_2 in Abhängigkeit von der x-Koordinate von P. Für welches $x_{\min} > 0$ wird der Flächeninhalt F des Dreiecks am kleinsten, und wie groß ist der minimale Wert $F_{\min}$?



Lösungshinweise hierzu: Die Steigung der Tangente bzw. Normale in Punkt $P = (x, y)$ ist $4x^3$ bzw. $-\dfrac{1}{4x^3}$. Folglich ist

$$\tilde{y} = y + 4x^3(\tilde{x} - x)$$

eine Gleichung für die Tangente und

$$\tilde{y} = y + \frac{-1}{4x^3}(\tilde{x} - x)$$

eine Gleichung für die Normale.
Verwendet man $y = x^4$ und setzt jeweils $\tilde{x} = 0$ in die Gleichungen ein, erhält man als Schnittpunkte

$$y_1 = x^4 + 4x^3(-x) = -3x^4\,, \quad y_2 = x^4 + \frac{-1}{4x^3}(-x) = x^4 + \frac{1}{4x^2}\,.$$

Der Flächeninhalt des grauen Dreiecks ist

$$F(x) = \frac{x}{2}(y_2 - y_1) = \frac{x}{2}\left(4x^4 + \frac{1}{4x^2}\right) = 2x^5 + \frac{1}{8x}\,.$$

Aus

$$0 = F'(x) = 10x^4 - \frac{1}{8x^2}$$

folgt

$$x_0 = \sqrt[6]{1/80} \qquad (\approx 0{,}4817)$$

als einzige positive Nullstelle der Ableitung.
Da $F(x) \to +\infty$ für $x \to 0$ oder $x \to +\infty$, muss an x_0 ein Minimum vorliegen, und der zugehörige Flächeninhalt ist

$$F_{\min} = \frac{1}{x_0}\left(2x_0^6 + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{20}\sqrt[6]{80} \qquad (\approx 0{,}3114)\,.$$

Dass dieses Minimum global ist, begründet sich wie folgt: da $F'(x)$ auf $(0, x_0)$ und (x_0, ∞) keine Nullstellen hat, ist $F(x)$ auf diesen Intervallen streng monoton. Da $\lim\limits_{x \to 0+0} F(x) = +\infty$ muss sie auf $(0, x_0)$ fallen. Entsprechend muss sie auf $(0, +\infty)$ steigen, da $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = +\infty$. Daher ist $F(x) - F(x_0) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und somit liegt an x_0 ein globales Minimum vor.

Aufgabe H 65. *Taylorpolynom*

Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cosh(x)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_4(f, x, x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise hierzu: Um das Taylorpolynom 4. Stufe samt Restglied angeben zu können, brauchen wir die ersten fünf Ableitungen von f.

$$f'(x) = f'''(x) = f^{(5)}(x) = \sinh(x), \qquad f''(x) = f^{(4)}(x) = \cosh(x)$$

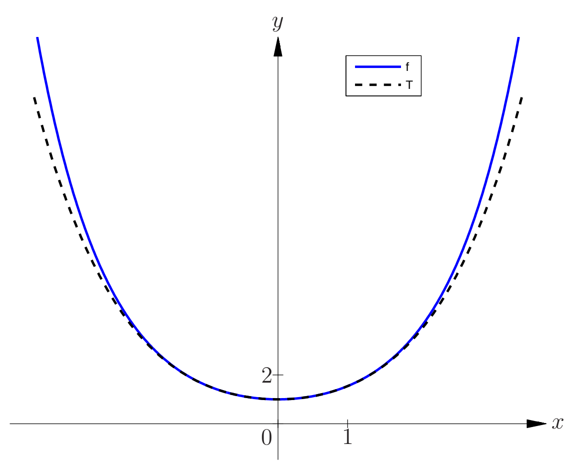
Das gesuchte Taylorpolynom 4. Stufe lautet dann wie folgt:

$$\begin{aligned} T_4(f, x, x_0) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 \\ &= \cosh(x_0)\left(1 + \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{(x - x_0)^4}{24}\right) + \sinh(x_0)\left((x - x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{6}\right). \end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $T_4(f, x, 0)$ in ein Koordinatensystem.

Lösungshinweise hierzu:

Für $x_0 = 0$ ist $\cosh(0) = 1$ und $\sinh(0) = 0$ und Somit $T_4(f, x, 0) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.



(c) Berechnen Sie $T_4(f, 1, 0)$. Verwenden Sie das Restglied $R_4(f, x, 0)$, um eine Schranke für den Fehler $|f(1) - T_4(f, 1, 0)|$ zu erhalten.

Lösungshinweise hierzu: Eine mögliche Näherung für $\cosh 1$ ist gegeben durch $T_4(f,1,0)$.

$$T_4(f,1,0) = 1 + 1/2 + 1/24 = 37/24.$$

Das Restglied R_4 lautet

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{\sinh(\xi)}{120}x^5,$$

wobei $\xi \in [0,x]$. Wir wählen nun $x = 1$ und erhalten mit $\sinh(\xi) < \sinh(1) < 3/2$ und eine mögliche Restgliedabschätzung durch

$$|R_4(x)| \leqq \frac{1}{80}.$$

Der Fehler $|f(1) - T_4(f,1,0)|$ ist also kleiner als $0{,}0125$.

(d) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f unter Verwendung der Exponentialreihe.

Lösungshinweise hierzu: die Potenzreihe der Exponentialreihe ist

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Da $\cosh(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ ist ergibt sich

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{2}\,\frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Aufgabe H 66. *Partielle Integration*

(a) Leiten Sie durch partielle Integration eine Stammfunktion für $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3\ln(x)$ her.

(b) Leiten Sie durch partielle Integration eine Stammfunktion für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3\arctan(x)$ her.

(c) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_1^2 (\ln(x))^3 \,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\pi x\,(\cos(x))^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit $u'(x) = x^3$ und $v(x) = \ln(x)$ ergibt sich

$$\int x^3 \ln(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \;=\; [u(x)\, v(x)] \;-\; \int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{4}\, x^4 \ln(x)\right] \;-\; \int \frac{1}{4}\, x^4 \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{4}\, x^4 \ln(x)\right] \;-\; \frac{1}{4} \int x^3\, \mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{4}\, x^4 \ln(x)\right] \;-\; \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4}\, x^4\right] \;=\; \left[\frac{1}{4}\, x^4 \ln(x) \;-\; \frac{1}{16}\, x^4\right].$$

(b) Mit $u'(x) = x^3$ und $v(x) = \arctan(x)$ ergibt sich mittels Polynomdivision

$$\begin{aligned}
\int x^3 \arctan(x)\, \mathrm{d}x &= [\tfrac{1}{4}x^4 \arctan(x)] - \tfrac{1}{4} \int \tfrac{x^4}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= [\tfrac{1}{4}x^4 \arctan(x)] - \tfrac{1}{4} \int \tfrac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= [\tfrac{1}{4}x^4 \arctan(x)] - \tfrac{1}{4} \int x^2 - 1 + \tfrac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= [\tfrac{1}{4}x^4 \arctan(x) - \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\arctan(x)]\ .
\end{aligned}$$

(c) Linkes Integral: Mit partieller Integration wird unter Verwendung von P 68 (a)

$$\begin{aligned}
\int (\ln(x))^3\, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot (\ln(x))^3\, \mathrm{d}x \\
&= [x(\ln(x))^3] - \int x \cdot 3(\ln(x))^2 \tfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= [x(\ln(x))^3] - 3 \int 1 \cdot (\ln(x))^2\, \mathrm{d}x \\
&= [x(\ln(x))^3] - 3[x(\ln(x))^2] + 3 \int x \cdot 2\ln(x) \tfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= [x(\ln(x))^3] - 3[x(\ln(x))^2] + 6[x\ln(x) - x] \\
&= [x(\ln(x))^3 - 3x(\ln(x))^2 + 6x\ln(x) - 6x]\ .
\end{aligned}$$

Also wird

$$\int_1^2 (\ln(x))^3\, \mathrm{d}x \;=\; 2(\ln(2))^3 - 6(\ln(2))^2 + 12\ln(2) - 6\ .$$

Rechtes Integral: Partielle Integration mit $u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = x\cos(x)$ liefert

$$\int_0^\pi x\, (\cos(x))^2\, \mathrm{d}x \;=\; \int_0^\pi u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \;=\; [u(x)\, v(x)]_0^\pi \;-\; \int_0^\pi u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x$$
$$= \underbrace{[x\cos(x)\, \sin(x)\,]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \sin(x)\, (\cos(x) - x\sin(x))\, \mathrm{d}x\,,$$

also

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\, (\cos(x))^2\, \mathrm{d}x &= -\int_0^\pi \sin(x)\, (\cos(x) - x\sin(x))\, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\pi \sin(x)\, \cos(x)\, \mathrm{d}x \;+\; \int_0^\pi x\, (\sin(x))^2\, \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Mit der Stammfunktion

$$\int \sin(x)\,\cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{2}\,(\sin(x))^2\right]$$

aus Beispiel 3.2.4 sowie der Darstellung $(\sin(x))^2 = 1-(\cos(x))^2$ folgt dann

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\,(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x \;&=\; -\underbrace{\left[\tfrac{1}{2}\,(\sin(x))^2\right]_0^\pi}_{=\,0} + \int_0^\pi x\,(1-(\cos(x))^2)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x \;-\int_0^\pi x\,(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Also ist letztlich

$$\int_0^\pi x\,(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Aufgabe H 67. *Integrationsformel*

Beweisen Sie, dass für jede differenzierbare Funktion f die Formel

$$\int \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\sqrt{1+(f(x))^2}\right]$$

gilt, und berechnen Sie hiermit die Integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+(\cos(x))^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{(x^2+x)\,\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+x^2\,\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösungshinweise hierzu: Durch Ableiten der rechten Seite mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\sqrt{1+(f(x))^2} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{1+(f(x))^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(f(x))^2 \;=\; \frac{1}{2\sqrt{1+(f(x))^2}}\cdot 2f(x)f'(x),$$

d. h. $G(x) = \sqrt{1+(f(x))^2}$ ist eine Stammfunktion von $g(x) = \dfrac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}$.

Für $f(x) = \cos(x)$ ist

$$\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} \;=\; \frac{-\cos(x)\,\sin(x)}{\sqrt{1+(\cos(x))^2}} \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+(\cos(x))^2}}\,,$$

also

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+(\cos(x))^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; -2\left[\sqrt{1+(\cos(x))^2}\right]_0^{\pi/2} \;=\; -2\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}\right) \;=\; 2\sqrt{2}-2.$$

Für $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ ergibt sich

$$\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} \;=\; \frac{x\,\mathrm{e}^x\cdot(x\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2\,\mathrm{e}^{2x}}} \;=\; \frac{(x^2+x)\,\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+x^2\,\mathrm{e}^{2x}}}\,,$$

und damit

$$\int_{-1}^{1} \frac{(x^2+x)\,\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+x^2\,\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\sqrt{1+x^2\,\mathrm{e}^{2x}}\right]_{-1}^{1} \;=\; \sqrt{1+\mathrm{e}^2}-\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2}} \;=\; \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\,\sqrt{1+\mathrm{e}^2}\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 68. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{(\arctan(x))^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu: Substitution $t = \arctan(x)$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{(\arctan(x))^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int t^3 \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int t^3\,\mathrm{d}\,t\\ &= \left[\frac{1}{4}t^4\right]\\ &= \left[\frac{1}{4}\arctan(x)^4\right]\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{(x-\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu: Substitution $t = e^x$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = e^x$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{(x-\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{x=0}^{x=\ln(2)} \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{(-\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{t=1}^{t=2} \mathrm{e}^{(-t)}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{t=1}^{t=2} \mathrm{e}^{(-t)}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^2\\ &= -\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1} = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2}\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu: Substitution $t = \ln(x)$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{t}$, $x = \mathrm{e}^t$.

$$\begin{aligned}
\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x &= \int \sin(t)\cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \\
&= [-\mathrm{e}^t\cdot\cos(t)] + \int \mathrm{e}^t\cdot\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= [-\mathrm{e}^t\cdot\cos(t)] + [\mathrm{e}^t\cdot\sin(t)] - \int \mathrm{e}^t\sin(t)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}[-\mathrm{e}^t\cdot\cos(t) + \mathrm{e}^t\cdot\sin(t)] \\
&= \frac{1}{2}[-x\cdot\cos(\ln(x)) + x\cdot\sin(\ln(x))] \\
&= \frac{x}{2}[\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))]
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu: Substitution $x = \sin(t)$, $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \cos(t)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-(\sin(t))^2}}\cdot\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int \frac{\sin(t)\cos(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int \sin(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= [-\cos(t)] \\
&= [-\cos(\arcsin(x))] \\
&= [-\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}] \\
&= \left[-\sqrt{1-x^2}\right]
\end{aligned}$$

Aufgabe H 69. *Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+8x^2+15}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^4+10x^3+18x^2+14x+3}{x^4+5x^3+9x^2+7x+2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen zunächst die Nullstellen des Nenners. Dazu substituieren wir $u = x^2$ und erhalten die Gleichung $u^2 + 8u + 15 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $u_1 = -3$ und $u_2 = -5$. Das Polynom lässt sich also zu

$$x^4 + 8x^2 + 15 = u^2 + 8u + 15 = (u+3)(u+5) = (x^2+3)(x^2+5)$$

faktorisieren. Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet demnach (nach 3.4.5):

$$\frac{x^2}{x^4 + 8x^2 + 15} = \frac{A + Bx}{x^2+3} + \frac{C + Dx}{x^2+5} \,.$$

Daraus ergibt sich

$$x^2 = (B+D)x^3 + (A+C)x^2 + (5B+3D)x + 5A + 3C$$

und das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} B + D &= 0 \\ A + C &= 1 \\ 5B + 3D &= 0 \\ 5A + 3C &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = 0 \quad C = \frac{5}{2} \quad D = 0$$

und wir erhalten mit der Formel aus 3.4.9

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^4 + 8x^2 + 15}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{-\frac{3}{2}}{x^2+3} + \frac{\frac{5}{2}}{x^2+5}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{3}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right) + \frac{5}{2\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x\right)\right] \\ &= \left[\frac{\sqrt{5}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]. \end{aligned}$$

(b) Polynomdivision ergibt

$$\frac{2x^4 + 10x^3 + 18x^2 + 14x + 3}{x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2} = 2 + \frac{1}{x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2}\,.$$

Das Polynom $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$ hat eine dreifache Nullstelle bei -1 und eine (einfache) Nullstelle bei -2. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet also

$$\frac{1}{x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2} = \frac{1}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{d}{x+2}\,.$$

Wir erhalten

$$1 = A(x+1)^2(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+2) + D(x+1)^3$$

und daraus

$$A = 1, \quad B = -1 \quad C = 1 \quad D = -1\,.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4+10x^3+18x^2+14x+3}{x^4+5x^3+9x^2+7x+2}\,\mathrm{d}\,x &= \int 2 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[2x + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \ln|x+2|\right].\end{aligned}$$

(c) Nach der Formel aus 3.4.9 gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{\sqrt{4}}{4^2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}\,u + \left[\frac{u}{2(u^2+1)}\right]\right) \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\arctan(u) + \frac{u}{2(u^2+1)}\right] \\ &= \left[\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right]\end{aligned}$$

Aufgabe H 70. *Universalsubstitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)(1+\sin(x))}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \int \frac{-2}{u^2-2u-1}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}(u+\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}(u-\sqrt{2}-1}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|u+\sqrt{2}-1| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|u-\sqrt{2}-1|\right] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}-1\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}-1\right|\right]\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}\left(1+\frac{2u}{1+u^2}\right)}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \int \frac{2(1+u^2)}{(1-u^2)(1+u)^2}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \int \frac{2+2u^2}{(1-u)(1+u)^3}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \int \frac{-\frac{1}{2}}{u-1}+\frac{\frac{1}{2}}{u+1}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{2}{(u+1)^3}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln|u-1|+\frac{1}{2}\ln|u+1|-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}-\frac{1}{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2}\right]
\end{aligned}$$

Aufgabe H 71. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Berechnen Sie das folgende Integral. $\int (\sin(x))^2(\cos(x))^3\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: vergleiche Aufgabe H 60.

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x &\mapsto (\sin(x))^3(\cos(x))^4\,, \\
s_m\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x &\mapsto \sin(mx)\,, \\
c_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x &\mapsto \cos(nx)\,.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie f als Linearkombination der Funktionen $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$.

(c) Berechnen Sie das folgende Integral. $\int (\sin(x))^3(\cos(x))^4\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}
\int (\sin(x))^2(\cos(x))^3\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{16}\cos(3x)-\frac{1}{16}\cos(5x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{48}\sin(3x)-\frac{1}{80}\sin(5x)\right]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(\sin(x))^3(\cos(x))^4 &= \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^3\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^4 \\
&= \frac{\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\,x}-\frac{\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\,x}+\frac{\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\,x}-\frac{\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\,x}-\frac{3\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,x}+\frac{3\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,x} \\
&\quad -\frac{3\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}+\frac{3\mathrm{i}}{128}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x} \\
&= -\frac{1}{64}\sin(7x)-\frac{1}{64}\sin(5x)+\frac{3}{64}\sin(3x)+\frac{3}{64}\sin(x)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int(\sin(x))^3(\cos(x))^4\,\mathrm{d}\,x &= \int -\frac{1}{64}\sin(7x)-\frac{1}{64}\sin(5x)+\frac{3}{64}\sin(3x)+\frac{3}{64}\sin(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{1}{488}\cos(7x)+\frac{1}{320}\cos(5x)-\frac{3}{192}\cos(3x)-\frac{3}{192}\cos(x)\right]
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 72. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x+1|}}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}+\frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}\,t$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Integrand $1/\sin(x)$ ist nicht definiert in $-\pi$, 0 und π. Zur Konvergenzuntersuchung unterteilen wir das Integral also wie folgt.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Das fragliche Integral konvergiert genau dann, wenn alle vier Teilintegrale konvergieren. Dies ist aber nicht der Fall. Wir wollen uns von der Divergenz von $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$ überzeugen. Es gilt

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{\sin(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

Nach dem Grenzwertkriterium 3.7.11 konvergiert also $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$ genau dann, wenn $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert. Das ist nicht der Fall, denn

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to 0+0} \left[\ln|x|\right]_a^{\frac{\pi}{2}} = +\infty$$

Alternative Lösung: Mit der Universalsubstitution aus Aufgabe P 73 gilt

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1+(u(x))^2}{2u(x)}\frac{2}{1+(u(x))^2}\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{1}{u(x)}\,\mathrm{d}\,u = \left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right].$$

Wir betrachten:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin(x)} \,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to\pi-0} \left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right]_{\frac{\pi}{2}}^{a} \\ &= \lim_{a\to\pi-0} \ln\left|\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right| - \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \\ &= \lim_{a\to\pi-0} \ln\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da dort $\tan$ gegen $+\infty$ strebt.

(b) Zuerst teilen wir das Integral auf, um den Betrag weglassen zu können, und erhalten

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \,\mathrm{d}\,x = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{\sqrt{-(x+1)}} \,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \,\mathrm{d}\,x.$$

Nun berechnen wir die beiden Integrale getrennt:

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{\sqrt{-(x+1)}} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to-1-0} \int_{-3}^{a} \frac{1}{\sqrt{-(x+1)}} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to-1-0} \left[-2\sqrt{-(x+1)}\right]_{-3}^{a} = 2\sqrt{2},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to-1+0} \int_{a}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \lim_{a\to-1+0} \left[2\sqrt{x+1}\right]_{a}^{1} = 2\sqrt{2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \,\mathrm{d}\,x = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

(c) Wir integrieren zuerst unbestimmt die einzelnen Integrale. Es folgt

$$\int \frac{2}{x} \,\mathrm{d}\,x = 2\left[\ln|x|\right] = \left[\ln\left(x^2\right)\right]$$

und mit der Substitution $u = \cos(x) - 1$ folgt weiter

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\sin(x)}{u} \frac{1}{-\sin(x)} \,\mathrm{d}\,u = -\left[\ln(u)\right] = -\left[\ln|\cos(x)-1|\right].$$

Zusammen ergibt sich

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x} \,\mathrm{d}\,x = \left[\ln\left|\frac{x^2}{\cos(x)-1}\right|\right].$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to 0+0} \int_a^\pi \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{a\to 0+0} \left[\ln\left|\frac{x^2}{\cos(x)-1}\right|\right]_a^\pi = \lim_{a\to 0+0} \left[\ln\left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)\right]_a^\pi \\
&= \ln\left(\frac{\pi^2}{1-\cos(\pi)}\right) - \lim_{a\to 0+0} \ln\left(\frac{a^2}{1-\cos(a)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\pi^2}{2}\right) - \ln\left(\lim_{a\to 0+0} \frac{a^2}{1-\cos(a)}\right).
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term ergibt sich mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{a\to 0+0} \frac{a^2}{1-\cos(a)} = \lim_{a\to 0+0} \frac{2a}{\sin(a)} = \lim_{a\to 0+0} \frac{2}{\cos(a)} = 2.$$

Gesamt ergibt sich

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln\left(\frac{\pi^2}{2}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}\right).$$

Bemerkung zum Grenzwert:
Eine Alternative, wie man $\lim\limits_{a\to 0+0} \frac{a^2}{1-\cos(a)}$ bestimmen kann, wäre den Grenzwert von $\frac{1-\cos(a)}{a^2}$ zu bestimmen, indem man die Taylorreihe von $\cos(a)$ verwendet. Denn es ist $\cos(a) = 1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4!}a^4 - \dots$, womit $\frac{1-\cos(a)}{a^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4!}a^2 + \dots$ ist und für a gegen 0 lediglich $1/2$ als Grenzwert verbleibt.

(d) Mit der Substitution $t^3 = u$ gilt

$$\int \frac{3t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{3t^2}{1+u^2}\frac{1}{3t^2}\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u = \left[\arctan(t^3)\right].$$

Mit der Achsensymmetrie der Funktion ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}\,t = 2\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{3t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}\,t = 2\lim_{a\to+\infty} \left[\arctan(t^3)\right]_0^a = \pi.$$

Aufgabe H 73. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{(x-1)^2}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\left|\frac{\sin(x)\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\right| \leqq \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ im Intervall $[0,+\infty)$ und das Integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert nach Beispiel 3.7.12. Somit ist $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ nach dem Majorantenkriterium 3.7.5 absolut konvergent.
Achtung: Das Grenzwertkriterium ist hier **nicht** anwendbar, da die Funktion wegen $\sin(x)\cos(x)$ nicht positiv ist auf dem Intervall!

(b) Wir definieren

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{g(x)}{(x^2-2x+1)/(x^4+x^2)} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2+1}{x^2-2x+1} = 1.$$

Da $g(x)$ und $\frac{(x-1)^2}{x^4+x^2}$ auf dem Intervall $[-1,0)$ positiv und stetig sind, hat nach Satz 3.7.11

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{(x-1)^2}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}\,x \text{ dasselbe Konvergenzverhalten wie } \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

Aber nach Beispiel 3.7.9 divergiert $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$, womit auch $\int\limits_{-1}^{0} \frac{(x-1)^2}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ divergiert.

(c) Wir teilen das Integral auf und erhalten

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das Integral konvergiert nicht, denn

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x \geqq \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{x^3}{\sqrt{x^8+x^8}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to+\infty} \left[\frac{\ln a}{\sqrt{2}}\right] = +\infty.\end{aligned}$$

Alternativlösung mit Grenzwertkriterium:
Es wird wieder das Integral aufgeteilt und es wird nur der Summand $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x$ betrachtet. Wir definieren

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{(x^3+3)/(x^4\sqrt{1+1/x^8})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\sqrt{1+1/x^8}}{x^3+3} = 1.$$

Da $g(x)$ und $\dfrac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}$ auf dem Intervall $[1,+\infty)$ positiv und stetig sind, hat nach Satz 3.7.11

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x \text{ dasselbe Konvergenzverhalten wie } \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Aber es gilt

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to+\infty} [\ln(x)]_1^a = \lim_{a\to+\infty} \ln(a) - 0 = +\infty.$$

Damit divergiert auch das ursprüngliche Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x$.

(d) Wir bestimmen zuerst die Nullstellen von x^2-2x-1. Diese sind $x_{1,2} = 1\pm\sqrt{2}$. Damit teilen wir das Integral auf

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^{1+\sqrt{2}} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das Integral $\displaystyle\int\limits_0^{1+\sqrt{2}} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert (Satz 3.5.5), weil die Funktion $\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}$ stetig ist auf dem Intervall $[0,1+\sqrt{2}]$. Wir bemerken, dass $\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3} \geqq 0$ ist auf dem Intervall $[1+\sqrt{2},+\infty)$. Weiterhin gilt für $x>0$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2-2x-1}{x^6+3x^4+3x^2+1} \leqq \frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}.$$

Das Integral $\displaystyle\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert, denn es gilt

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{1+\sqrt{2}}^a \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{x^{-3}}{3}\right]_{1+\sqrt{2}}^a = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})^3}.$$

Mit Hilfe des Majoranten-Kriteriums 3.7.5 erhalten wir die Konvergenz des Integrals $\displaystyle\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x$. Insgesamt konvergiert auch $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x$.

Alternativlösung mit Grenzwertkriterium:

Es wird wieder das Integral aufgeteilt und es wird nur der Summand $\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3} \,\mathrm{d}\,x$ betrachtet (der andere Summand konvergiert wie zuvor schon begründet). Wir definieren

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x^4}\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{(x^2-2x-1)/(x^6+3x^4+3x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3+3/x^2+1/x^4}{x^2-2x-1} = 1.$$

Da $g(x)$ und $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}$ auf dem Intervall $[1+\sqrt{2},+\infty)$ positiv und stetig sind, hat nach Satz 3.7.11

$$\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x \text{ dasselbe Konvergenzverhalten wie } \int\limits_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}\,x.$$

Wie schon oben nachgerechnet, konvergiert das Integral $\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}\,x$ und damit das gesamte Integral.

Aufgabe H 74. *Ober- und Untersummen*

Gegeben seien $f:[0,1]\to\mathbb{R}:x\mapsto\sqrt{\sin(\pi x)}$ und $I := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersummen von f zu den Partitionen

$$P := \left\{0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1\right\} \qquad \text{und} \qquad Q := \left\{0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}, 1\right\}$$

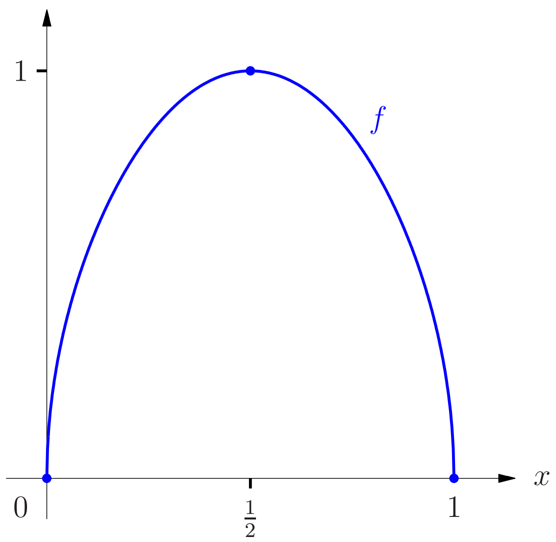
jeweils eine obere und eine untere Schranke für I.

(c) Finden Sie eine Verfeinerung R von Q mit $\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) \leqq 0{,}3$.

Hinweis: Zur Auswertung von f können elektronische Hilfsmittel benutzt werden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Schaubild von $f:[0,1]\to\mathbb{R}:x\to\sqrt{\sin(\pi x)}$ hat die folgende Gestalt:



(b) Mit den Funktionswerten $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$,

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = f\left(\tfrac{2}{3}\right) = \sqrt{\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{\tfrac{3}{4}} \approx 0.930605$$

und

$$f\left(\tfrac{1}{6}\right) = f\left(\tfrac{5}{6}\right) = \sqrt{\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 0.707107$$

ergeben sich die Untersummen (hellgraue Rechtecke)

$$\underline{S}(f,P) = \tfrac{1}{3}\,f(0) + \tfrac{1}{3}\,f\left(\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{3}\,f(1) \approx 0.310202 \quad \text{und}$$

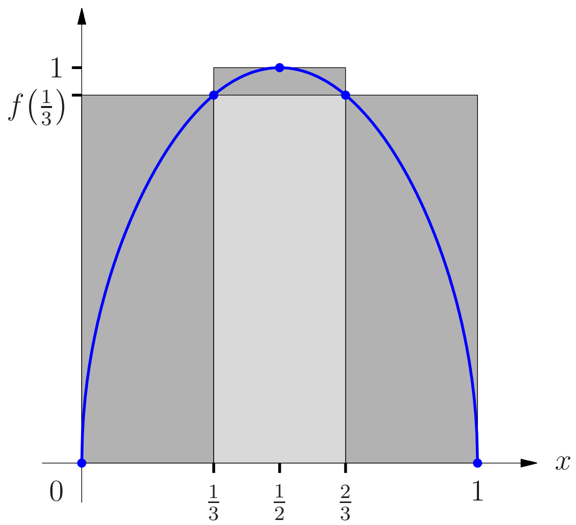
$$\underline{S}(f,Q) = \tfrac{1}{6}\,f(0) + \tfrac{2}{3}\,f\left(\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{1}{6}\,f(1) \approx 0.471405,$$

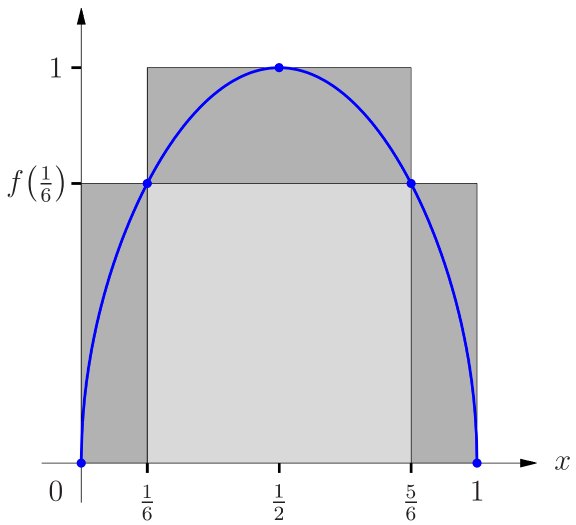
sowie die Obersummen (hellgraue + dunkelgraue Rechtecke)

$$\overline{S}(f,P) = \tfrac{1}{3}\,f\left(\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{3}\,f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\,f\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 0.953737 \quad \text{und}$$

$$\overline{S}(f,Q) = \tfrac{1}{6}\,f\left(\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{2}{3}\,f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{6}\,f\left(\tfrac{5}{6}\right) \approx 0.902369$$

vgl. die nachfolgenden Abbildungen.





Mit der Partition P kann der Wert von I durch $0.310201 \leqq I \leqq 0.953738$ eingegrenzt werden. Mit Q folgt die (bessere) Abschätzung $0.471404 \leqq I \leqq 0.902370$.

(c) Die Verfeinerung $R := P \cup Q = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}$ von Q liefert die Schranken

$$\underline{S}(f,R) = \tfrac{1}{6} f(0) + \tfrac{1}{6} f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{3} f\big(\tfrac{1}{3}\big) + \tfrac{1}{6} f(\tfrac{5}{6}) + \tfrac{1}{6} f(1) \approx 0.545904 \quad \text{und}$$

$$\overline{S}(f,R) = \tfrac{1}{6} f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6} f(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{3} f\big(\tfrac{1}{2}\big) + \tfrac{1}{6} f(\tfrac{2}{3}) + \tfrac{1}{6} f(\tfrac{5}{6}) \approx 0.879237,$$

die wegen $\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) \approx 0.333333$ noch zu weit auseinanderliegen. Durch Einfügen weiterer Punkte kann eine Differenz $\leqq 0{,}3$ erreicht werden. So ist z. B. für die Partition $R := \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 1\right\}$

$$\underline{S}(f,R) \approx 0.568202 \quad \text{und} \quad \overline{S}(f,R) \approx 0.864286$$

mit $\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) \approx 0.296084$, und für $R := \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right\}$ gilt

$$\underline{S}(f,R) \approx 0.630694 \quad \text{und} \quad \overline{S}(f,R) \approx 0.846177$$

mit $\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) \approx 0.215482$.

Aufgabe H 75. *Differentiation und Integration von Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe

$$u(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - n}\,.$$

Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren eine Potenzreihendarstellung von $u''(x)$.

(b) Stellen Sie $u'(x)$ und $u(x)$ auf $(-\varrho, \varrho)$ in geschlossener Form dar.

(c) Stellen Sie $v(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(s^2)\,\mathrm{d}s$ als Potenzreihe dar.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $u(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, mit $a_n = \dfrac{1}{n^2-n} = \dfrac{1}{n(n-1)}$, für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$.

Für den Konvergenzradius ϱ gilt nach 1.14.7

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\,(n-1)}{(n+1)\,n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1,$$

also $\varrho = 1$. Gliedweises Differenzieren gemäß Satz 3.8.4 liefert dann

$$u'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}\, x^{n-1} \qquad \text{und}$$

$$u''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

für alle $x \in (-\varrho, \varrho) = (-1, 1)$.

(b) Bei $u''(x)$ handelt es sich um die geometrische Reihe, d.h. es ist

$$u''(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x}\,, \qquad \text{für } \; x \in (-1,1),$$

vgl. Beispiel 3.8.8. Durch Integrieren erhält man zunächst

$$u'(x) \;=\; \int_0^x u''(t)\;\mathrm{d}t \;=\; \int_0^x \frac{1}{1-t}\;\mathrm{d}t \;=\; [\,-\ln|\,1-t\,|\,]_0^x \;=\; -\ln(1-x),$$

und hieraus folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
u(x) \;&=\; \int_0^x u'(t)\;\mathrm{d}t \;=\; -\int_0^x \ln(1-t)\;\mathrm{d}t \;=\; -\int_0^x 1\cdot\ln(1-t)\;\mathrm{d}t \\
&=\; -\,[\,t\ln(1-t)\,]_0^x \;-\; \int_0^x \frac{t}{1-t}\;\mathrm{d}t \;=\; -x\ln(1-x) \;-\; \int_0^x \frac{1}{1-t} - 1\;\mathrm{d}t \\
&=\; -x\ln(1-x) \;-\; [\,-\ln|1-t| - t\,]_0^x \;=\; -x\ln(1-x) \;+\ln(1-x) + x \\
&=\; x + (1-x)\ln(1-x),
\end{aligned}$$

für alle $x \in (-1,1)$. Hierbei wurde berücksichtigt, dass $u(0) = u'(0) = 0$ gelten muss und $1-x$ für $-1 < x < 1$ immer positiv ist.

(c) Einsetzen von $z = s^2$ in die aus Definition 1.14.17 bekannte Sinusreihe

$$\sin(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \qquad \text{für alle } \; z \in \mathbb{C}\,,$$

liefert die Reihendarstellung

$$\sin(s^2) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, s^{4n+2}, \qquad \text{für alle } \; s \in \mathbb{R}\,.$$

Durch gliedweise Integration gemäß Satz 3.8.4 ergibt sich

$$\begin{aligned}
v(x) \;&=\; \int_0^x \sin(s^2)\;\mathrm{d}s \;=\; \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, s^{4n+2}\;\mathrm{d}s \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x s^{4n+2}\;\mathrm{d}s \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}\, x^{4n+3}\,,
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Trainingstipp: Scheinklausur HM II vom 17. 6. 2006:
`www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/scheinklausuren/2006_06_17_SoSe06_HM2.pdf`

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 76. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den Gradienten ∇f und die Richtungsableitung $\partial_v f(P)$ in den folgenden Fällen:

(a) $f(x,y) = y^2 - x^2$, $\quad P = (3,4)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\mathsf{T}$

(b) $f(x,y,z) = \cos(y^2) + z\mathrm{e}^{xy}$, $\quad P = (0,0,\pi)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^\mathsf{T}$

(c) $f(x,y,z) = \ln(xyz\mathrm{e}^x)$, $\quad P = (1,1,1)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^\mathsf{T}$.

Bestimmen Sie außerdem in **(b)** alle zweiten partiellen Ableitungen.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix}, \ (\operatorname{grad} f)(3,4) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \ (\partial_v f)(3,4) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,.$$

(b)

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} yz\mathrm{e}^{xy} \\ -2y\sin(y^2) + xz\mathrm{e}^{xy} \\ \mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}, \quad (\operatorname{grad} f)(0,0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(0,0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{2/3}\,.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen sind

$$f_{xx} = y^2 z\mathrm{e}^{xy}, \ f_{yy} = -2\sin(y^2) - 4y^2\cos(y^2) + x^2 z\mathrm{e}^{xy}, \ f_{zz} = 0$$

sowie (unter Verwendung des Satz von Schwarz)

$$f_{yx} = f_{xy} = z\mathrm{e}^{xy} + xyz\mathrm{e}^{xy}, \ f_{xz} = f_{zx} = y\mathrm{e}^{xy}, \ f_{yz} = f_{zy} = x\mathrm{e}^{xy}\,.$$

(c) Es ist $\ln(xyz\mathrm{e}^x) = \ln x + \ln y + \ln z + x$ und daher

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix}, \quad (\operatorname{grad} f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Aufgabe H 77. *Funktionen in 2 Veränderlichen*

Finden Sie Funktionen $f_j \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $j \in \{1,2,3,4\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $f_1(0,0) = 1, \quad f_1(1,5) = 3$ und $f_1(2,2) = 7$

(b) Die Niveaumenge von f_2 zum Niveau 1 ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 = 1\right\}$, die Niveaumenge von f_2 zum Niveau 4 ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 = 2\right\}$ und f_2 ist stetig.

(c) f_3 ist an jeder Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ stetig und an der Stelle $(0,0)$ unstetig.

(d) Die Ableitung von f_4 an der Stelle $(1,1)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\intercal$ ist 4 und die Ableitung von f_4 an der Stelle $(1,1)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^\intercal$ ist 5.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion

$$f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \\ 3 & \text{für} \quad (x,y) = (1,5) \\ 7 & \text{für} \quad (x,y) = (2,2) \\ 17 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt offenbar die geforderten Eigenschaften.

(b) Die Funktion

$$f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^2$$

erfüllt die geforderten Eigenschaften, denn zum Niveau 1 ergibt sich

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &= 1 \\ (x^2+y^2)^2 &= 1 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

und zum Niveau 4 ergibt sich

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &= 4 \\ (x^2+y^2)^2 &= 4 \\ x^2+y^2 &= 2\,. \end{aligned}$$

(c) Die Funktion

$$f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \\ 17 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist für $(x,y) \neq (0,0)$ stetig. An der Stelle $(0,0)$ ist sie nicht stetig, denn für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,0)$ und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 17 \neq f(0,0)\,.$$

(d) Wir wollen eine eine stetig differenzierbare Funktion f_4 konstruieren. Deren Gradienten an der Stelle $(1,1)$ bezeichnen wir mit $(a,b)^\intercal$. Die beiden Bedingungen ergeben dann

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung $a = \frac{9}{2}\sqrt{2}, \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wir suchen also eine Funktion f_4, die an der Stelle $(1,1)$ den Gradienten $\begin{pmatrix} \frac{9}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ hat. Die Funktion

$$f_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \frac{9}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y$$

hat diese Eigenschaft.

Aufgabe H 78. *Nullstellenmenge skizzieren*

(a) Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto x(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1)(y^2 - \alpha x^2)$$

für $\alpha \in \{-1, 0, 1, 4\}$ an.

(b) Begründen Sie mit Hilfe der Skizze und Satz 4.2.18, dass f_1 mindestens 3 lokale Extremstellen hat.

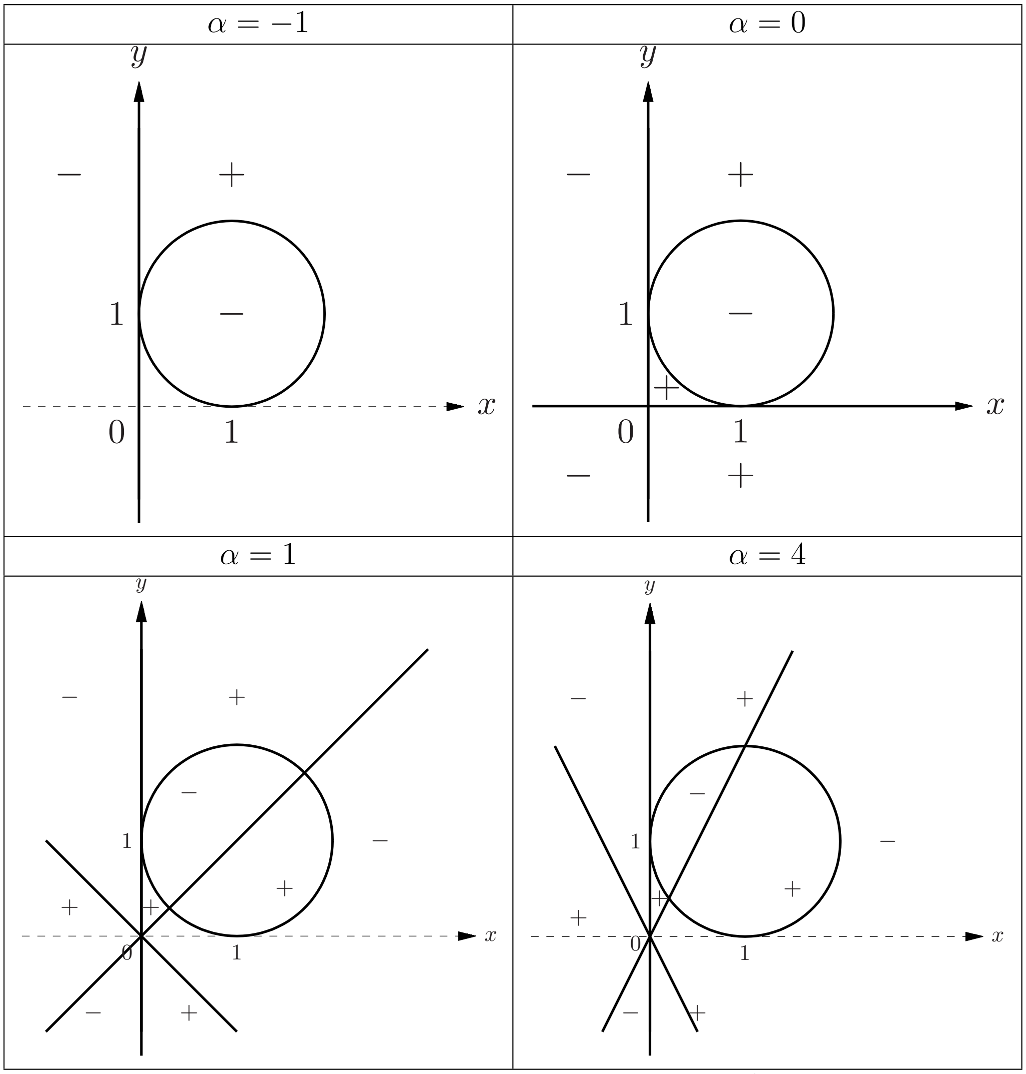
Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion f ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

$$f(x,y) = x((x-1)^2 + (y-1)^2 - 1)(y - \sqrt{\alpha}x)(y + \sqrt{\alpha}x)$$

Die Nullstellenmenge besteht also aus der y-Achse, dem Kreis um $(1,1)$ mit Radius 1 und den Geraden $y = \pm\sqrt{\alpha}x$ für $\alpha > 0$ bzw. der x-Achse für $\alpha = 0$. An jedem dieser Teile findet ein Vorzeichenwechsel statt mit Ausnahme der x-Achse im Fall $\alpha = 0$ (Doppelgerade bzw. „doppelte Nullstelle“).

Skizzen:



(b) Der Kreis, die y-Achse und die erste Winkelhalbierende definieren drei voneinander getrennte kompakte Mengen. Nach Satz 4.2.18 muss auf jeder dieser Mengen das Maximum und Minimum angenommen werden. Der Rand gehört aber jeweils zur Nullstellenmenge also muss im Inneren jeweils noch ein Extremum liegen (je nach Vorzeichen ein Maximum bei „+“ oder ein Minimum bei „-“).

Aufgabe H 79. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen von f zu den Niveaus 0 und 1.

(b) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$ die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

(c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,0)$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$.

(d) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = (0,0)$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

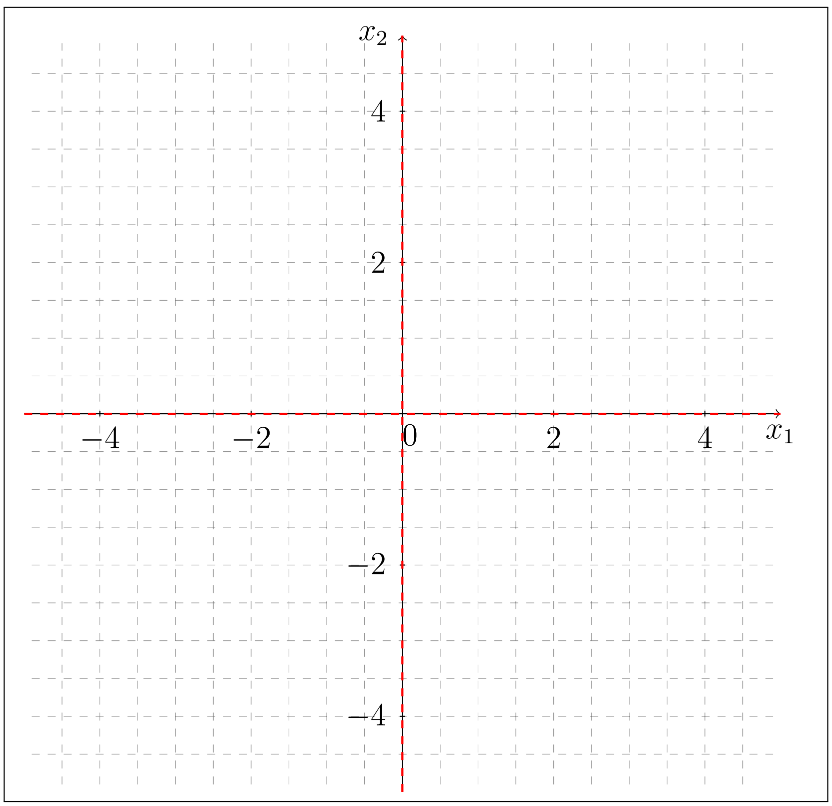
(e) Ist f stetig im Punkt $(0,0)$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die Niveaumenge zum Niveau 0:

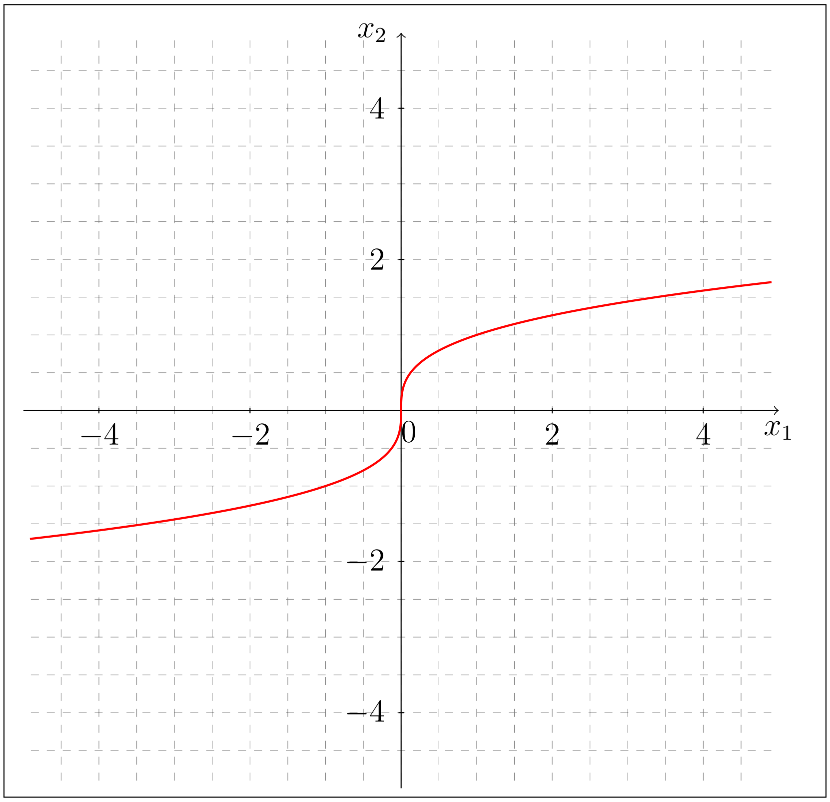
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^6} & = & 0 \\ 2xy^3 & = & 0 \\ x=0 & \text{oder} & y=0 \end{array}$$

Die Niveaumenge besteht also aus den beiden Koordinatenachsen.



Wir berechnen die Niveaumenge zum Niveau 1:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^6} & = & 1 \\ 2xy^3 & = & x^2+y^6 \\ 0 & = & x^2-2xy^3+y^6 \\ 0 & = & (x-y^3)^2 \\ 0 & = & x-y^3 \end{array}$$



(b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^6} = 1$$

(c) Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = (0,0)$ sowie $f(b_n) = 0$.

(d) Für die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} a_n & \text{für } n \text{ gerade} \\ b_n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = (0,0)$ und

$$f(c_n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Daher hat die Folge $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte und ist divergent.

(e) Die Funktion nach 4.2.7 ist nicht stetig an der Stelle $(0,0)$, da die gegen $(0,0)$ konvergente Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem vorhergehenden Aufgabenteil divergiert.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 80. *Taylorpolynom*

In der Relativitätstheorie wird die Energie E eines Teilchens der Masse m in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beschrieben durch

$$E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon v \mapsto E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}}},$$

wobei $v = (v_1, v_2, v_3)$ den Geschwindigkeitsvektor und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Funktion E der Stufe 2

(a) um den Entwicklungspunkt $v = (0, 0, 0)$.

(b) um den Entwicklungspunkt $v = \left(\frac{c}{2}, 0, 0\right)$.

Lösungshinweise hierzu: Der Gradient und die Hesse-Matrix von E sind

$$\nabla E(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}}^3} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3mv_1^2}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} + \frac{m}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{3/2}} & \frac{3mv_1v_2}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_1v_3}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} \\ \frac{3mv_1v_2}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_2^2}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} + \frac{m}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{3/2}} & \frac{3mv_2v_3}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} \\ \frac{3mv_1v_3}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_2v_3}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} & \frac{3mv_3^2}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{5/2}c^2} + \frac{m}{\left(1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}\right)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

mit $\langle v\,|\,v\rangle = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.
Einsetzen der Stelle $(0, 0, 0)$ ergibt

$$T_2(E, v, (0, 0, 0)) = mc^2 + \frac{1}{2}m\,\langle v\,|\,v\rangle = mc^2 + \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) .$$

Einsetzen der Stelle $(\frac{c}{2}, 0, 0)$ ergibt

$$T_2\left(E, v, \left(\frac{c}{2}, 0, 0\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}mc^2 + \frac{4}{3\sqrt{3}}mc\left(v_1 - \frac{c}{2}\right) + \frac{4}{3\sqrt{3}}m\left(2\left(v_1 - \frac{c}{2}\right)^2 + v_2^2 + v_3^2\right) .$$

Aufgabe H 81. *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von f. Bestimmen Sie deren Typ: welche sind lokale Maximalstellen, welche sind lokale Minimalstellen, welche sind Sattelpunkte?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - y^2)(x^2 - 4)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \exp(2x^3 + 3y^2 - 6xy)$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy^2 + yz$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit $f(x, y) = (x - y^2)(x^2 - 4) = -x^2y^2 + x^3 + 4y^2 - 4x$ gilt:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} -2xy^2 + 3x^2 - 4 \\ 8y - 2x^2y \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y^2 + 6x & -4xy \\ -4xy & 8 - 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Nullsetzen des Gradienten ergibt die kritischen Stellen $P_1 = (\sqrt{4/3}, 0)$, $P_2 = (-\sqrt{4/3}, 0)$, $P_3 = (2, \sqrt{2})$ und $P_4 = (2, -\sqrt{2})$. Einsetzen in die Hessematrix ergibt:

$$\mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} 12/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 8 - 8/3 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit (nur positive Eigenwerte). Es liegt ein lokales Minimum vor.

$$\mathrm{H}f(P_2) = \begin{pmatrix} -12/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 8 - 8/3 \end{pmatrix}$$

ist indefinit (negative Determinante). Es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$\mathrm{H}f(P_3) = \begin{pmatrix} 8 & -8\sqrt{2} \\ -8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ist indefinit (negative Determinante). Es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$\mathrm{H}f(P_4) = \begin{pmatrix} 8 & 8\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ist indefinit (negative Determinante). Es liegt ein Sattelpunkt vor.

(b) Mit $f(x, y) = \exp(2x^3 + 3y^2 - 6xy)$ gilt:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \mathrm{e}^{(2x^3+3y^2-6xy)} \begin{pmatrix} 6x^2 - 6y \\ 6y - 6x \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x, y) = \mathrm{e}^{(2x^3+3y^2-6xy)} \begin{pmatrix} 12x + (6x^2 - 6y)^2 & -6 + (6x^2 - 6y)(6y - 6x) \\ -6 + (6x^2 - 6y)(6y - 6x) & 6 + (6y - 6x)^2 \end{pmatrix}.$$

Nullsetzen des Gradienten ergibt die kritischen Stellen $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (1, 1)$. Einsetzen in die Hessematrix ergibt:

$$\mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

ist indefinit (negative Determinante). Es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$\mathrm{H}f(P_2) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

hat positive Determinante und $f_{xx}(P_2) > 0$. Nach 4.5.8 liegt ein lokales Minimum vor.

(c) Mit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy^2 + yz$ gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ 2y + 2xy + z \\ 2z + y \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2y & 0 \\ 2y & 2+2x & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nullsetzen des Gradienten ergibt die kritischen Stellen $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (-3/4, \sqrt{3/2}, -1/2\sqrt{3/2})$ und $P_3 = (-3/4, -\sqrt{3/2}, 1/2\sqrt{3/2})$. Einsetzen in die Hessematrix ergibt:

$$\mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Somit ist die Matrix positiv definit und es liegt ein lokales Minimum vor.

$$\mathrm{H}f(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3/2$. Somit ist die Matrix indefinit und es liegt ein Sattelpunkt vor.

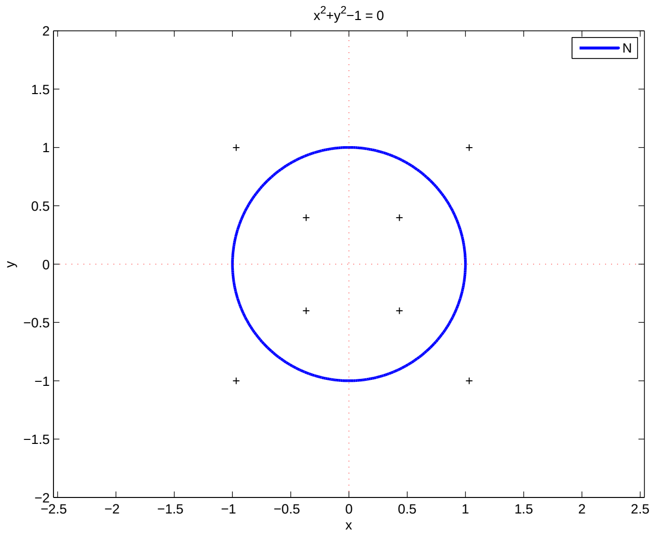
$$\mathrm{H}f(P_3) = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{6} & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3/2$. Somit ist die Matrix indefinit und es liegt ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe H 82. *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 1.$$



(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge N und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$. Für welche $P \in N$ ist $\det(\mathrm{H}f(P)) = 0$?

(c) Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von f und geben Sie deren Typ an.

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben zuerst

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 1 = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 .$$

(a) Wegen $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 \geqq 0$ ist die Nullstellenmenge gerade $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis (es liegen doppelte Nullstellen vor). Das Vorzeichen der Funktion f ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ positiv (vgl. Bild).

(b) Mit $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x\,(x^2 + y^2 - 1) \\ 4y\,(x^2 + y^2 - 1) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 4\,(x^2 + y^2 - 1) + 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 4\,(x^2 + y^2 - 1) + 8y^2 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für alle $P \in N$

$$\det(\mathrm{H}f(P)) = 8x^2\,8y^2 - 8xy\,8xy = 0.$$

(c) Nullsetzen des Gradienten ergibt die Menge der kritischen Stellen $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid P \in N \vee P = (0,0)\}$. Somit sind alle $P \in N$ und der Punkt $(0,0)$ kritische Stellen von f. Da $\det(\mathrm{H}f(P)) = 0$ für alle $P \in N$ betrachten wir das Vorzeichen der Funktion.

Dieses ist außerhalb von N immer positiv, womit alle $P \in N$ absolute Minima sind. Für den Punkt $(0,0)$ betrachten wir die Hessematrix

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Diese hat nur negative Eigenwerte und ist damit negativ definit. Es liegt also ein lokales Maximum vor.

Aufgabe H 83. *Taylorpolynom*

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$$

um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen den Gradienten von f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y}{(x+y)^2} \\ -\dfrac{2x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

Und die Hessematrix:

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{4y}{(x+y)^3} & \dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3} \\ \dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3} & \dfrac{4x}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Entwicklungspunktes $(1,1)$ ergibt

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2.$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 zur Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$$

um den Entwicklungspunkt $(-1,-1)$. Begründen Sie, dass das zugehörige Restglied verschwindet.

Hinweis: Benutzen Sie 4.4.19 .

Lösungshinweise hierzu: Nach 4.4.19 ist die Taylorentwicklung eindeutig. Das bedeutet, dass die Umschreibung von $g(x,y)$ in der Form

$$g(x,y) = a+b_0(x+1)+b_1(y+1)+\sum_{j=0}^{2} c_j(x+1)^j(y+1)^{2-j}+\sum_{k=0}^{3} d_k(x+1)^k(y+1)^{3-k},$$

$a, b_0, b_1, c_j, d_k \in \mathbb{R}$, nichts anders als das Bestimmen des Taylorpolynoms dritter Stufe ist. Durch die Substitution von $u = x+1$ (also $x = u-1$) und $v = y+1$ (also $y = v-1$) in der Funktion $g(x,y)$, können wir obige Umschreibung leicht erhalten. Es gilt damit

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= g(u-1, v-1) \\
&= \frac{1}{3}(u-1)^3 - (u-1)^2 + (v-1)^3 - 12(v-1) \\
&= \frac{1}{3}(u^3 - 3u^2 + 3u - 1) - (u^2 - 2u + 1) + (v^3 - 3v + 3v - 1) - 12v + 12 \\
&= \frac{1}{3}u^3 - u^2 + u - \frac{1}{3} - u^2 + 2u - 1 + v^3 - 3v^2 + 3v - 1 - 12v + 12 \\
&= \frac{29}{3} + 3u - 9v - 2u^2 - 3v^2 + \frac{1}{3}u^3 + v^3 \\
&= \frac{29}{3} + 3(x+1) - 9(y+1) - 2(x+1)^2 - 3(y+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3 + (y+1)^3
\end{aligned}$$

Das Restglied verschwindet, da $g(x,y)$ als Polynom dritten Grades durch das Taylorpolynom der Stufe 3 exakt beschrieben wird. Alle partiellen Ableitungen vierter Ordnung sind gleich null und somit gibt es keine Terme vierter Ordnung.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 84. *Extrema auch mit Nebenbedingung*

Ein Tetraeder hat die Ecken

$$A = (0,0,0)\,, \quad B = (1,0,0)\,, \quad C = (0,3,0)\,, \quad D = (0,0,5)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Funktion $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon P \mapsto S(P)$, die die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes P von den Ecken des Tetraeders angibt.

(b) Bestimmen Sie den Punkt R, für den S minimal ist.

(c) Bestimmen Sie den Punkt K auf der Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, für den S minimal ist.

(d) Welcher der Werte $S(R)$ oder $S(K)$ ist der größere?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Summe der Quadrate des Abstands ist für $P = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &= (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 + (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 \\ &\quad + (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2 + (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-5)^2 \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x - 6y - 10z + 35 \\ &= 4(x-1/4)^2 + 4(y-3/4)^2 + 4(z-5/4)^2 + 105/4 \end{aligned}$$

(b) Der Gradient ist

$$\operatorname{grad} S(x,y,z) = (8x-2, 8y-6, 8z-10)^\intercal\,,$$

und setzt man dessen Komponenten zu 0 erhält man den kritischen Punkt R : $(1/4, 3/4, 5/4)$ mit $S(1/4, 3/4, 5/4) = 105/4$. Da die Funktion ein Minimum besitzen muss (stetig und nach unten beschränkt, beliebig groß für genügend weit entfernte Punkte), muss dies am einzigen kritischen Punkt angenommen werden. Man sieht dies auch an der quadratisch ergänzten Darstellung der Funktion S. Für r verschwinden die Klammer-Terme und die Konstante als Minimalwert bleibt.

(c) Die Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ hat den Gradienten

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)^\intercal$$

und die Bedingung $\operatorname{grad} S + \lambda \operatorname{grad} g = 0$ liefert

$$(x,y,z) = \frac{1}{8+2\lambda}(2,6,10)\,.$$

Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, erhält man eine quadratische Gleichung für λ

$$4\lambda^2 + 32\lambda + 64 = 140$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{35}\,.$$

Die kritischen Stellen sind

$$\pm\frac{1}{\sqrt{35}}(1,3,5)$$

und da die Punkte A, B, C und D nicht negative Koordinaten haben ist Abstand bei dem kritischen Punkt mit positiven Koordinaten kleiner.

(d) Da $S(K)$ die Funktion auf einer kleineren Menge minimiert (nur die Punkte, die die Nebenbedingung erfüllen) muss das Minimum auf der größeren Menge $S(R)$ kleiner sein.

Aufgabe H 85. *Abstand zweier Mengen*

Die Gerade G und die Ellipse E sind gegeben durch

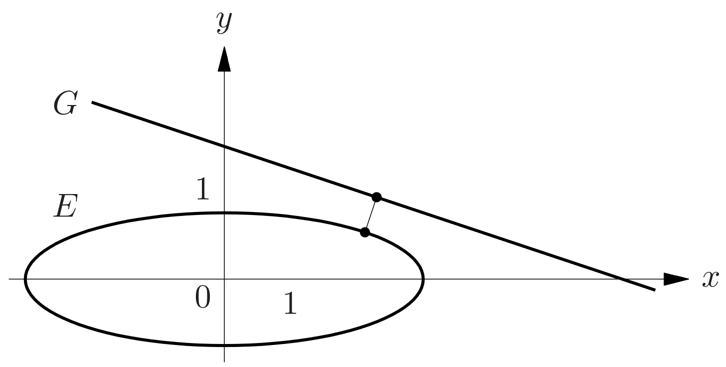
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 6\} \qquad \text{und} \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 = 9\}\,.$$

Skizzieren Sie G und E. Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren den Abstand von G und E.

Hinweis: Es ist der Abstand zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ zu minimieren, von denen der eine die Geradengleichung und der andere die Ellipsengleichung erfüllt – die zu minimierende Funktion hat also vier Variablen. Da die Wurzelfunktion streng monoton wächst, kann statt des Abstands auch das Quadrat des Abstands minimiert werden.

Lösungshinweise hierzu:

Skizze:



Für einen Punkt $(x_1, y_1) \in G$ und $(x_2, y_2) \in E$ ist

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

zu minimieren, wobei die Nebenbedingungen

$$x_1 + 3y_1 - 6 = 0\,, \quad x_2^2 + 9y_2^2 - 9 = 0$$

erfüllt sein müssen.

Es ergeben sich die Lagrange-Bedingungen

$$\begin{aligned} 2(x_1 - x_2) + \lambda &= 0\,, & (1)\\ -2(x_1 - x_2) + 2\mu x_2 &= 0\,, & (2)\\ 2(y_1 - y_2) + 3\lambda &= 0\,, & (3)\\ -2(y_1 - y_2) + 18\mu y_2 &= 0\,, & (4)\\ x_1 + 3y_1 - 6 &= 0\,, & (5)\\ x_2^2 + 9y_2^2 - 9 &= 0\,. & (6) \end{aligned}$$

Da die Gerade die Ellipse nicht schneidet (Skizze oder Einsetzen der Geradengleichung in die Ellipsengleichung führt auf keine reelle Lösung) ist $x_1 \neq x_2$ oder $y_1 \neq y_2$ und damit mussen $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ sein.
Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $\lambda = -2\mu x_2$ und aus dem zweiten Paar $3\lambda = -18\mu y_2$. Daraus ergibt sich $6\mu x_2 = 18\mu y_2$ bzw. $x_2 = 3y_2$.
Eingesetzt in die Ellipsengleichung folgt daraus $y_2 = \pm 1/\sqrt{2}$ und $x_2 = \pm 3/\sqrt{2}$, wobei das globale Minimum an der Stelle im ersten Quadranten angenommen wird.
Auflösen der ersten und dritten Gleichung nach x_1 bzw. x_2 und Einsetzen in die Geradengleichung ergibt $\lambda = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{\sqrt{2}} - 6\right)$ und damit $x_1 = \frac{12}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5}$ und $y_1 = \frac{-4}{5\sqrt{2}} + \frac{9}{5}$.
Für den minimalen Abstand ergibt sich dann $3(2-\sqrt{2})/\sqrt{10}$
Bemerkung: Falls die Methode von Lagrange nicht verlangt wäre, wäre auch folgende Begründung möglich:
Die Punkte auf den Parallelen zur Geraden G haben jeweils den gleichen Abstand.
Es ist also der Punkt auf der Ellipse zu suchen, an dem die Tangente die Steigung der Geraden, $-1/3$, hat. Mit $y = f(x) = \sqrt{9-x^2}/3$ ist $f'(x) = -x/(3\sqrt{9-x^2})$ und Gleichsetzen mit $-1/3$ liefert $x = \pm 3/\sqrt{2}$. Einsetzen in f und Parallelverschiebung liefert dann den y-Wert und den zweiten Punkt.

Aufgabe H 86. *Jacobi–Matrizen*

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f\,(x,y,z)$ und $\mathrm{J}f\,(1,2,3)$ für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy\sin(\pi z)\\ \sin(\pi xyz)\end{pmatrix}\,.$$

(b) Bestimmen Sie total differenzierbare Funktionen $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass

$$\mathrm{J}g\,(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{J}h\,(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y\\ 2xy & x^2\end{pmatrix}, \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

und $h(1,1) = (1,1)^{\mathsf{T}}$. Geben Sie $\mathrm{J}(g\circ h)\,(1,1)$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch partielles Differenzieren der Komponentenfunktionen

$$f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto xy\sin(\pi z) \qquad \text{und} \qquad f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sin(\pi xyz)$$

nach x, y und z erhält man

$$\mathrm{J}f\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\sin(\pi z) & x\sin(\pi z) & \pi xy\cos(\pi z) \\ \pi yz\cos(\pi xyz) & \pi xz\cos(\pi xyz) & \pi xy\cos(\pi xyz) \end{pmatrix},$$

und Einsetzen von $(x,y,z) = (1,2,3)$ liefert

$$\mathrm{J}f\,(1,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\pi \\ 6\pi & 3\pi & 2\pi \end{pmatrix}.$$

(b) Nach Beispiel 4.7.5 besitzt die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3y-x \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt $(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2$ — und damit auch in $(1,1)^\intercal$ — die Jacobi–Matrix

$$\mathrm{J}g\,(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Komponentenfunktionen von $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h_1(x,y) \\ h_2(x,y) \end{pmatrix}$ müssen

$$\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y} = x^2$$

erfüllen. Aus der ersten Bedingung folgt durch Integration nach x

$$h_1(x,y) = x^3 + c(y),$$

mit einem nur von y abhängigen Term $c(y)$, den wir als differenzierbare Funktion von y auffassen. Die zweite Bedingung lautet dann

$$\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} = 0 + c'(y) = -2y,$$

d. h. $c(y) = -y^2 + \tilde{c}$, mit einer von x und y unabhängigen Konstanten $\tilde{c}$.
Auf gleiche Weise erhält man aus der dritten Bedingung durch Integration nach x

$$h_2(x,y) = x^2 y + d(y),$$

und aus der vierten Bedingung

$$\frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y} = x^2 + d'(y) = x^2$$

folgt $d'(y) = 0$, also $d(y) = \tilde{d}$, mit einer Konstanten $\tilde{d}$. Insgesamt ist

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} h_1(x,y) \\ h_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - y^2 + \tilde{c} \\ x^2 y + \tilde{d} \end{pmatrix},$$

und die zusätzliche Bedingung $h(1,1) = (1,1)^\mathsf{T}$ liefert $\tilde{c} = 1$ und $\tilde{d} = 0$.
Mit Hilfe der Kettenregel 4.8.3 ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(g \circ h)\,(1,1) &= (\mathrm{J}g\,(h(1,1)))(\mathrm{J}h\,(1,1)) = (\mathrm{J}g\,(1,1))(\mathrm{J}h\,(1,1)) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 87. *Tangente und Tangentialebene*
Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2$ und die Ebene $E : z = 2$.

(a) Um was für ein geometrisches Objekt handelt es sich bei der Niveaumenge

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 1\} \;?$$

(b) Berechnen Sie die Tangentialebenen an N in den Punkten $(1,0,0)$ und $(2,1,2)$.

(c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Tangente an $E \cap N$ im Punkt $(2,1,2)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Bedingung

$$f(x,y,z) = 1 \iff x^2 + y^2 - z^2 = 1 \iff z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$$

entspricht der affinen Normalform eines *einschaligen Hyperboloids* in den Koordinaten $(x_1,x_2,x_3) = (z,x,y)$, vgl. „Lineare Algebra und Geometrie“, Klassifikation 6.3.7.

(b) Wegen $f(1,0,0) = f(2,1,2) = 1$ liegen die Punkte $(1,0,0)$ und $(2,1,2)$ auf N.
Die gesuchten Tangentialebenen können nun wie in Beispiel 4.9.4.2 bestimmt werden.
Der Normalenvektor der Ebene ist dabei stets der Gradient

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)^\mathsf{T}$$

von f an der jeweiligen Berührstelle. Für die Tangentialebene in $(1,0,0)$ erhält man auf diese Weise die Gleichung

$$\operatorname{grad} f(1,0,0) \bullet (x-1, y-0, z-0)^\mathsf{T} = 0 \iff (2,0,0)^\mathsf{T} \bullet (x-1,y,z)^\mathsf{T} = 0,$$

d. h. $2x - 2 = 0$, also $E_1 : x = 1$. Für die Tangentialebene in $(2,1,2)$ muss

$$\operatorname{grad} f(2,1,2) \bullet (x-2, y-1, z-2)^\mathsf{T} = 0 \iff (4,2,-4)^\mathsf{T} \bullet (x-2,y-1,z-2)^\mathsf{T} = 0$$

und damit $4x + 2y - 4z - 2 = 0$ gelten; dies liefert $E_2 : 2x + y - 2z = 1$.

(c) Die Punkte der Schnittmenge $E \cap N$ erfüllen die beiden Bedingungen

$$z = 2 \qquad \text{und} \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

und somit auch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1 + z^2 = 5$. Es handelt sich bei $E \cap N$ also um einen Kreis in der Ebene $E : z = 2$ mit Mittelpunkt $(0, 0, 2)$ und Radius $\sqrt{5}$.

Die Tangente an $E \cap N$ im Punkt $(2, 1, 2)$ kann z. B. als Schnittgerade der Tangentialebene E_2 aus **(b)** mit E bestimmt werden. Hierzu löst man die Gleichung von E_2 nach y auf und erhält mit $x = t$ und $z = 2$ die Parameterdarstellung

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 5 - 2t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alternativ kann man auch den Kreis $K = E \cap N$ durch die Funktion

$$C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{5}\cos(s) \\ \sqrt{5}\sin(s) \\ 2 \end{pmatrix}$$

parametrisieren und die Tangente im Punkt $(2, 1, 2)^\intercal = C(\arctan(\frac{1}{2}))$ als Gerade mit Stützvektor $(2, 1, 2)^\intercal$ und Richtungsvektor

$$C'(\arctan(\tfrac{1}{2})) = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}\sin(\arctan(\frac{1}{2})) \\ \sqrt{5}\cos(\arctan(\frac{1}{2})) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

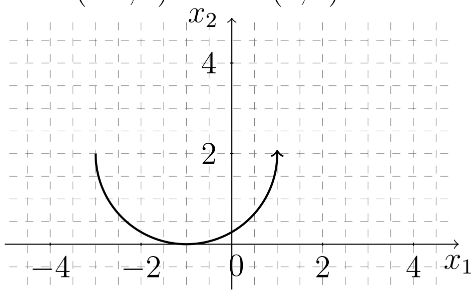
ansetzen. Dies liefert dieselbe Gerade, wobei zu beachten ist, dass die Parameterdarstellung von Geraden nur bis auf Skalierung des Richtungsvektors mit einem Faktor $\neq 0$ und Verschiebung des Stützpunktes längs der Geraden eindeutig ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

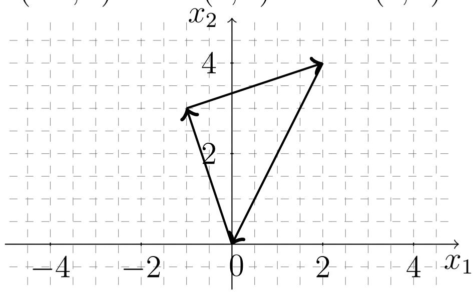
Aufgabe H 88. *Kurven*

Geben Sie jeweils eine Parametrisierung der abgebildeten Kurven an.

Stück eines Kreises um $(-1,2)^\intercal$ von $(-3,2)^\intercal$ nach $(1,2)^\intercal$



Streckenzug von $(0,0)^\intercal$ über $(-1,3)^\intercal$ und $(2,4)^\intercal$ nach $(0,0)^\intercal$



Berechnen Sie das Kurvenintegral des Feldes $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (-y,x)^\intercal$ längs der beiden Kurven.

Lösungshinweise hierzu: Eine mögliche Parametrisierung des Kreisausschnittes K_1 ist

$$C_1\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} -2\cos(t) - 1 \\ -2\sin(t) + 2 \end{pmatrix}.$$

Der Streckenzug K_2 lässt sich beispielsweise wie folgt parametrisieren:

$$C_2\colon [0,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} -t \\ 3t \end{pmatrix} & t \in [0,1], \\ \begin{pmatrix} 3t-4 \\ t+2 \end{pmatrix} & t \in (1,2], \\ \begin{pmatrix} -2t+6 \\ -4t+12 \end{pmatrix} & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Um die Kurvenintegrale $\int_{K_{1/2}} v(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ bestimmen zu können, werden die Ableitungen der Parametrisierungen benötigt. Diese sind

$$C_1'\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix}$$

und

$$C_2'\colon [0,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} & t \in (0,1), \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & t \in (1,2), \\ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} & t \in (2,3). \end{cases}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} v(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^\pi v(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 2\sin(t) - 2 \\ -2\cos(t) - 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi 4(\sin(t))^2 - 4\sin(t) + 4(\cos(t))^2 + 2\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi 4 - 4\sin(t) + 2\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= [4t + 4\cos(t) + 2\sin(t)]_0^\pi \\
&= (4\pi + 4\cos(\pi) + 2\sin(\pi)) - (0 + 4\cos(0) + 2\sin(0)) \\
&= 4\pi - 4 - 4 \\
&= 4\pi - 8
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{K_2} v(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^3 v(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 v(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 v(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_2^3 v(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 v\left(\begin{pmatrix} -t \\ 3t \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_1^2 v\left(\begin{pmatrix} 3t-4 \\ t+2 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&\qquad + \int_2^3 v\left(\begin{pmatrix} -2t+6 \\ -4t+12 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -3t \\ -t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_1^2 \begin{pmatrix} -t-2 \\ 3t-4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&\qquad + \int_2^3 \begin{pmatrix} 4t-12 \\ -2t+6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 3t - 3t\,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 -3t - 6 + 3t - 4\,\mathrm{d}\,t + \int_2^3 -8t + 24 + 8t - 24\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 0\,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 -10\,\mathrm{d}\,t + \int_2^3 0\,\mathrm{d}\,t \\
&= -10
\end{aligned}$$

Aufgabe H 89. *Potential*

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der folgenden Vektorfelder.

$$v_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z)^{\mathsf{T}} \mapsto \mathrm{e}^{xz^2} \begin{pmatrix} 5y^2 + 5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^2z \end{pmatrix}$$

$$v_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z)^{\mathsf{T}} \mapsto \mathrm{e}^{xz^2} \begin{pmatrix} 5y^2 + 5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^3z \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder ein Potential besitzen. Berechnen Sie ein Potential, falls das möglich ist. Ist dieses Potential eine harmonische Funktion?

Lösungshinweise hierzu: Die Divergenz der beiden Vektorfelder berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} v_1 &= \operatorname{div}\left(\mathrm{e}^{xz^2} \begin{pmatrix} 5y^2 + 5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^2z \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{e}^{xz^2}(5y^2z^2 + 5xy^2z^4) + \mathrm{e}^{xz^2}(5y^2z^2) + \mathrm{e}^{xz^2}(10x) + \mathrm{e}^{xz^2}(20x^3y^2z^2) + \mathrm{e}^{xz^2}(10x^2y^2) \\
&= 5\mathrm{e}^{xz^2}(4x^3y^2z^2 + 2x^2y^2 + xy^2z^4 + 2x + 2y^2z^2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} v_2 &= \operatorname{div}\left(\mathrm{e}^{xz^2} \begin{pmatrix} 5y^2 + 5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^3z \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{e}^{xz^2}(5y^2z^2 + 5xy^2z^4) + \mathrm{e}^{xz^2}(5y^2z^2) + \mathrm{e}^{xz^2}(10x) + \mathrm{e}^{xz^2}(20x^3y^2z^2) + \mathrm{e}^{xz^2}(10x^2y^3) \\
&= 5\mathrm{e}^{xz^2}(4x^3y^2z^2 + 2x^2y^3 + xy^2z^4 + 2x + 2y^2z^2)\,.
\end{aligned}$$

Die Rotation der beiden Vektorfelder berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} v_1 &= \operatorname{rot}\left(\mathrm{e}^{xz^2} \begin{pmatrix} 5y^2 + 5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^2z \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{e}^{xz^2} \begin{pmatrix} 20x^2yz - 20x^2yz \\ 10xy^2z + 10x^2y^2z^3 + 10xy^2z - 10x^2y^2z^3 - 20xy^2z \\ 10xyz^2 + 10y - 10y - 10xyz^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} v_2 &= \operatorname{rot}\left(\mathrm{e}^{xz^2}\begin{pmatrix} 5y^2+5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^3z \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{e}^{xz^2}\begin{pmatrix} 30x^2y^2z-20x^2yz \\ 10xy^2z+10x^2y^2z^3+10xy^2z-10x^2y^3z^3-20xy^3z \\ 10xyz^2+10y-10y-10xyz^2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{xz^2}\begin{pmatrix} 30x^2y^2z-20x^2yz \\ -10x^2y^3z^3+10x^2y^2z^3-20xy^3z+20xy^2z \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, hat also v_1 ein Potential und v_2 hat keines. Ein Potential von v_1 ist

$$U_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{xz^2} 5xy^2\,,$$

was durch eine Probe bestätigt werden kann.
Das Potential U_1 kann keine harmonische Funktion sein, da die Divergenz von v_1 nicht null ist.

Aufgabe H 90. *Potential und Kurvenintegrale*
Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{x_1x_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Kreises K_r durch $C_r\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto r\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat, und geben Sie für diese α ein Potential an.

Lösungshinweise hierzu: Bestimmung der Rotation:

$$\operatorname{rot} g_\alpha = \frac{\partial\,(g_\alpha)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\,(g_\alpha)_1}{\partial x_2} = \left(\alpha + x_1x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + \mathrm{e}^{x_1x_2}\right) - \left(-\alpha + x_1x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + \mathrm{e}^{x_1x_2}\right) = 2\alpha$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist die Existenz eines Potentials äquivalent zu $\operatorname{rot} g_\alpha = 0$. Damit existiert genau dann ein Potential, wenn $\alpha = 0$ ist.
Nun ist für $\alpha = 0$ noch ein Potential zu bestimmen. Es ist $(g_0)_1(x_1,x_2) = x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}$, also

$$U(x_1,x_2) = \int (g_0)_1(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\,x_1 = \int x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}\,\mathrm{d}\,x_1 = \mathrm{e}^{x_1x_2} + c(x_2).$$

Aus der Bedingung $U_{x_2}(x_1,x_2) = (g_0)_2(x_1,x_2)$ ergibt sich

$$x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + c_{x_2}(x_2) = x_1\mathrm{e}^{x_1x_2}$$

und somit $c_{x_2}(x_2) = 0$. Daraus folgt, dass $c(x_2) = C$ konstant ist. Wir erhalten das Potential

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto \mathrm{e}^{x_1 x_2} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

(b) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $r \in \mathbb{R}^+$ das Kurvenintegral $\oint_{K_r} g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu: Da K_r ein geschlossener Weg über ein konservatives Vektorfeld (also eines mit Potential) ist, ergibt sich sofort

$$\int_{K_r} g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0.$$

Es bleibt noch $\int_{K_r} g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für $\alpha \neq 0$ zu berechnen. Dazu wird zuerst C' bestimmt:

$$C'(t) = r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$g_\alpha(x_1, x_2) = g_0(x_1, x_2) + \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Das lässt sich benutzen, um das zu berechnende Integral zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int_{K_r} g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_{K_r} \left(g_0(x) + \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right) \bullet \mathrm{d}\,x \\
&= \underbrace{\int_{K_r} g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x}_{=0} + \int_{K_r} \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\,x \\
&= \alpha r^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \alpha r^2 \int_0^{2\pi} (\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 \,\mathrm{d}\,t \\
&= \alpha r^2 \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\,t \\
&= 2\pi\alpha r^2
\end{aligned}$$

Aufgabe H 91. *Zusatzaufgabe*

Finden Sie einen real existierenden Sattelpunkt, möglichst auf dem Campus der Universität Stuttgart. Schicken Sie ein selbst gemachtes Foto samt genauer Ortsangabe an

`wettbewerb@lexmath.uni-stuttgart.de`

Die besten Einsendungen werden prämiert.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 92. *Potential mittels Kurvenintegral*

(a) Gegeben seien die vier Punkte

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (a,0,0), \quad P_3 = (a,b,0), \quad P_4 = (a,b,c)\,.$$

Finden Sie für $i \in \{1,2,3\}$ Parametrisierungen C_i von Kurven, welche vom Punkt P_i zum Punkt P_{i+1} laufen.

Lösungshinweise hierzu: Mögliche Parametrisierungen der Kurven K_i und deren Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (at,0,0)^\mathsf{T}, \quad t \in [0,1], \quad C_1'(t) = (a,0,0)^\mathsf{T}, \\ C_2(t) &= (a,bt,0)^\mathsf{T}, \quad t \in [0,1], \quad C_2'(t) = (0,b,0)^\mathsf{T}, \\ C_3(t) &= (a,b,ct)^\mathsf{T}, \quad t \in [0,1], \quad C_3'(t) = (0,0,c)^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie ein Potential U des Vektorfeldes

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\mathsf{T} \to (y+z,\ x+z,\ x+y)^\mathsf{T}\,,$$

indem Sie die Wegintegrale von g über C_1, C_2 und C_3 summieren.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen das Potential im Punkt (a,b,c):

$$\begin{aligned} U(a,b,c) &= \int_0^1 g(C_1(t)) \bullet C_1'(t)dt + \int_0^1 g(C_2(t)) \bullet C_2'(t)dt + \int_0^1 g(C_3(t)) \bullet C_3'(t)dt \\ &= \int_0^1 0dt + ab\int_0^1 1dt + (a+b)\,c\int_0^1 1dt = ab + ac + bc. \end{aligned}$$

Im Punkt (x,y,z) erhalten wir $U(x,y,z) = xy + xz + yz$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} U$.

Lösungshinweise hierzu: Wir machen die Probe und erhalten

$$\operatorname{grad} U(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)^\mathsf{T}\,.$$

Aufgabe H 93. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{pmatrix}-x_2 + x_1^2 + x_2^2\\ x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1\end{pmatrix},$$

sowie die Kurve K, parametrisiert durch

$$C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Rotation von v.

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben das Vektorfeld zuerst um und erhalten:

$$v\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} + 1 \\ \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \end{pmatrix}.$$

Als Rotation erhalten wir

$$\text{rot } v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{2x_2^2 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0.$$

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\oint_K v(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\oint_K v(x) \bullet \mathrm{d}\, x = \int_0^{2\pi} v(C(t)) \bullet C'(t) \,\mathrm{d}\, t = \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\, t - \int_0^{2\pi} \sin(t) \,\mathrm{d}\, t + \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) \,\mathrm{d}\, t$$
$$= 2\pi + 0 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t) \,\mathrm{d}\, t = 2\pi.$$

(c) Besitzt die Einschränkung von v auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ein Potential? Geben Sie, falls möglich, ein solches Potential an.

Lösungshinweise hierzu: Ja! Denn $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ist einfach zusammenhängend und rot $v = 0$. Damit existiert nach Satz 5.1.5 ein Potential für v. Wir geben dieses an und machen dann eine Probe:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

$$\operatorname{grad} U(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} + 1 \\ \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \end{pmatrix}.$$

(d) Besitzt v ein Potential? Geben Sie, falls möglich, ein solches Potential an.

Lösungshinweise hierzu: Nein! Denn wir finden im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ von v eine Kurve K mit $\displaystyle\oint_K v(x) \bullet \mathrm{d}\, x \neq 0$, vergleiche **(b)**. Damit kann nach 5.3.14 kein Potential für v existieren.

Wichtig: Die Begründung, dass $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ nicht einfach zusammenhängend ist, ist nicht ausreichend!

Aufgabe H 94. *Länge von Kurven*

Skizzieren Sie die durch die folgenden Funktionen parametrisierten Kurven und berechnen Sie jeweils ihre Länge.

(a) $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))^\intercal$

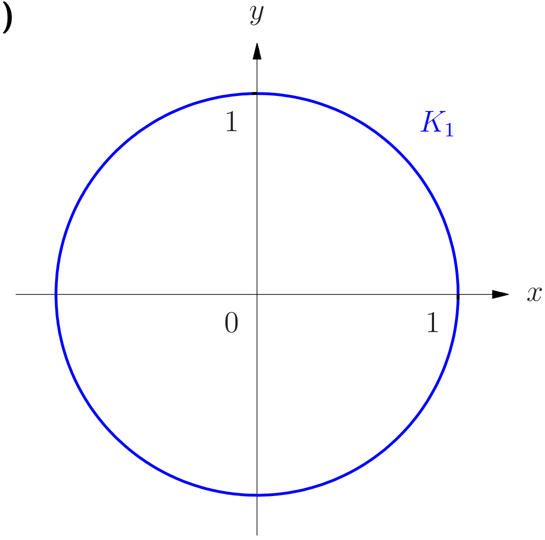
(b) $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (t, t^2)^\intercal$ *Hinweis:* Aufgabe P 72 (d)

(c) $C\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (\cosh(t), t)^\intercal$

(d) $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t), t)^\intercal$

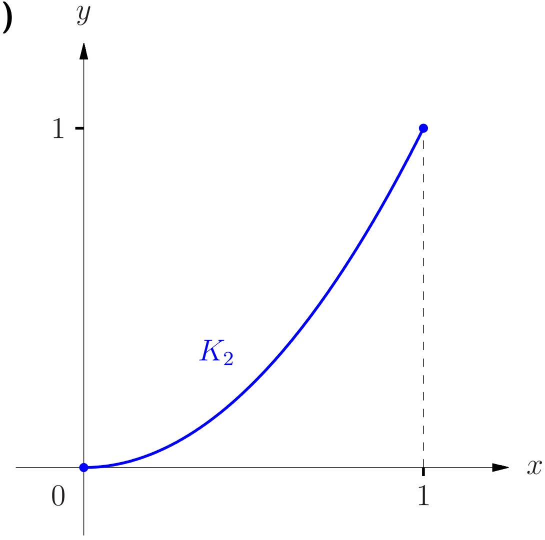
Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen die in den Aufgabenteilen **(a)**, **(b)**, **(c)** und **(d)** angegebenen Parametrisierungen mit C_1, C_2, C_3 bzw. C_4.

(a)



(Einheitskreislinie)

(b)



(Parabelbogen)

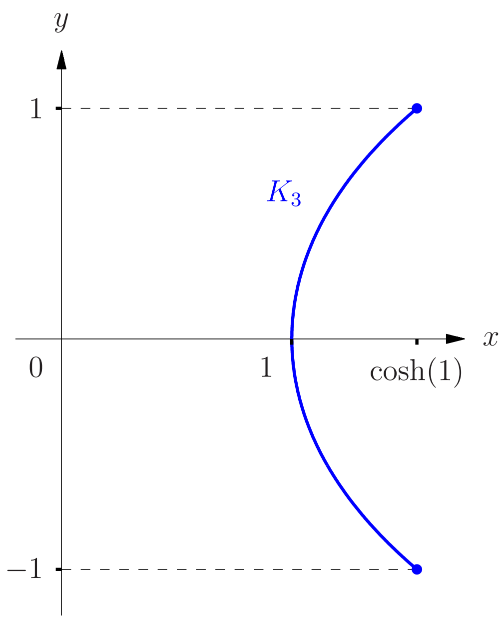
Die Einheitskreislinie besitzt die (aus der Elementargeometrie bekannte) Kurvenlänge

$$L(K_1) = \int_0^\pi |C_1'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left| \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}t = \int_0^\pi 2 \,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Die Länge des Parabelbogens beträgt

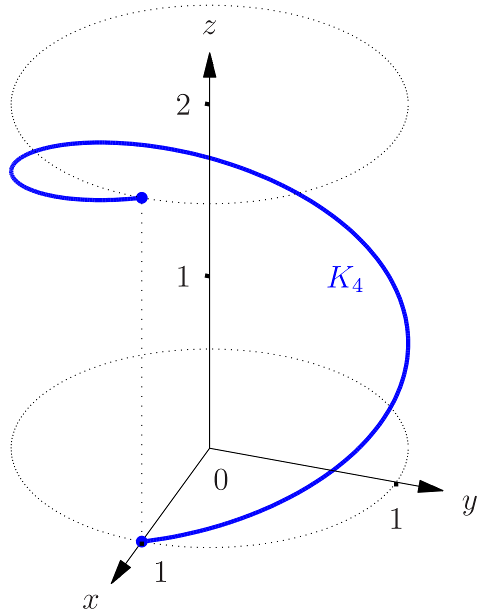
$$\begin{aligned} L(K_2) &= \int_0^1 |C_2'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+u^2} \,\mathrm{d}u && \text{[Substitution } 2t = u\text{]} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} u\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} u \right]_0^2 && \text{[Aufgabe P 72 (d)]} \\ &= \frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh}(2)) \qquad (\approx 1{,}4789). \end{aligned}$$

(c)



(Kettenlinie)

(d)



(Schraubenlinie)

Für die Länge der Kettenlinie ergibt sich

$$\begin{aligned} L(K_3) &= \int_{-1}^{1} |C_3'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left| \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (\sinh(t))^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \cosh(t) \,\mathrm{d}t = [\sinh(t)]_{-1}^{1} = \sinh(1) - \sinh(-1) = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (\approx 2{,}3504), \end{aligned}$$

und als Länge der Schraubenlinie erhält man

$$\begin{aligned} L(K_4) &= \int_0^2 |C_4'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left| \begin{pmatrix} -\pi \sin(\pi t) \\ \pi \cos(\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \sqrt{\pi^2 + 1} \,\mathrm{d}t = 2\sqrt{\pi^2 + 1} \qquad (\approx 6{,}5938). \end{aligned}$$

Aufgabe H 95. *Zirkulation und Ausfluss*

Die Geschwindigkeitsfelder zweier Strömungen seien durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v)^\mathsf{T} \mapsto (-u,-v)^\mathsf{T} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v)^\mathsf{T} \mapsto (-v,0)^\mathsf{T}$$

gegeben. Sei außerdem E die geschlossene Kurve mit Parametrisierung

$$C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) \\ 2\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Punkte auf E haben maximalen bzw. minimalen Abstand vom Ursprung?

(b) Skizzieren Sie die Kurve E.

(c) Berechnen Sie für jedes der beiden Geschwindigkeitsfelder die Zirkulation längs E und den Ausfluss durch E.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Abstand des allgemeinen Kurvenpunktes $C(t) \in E$ vom Ursprung beträgt

$$\begin{aligned} d(t) &= \left| C(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(C_1(t))^2 + (C_2(t))^2} \\ &= \sqrt{(\cos(t) - 2\sin(t))^2 + (2\sin(t) + \cos(t))^2} = \sqrt{2(\cos(t))^2 + 8(\sin(t))^2} \\ &= \sqrt{2(\cos(t))^2 + 2(\sin(t))^2 + 6(\sin(t))^2} = \sqrt{2 + 6(\sin(t))^2}\,, \end{aligned}$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Der Term unter der Wurzel ist immer positiv und nimmt im Intervall $[0, 2\pi]$ bei $t_1 = \frac{\pi}{2}$ und $t_2 = \frac{3\pi}{2}$ den maximalen Wert $2 + 6 = 8$ sowie bei $t_3 = 0$, $t_4 = \pi$ und $t_5 = 2\pi$ den minimalen Wert $2 + 0 = 2$ an. Da die Wurzelfunktion streng monoton wachsend ist, besitzen die Punkte

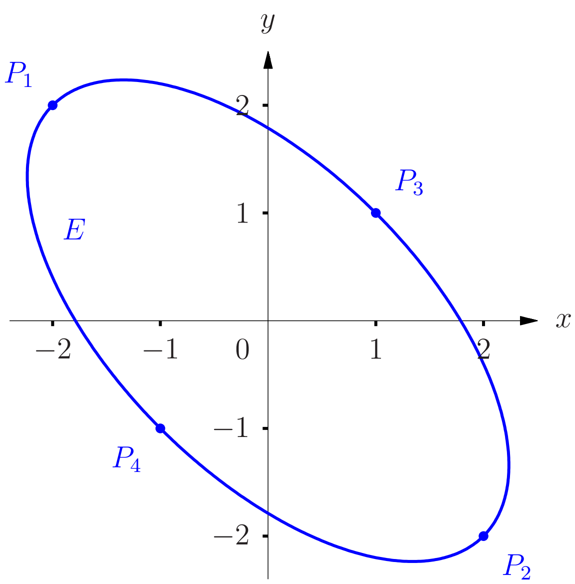
$$P_1 = C(t_1) = C(\tfrac{\pi}{2}) = (-2, 2)^{\mathsf{T}} \qquad \text{und} \qquad P_2 = C(t_2) = C(\tfrac{3\pi}{2}) = (2, -2)^{\mathsf{T}}$$

den maximalen Abstand $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und die Punkte

$$P_3 = C(t_3) = C(0) = (1, 1)^{\mathsf{T}} \qquad \text{und} \qquad P_4 = C(t_4) = C(\pi) = (-1, -1)^{\mathsf{T}}$$

den minimalen Abstand $\sqrt{2}$ vom Ursprung. Der Punkt $P_5 = C(t_5) = C(2\pi) = (1, 1)^{\mathsf{T}}$ stimmt aufgrund der Periodizität der Sinus- und Cosinusfunktion mit P_3 überein.

(b) Die Abbildung zeigt die Kurve E und die Punkte P_1 bis P_4:



[Um nachzuweisen, dass E eine Ellipse ist, kann man $C(t)$ in der Form

$$\begin{aligned} C(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) \\ 2\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

schreiben. Die Kurve E geht also aus der durch

$$\tilde{C} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisierten Einheitskreislinie durch eine Streckung um den Faktor 2 in y–Richtung und eine anschließende Drehstreckung mit Winkel $\frac{\pi}{4}$ und Streckfaktor $\sqrt{2}$ hervor.]

(c) Zirkulation von f längs E :

$$\begin{aligned} Z(f, E) &= \int_0^{2\pi} f(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(\cos(t) - 2\sin(t)) \\ -(2\sin(t) + \cos(t)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) - 2\cos(t) \\ 2\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -6\sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = \left[3(\cos(t))^2\right]_0^{2\pi} = 3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Ausfluss von f durch E :

$$\begin{aligned} A(f, E) &= \int_0^{2\pi} f(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(\cos(t) - 2\sin(t)) \\ -(2\sin(t) + \cos(t)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + 2\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -4(\sin(t))^2 - 4(\cos(t))^2\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -4\ \mathrm{d}t = -8\pi. \end{aligned}$$

Zirkulation von g längs E :

$$\begin{aligned} Z(g, E) &= \int_0^{2\pi} g(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(2\sin(t) + \cos(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) - 2\cos(t) \\ 2\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 2 + 5\sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = \left[2t + \tfrac{5}{2}(\sin(t))^2\right]_0^{2\pi} = 4\pi - 0 = 4\pi. \end{aligned}$$

Ausfluss von g durch E :

$$\begin{aligned}
A(g,E) &= \int_0^{2\pi} g(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(2\sin(t)+\cos(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\cos(t)-\sin(t) \\ \sin(t)+2\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 2(\sin(t))^2 - 2(\cos(t))^2 - 3\sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} -2\cos(2t) - \tfrac{3}{2}\sin(2t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{[vgl. 1.14.21]} \\
&= \left[-\sin(2t) + \tfrac{3}{4}\cos(2t)\right]_0^{2\pi} = \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4} = 0.
\end{aligned}$$

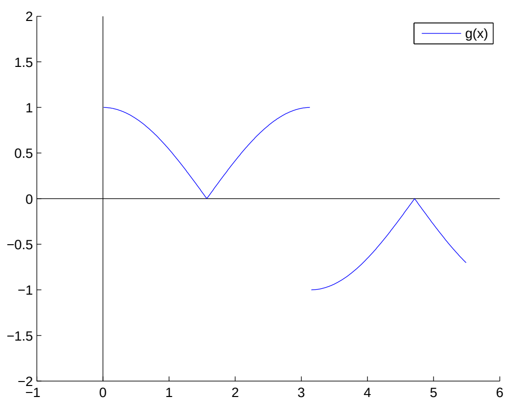
Aufgabe H 96. *Stetigkeit & Integration*

Gegeben seien die Menge $L := \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, das Intervall $D = [0, \frac{7\pi}{4}]$ und die Funktion

$$g \colon D \smallsetminus L \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}\cos(x).$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von g.

Lösungshinweise hierzu:



(b) Geben Sie eine auf ganz D rechtsseitig stetige Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ an, welche g fortsetzt, d.h. $f|_{D\smallsetminus L} = g$.

Lösungshinweise hierzu: Wir wollen g in den Punkten aus L durch die rechtsseitigen Grenzwerte ergänzen. Dazu rechnen wir mit L'Hospital

$$\lim_{x\to\pi+0} g(x) = \lim_{x\to\pi+0} \frac{\sin(2x)\cos(x)}{|\sin(2x)|} = \lim_{x\to\pi+0} \frac{2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)}{2\cos(2x)} = -1.$$

Genauso erhält man

$$\lim_{x\to 0+0} g(x) = 1, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}+0} g(x) = 0.$$

Somit ist die Funktion $f(x)$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ -1, & x = \pi, \\ 0, & x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\}, \\ g(x), & x \in D \setminus L, \end{cases}$$

auf ganz D rechtsseitig stetig. Der Wert bei $\frac{7\pi}{4}$ kann hierbei beliebig gewählt werden.

(c) Ist f stetig?

Lösungshinweise hierzu: Nein! In Aufgabenteil **(b)** haben wir schon

$$\lim_{x\to \pi+0} f(x) = -1$$

berechnet. Nun gilt für den linksseitigen Grenzwert allerdings

$$\lim_{x\to \pi-0} f(x) = \lim_{x\to \pi-0} \frac{\sin(2x)\cos(x)}{|\sin(2x)|} = \lim_{x\to \pi-0} \frac{2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)}{-2\cos(2x)} = 1,$$

womit f an der Stelle $x = \pi$ nicht stetig ist.

(d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\frac{7\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu: Wir unterteilen das Intervall D in die vier Teilintervalle

$$D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

Wir stellen damit für den Term $\dfrac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}$ folgendes Verhalten fest:

$$\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ 1, & x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right] \end{cases}.$$

Somit berechnen wir das Integral

$$\int_0^{\frac{7\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= 1 + 1 - 1 - [\sin(x)]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aufgabe H 97. *Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{3x^3-12x^2+3x-8}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch zweimalige partielle Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int x^2\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\cdot(-\tfrac{1}{2}\cos(2x))\right] - \int 2x\cdot(-\tfrac{1}{2}\cos(2x))\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\tfrac{1}{2}x^2\cos(2x)\right] + \int x\cdot\cos(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\tfrac{1}{2}x^2\cos(2x)\right] + \left[x\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right] - \int 1\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\tfrac{1}{2}x^2\cos(2x) + \tfrac{1}{2}x\sin(2x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x)\right].\end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der Substitution $\mathrm{e}^x = u$, $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, erhält man

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{arsinh}(u)] = [\operatorname{arsinh}(\mathrm{e}^x)],$$

vgl. die Stammfunktionentabelle in 3.1.7.

(c) Polynomdivision liefert

$$\frac{3x^3-12x^2+3x-8}{3x^2+2} = x - 4 + \frac{x}{3x^2+2}.$$

Mit der Substitution $3x^2+2 = u$, $6x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, folgt

$$\int \frac{x}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{6}\ln|u|\right] = \left[\frac{1}{6}\ln(3x^2+2)\right],$$

wobei berücksichtigt wurde, dass $3x^2+2>0$, für alle $x\in\mathbb{R}$. Insgesamt ist also

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3-12x^2+3x-8}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \int x - 4 + \frac{x}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{6}\ln(3x^2+2)\right].\end{aligned}$$

Aufgabe H 98.

Gegeben seien $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)^\intercal\mapsto x-y+2$ und $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2=1\}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Einschränkung von f auf K.

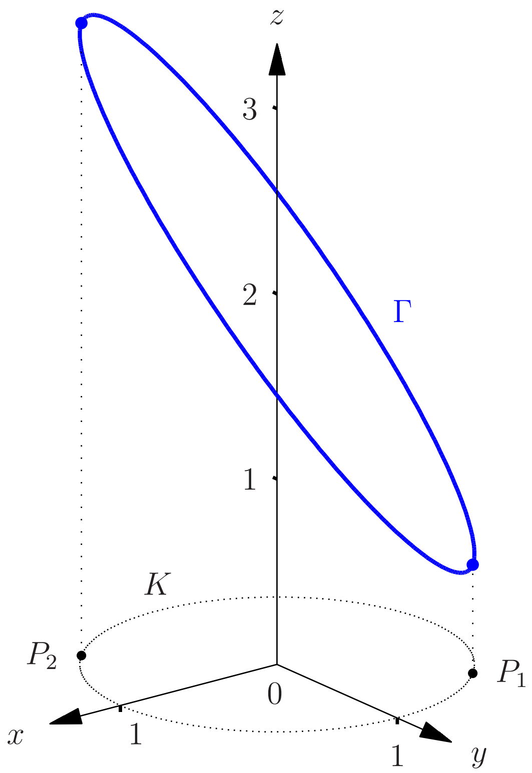
(b) Berechnen Sie die Extrema von f auf K mit der Multiplikatormethode von Lagrange.

(c) Berechnen Sie diese Extrema mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von K.

(d) Zeichnen Sie die gefundenen Extrema in die Skizze ein.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Graph Γ der Einschränkung von f auf die Einheitskreislinie K besteht aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $(x, y) \in K$ und $z = f(x, y)$.



(b) Um die Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ zu bestimmen, stellt man gemäß 4.6.3 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x, y) + \lambda \operatorname{grad} g(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

auf, das wegen $\operatorname{grad} f(x, y) = (1, -1)^\mathsf{T}$ und $\operatorname{grad} g(x, y) = (2x, 2y)^\mathsf{T}$ die Form

$$\begin{aligned} 1 + 2x\lambda &= 0 \\ -1 + 2y\lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

besitzt. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x = -\frac{1}{2\lambda}$ und $y = \frac{1}{2\lambda}$, und durch Einsetzen in die dritte Gleichung erhält man

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \iff \frac{1}{2\lambda^2} = 1 \iff \lambda^2 = \frac{1}{2} \iff \lambda_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt sich $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, und damit der Punkt

$$P_1 = (x_1, y_1) = (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \in K \qquad \text{mit Funktionswert} \quad f(x_1, y_1) = 2 - \sqrt{2},$$

und für $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $y_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, was den Punkt

$$P_2 = (x_2, y_2) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \in K \qquad \text{mit Funktionswert} \quad f(x_2, y_2) = 2 + \sqrt{2}$$

liefert. Da hierdurch alle Extrema auf der kompakten Menge K erfasst werden, nimmt f in P_1 sein globales Minimum und in P_2 sein globales Maximum auf K an.

(c) Die Einheitskreislinie K lässt sich durch

$$C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren. Wir untersuchen nun die Funktion

$$h := f \circ C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(C(t)) = \cos(t) - \sin(t) + 2,$$

die jedem Parameter $t \in [0, 2\pi]$ den Wert von f im Punkt $C(t)$ zuordnet, auf lokale Extrema. Aus der Bedingung

$$h'(t) = -\sin(t) - \cos(t) = 0 \quad \iff \quad \sin(t) = -\cos(t) \quad \iff \quad \tan(t) = -1$$

ergeben sich $t_1 = \frac{3\pi}{4}$ und $t_2 = \frac{7\pi}{4}$ als mögliche Extremstellen im Intervall $(0, 2\pi)$. Zur Feststellung des Typs berechnen wir $h''(t) = -\cos(t) + \sin(t)$ und erhalten

$$h''(t_1) = h''(\tfrac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0,$$

d. h. ein lokales Minimum im Punkt $P_1 = C(t_1) = C(\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})^\mathsf{T}$, und

$$h''(t_2) = h''(\tfrac{7\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0,$$

d. h. ein lokales Maximum im Punkt $P_2 = C(t_2) = C(\frac{7\pi}{4}) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})^\mathsf{T}$.

Die zugehörigen extremalen Funktionswerte sind

$$\begin{aligned} h(t_1) &= f(P_1) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2} \qquad \text{und} \\ h(t_2) &= f(P_2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 2 = 2 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wegen $h(0) = h(2\pi) = 3$ und $2 - \sqrt{2} < 3 < 2 + \sqrt{2}$ tritt im Anfangs- und Endpunkt der geschlossenen Kurve K kein weiteres lokales Extremum auf.

(d) Die Extrema von f auf K sind in der Abbildung in **(a)** als blaue Punkte eingezeichnet.