C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

**14. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2016

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 56.** *Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

**(a)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

**(b)** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^n$

**(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{1-2\sqrt{n}}$

**(d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium 1.9.5: ist $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$, dann ist die Folge $(|a_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und monoton fallend: wegen $\sqrt{n+1} \geqq \sqrt{n}$ und $\sqrt{n} \geqq \sqrt{n-1}$ ist $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = |a_n|$.

Die Reihe ist nicht absolut konvergent, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \geqq \frac{1}{2\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{2n}$, also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

Wurzel- und Quotientenkriterium sind hier keine Hilfe, denn es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

**(b)** Hier eignet sich das Wurzel-Kriterium: sei $a_n = \left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^n$, dann ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1+2^n}{2^{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2^{-n}+1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}+1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

also konvergiert die Reihe absolut, insbesondere ist die Reihe damit auch konvergent.

**(c)** Diese Reihe ist nicht konvergent, also auch nicht absolut konvergent: die Folge

$$(-1)^n \frac{n}{1-2\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}-2}$$

konvergiert nicht gegen $0$, also kann die Reihe nach Lemma 1.9.1 nicht konvergieren.

**(d)** Hier eignet sich das Quotienten-Kriterium: mit $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ ist

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^2\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert $\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$ gegen $4$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$ gegen $\frac{1}{\mathrm{e}}$, also ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4}{\mathrm{e}^2} < 1$, somit ist die Reihe konvergent und absolut konvergent.

**Aufgabe H 57.** *Grenzwerte von Reihen*

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie deren Grenzwerte.

**(a)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{5 \cdot 2^{2n}}$

**(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{25} - \sqrt[n+1]{25})$

**(c)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}$

**(d)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}((1+\mathrm{i})^n)}{4^n}$

**Lösungshinweise hierzu:** Man beachte: kann man den Wert einer Reihe konkret ausrechnen, dann konvergiert die Reihe. Ausrechnen kann man die Grenzwerte z. B., indem man sie auf bekannte Reihen zurückführt oder indem man eine geschlossene Form für die Partialsummen findet.

**(a)** Die Reihe lässt sich umschreiben in eine geometrische Reihe mit $q = -3/4$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{5 \cdot 2^{2n}} &= -\frac{3}{5} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^{2n}} = -\frac{3}{5} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2^2)^n} = -\frac{3}{5} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \\
&= -\frac{3}{5} \cdot \left( \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right) - 1 + \frac{3}{4} \right) \\
&= -\frac{3}{5} \cdot \left( \frac{1}{1 - (-\frac{3}{4})} - 1 + \frac{3}{4} \right) = -\frac{27}{140}
\end{aligned}$$

**(b)** Man kann die $n$-te Partialsumme konkret ausrechnen:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[k]{25} - \sqrt[k+1]{25}) \\
&= (\sqrt[1]{25} - \sqrt[2]{25}) + (\sqrt[2]{25} - \sqrt[3]{25}) + (\sqrt[3]{25} - \sqrt[4]{25}) + \cdots + (\sqrt[n]{25} - \sqrt[n+1]{25}) \\
&= \sqrt[1]{25} - \sqrt[n+1]{25} = 25 - \sqrt[n+1]{25},
\end{aligned}$$

daher gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{25} - \sqrt[n+1]{25}) = \lim_{n\to\infty} S_n = 25 - 1 = 24$ (vgl. Beispiel 1.5.7).

**(c)** Diese Reihe lässt sich durch Indexverschiebung auf die Exponentialreihe zurückführen (mit $l = k + 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} = \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \right) - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = \mathrm{e} - 2$$

**(d)** Hier lohnt es sich, die ersten Summanden auszurechnen, um eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen: Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^0)}{4^0} &= \mathrm{Im}(1) &&= &0\\
\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^1)}{4^1} &= \mathrm{Im}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{4}\right) &&= &\frac{1}{4}\\
\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^2)}{4^2} &= \mathrm{Im}\left(\frac{2\mathrm{i}}{4^2}\right) &&= &\frac{1}{8}\\
\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^3)}{4^3} &= \mathrm{Im}\left(\frac{-2+2\mathrm{i}}{4^3}\right) &&= &\frac{1}{32}\\
\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^4)}{4^4} &= \mathrm{Im}\left(\frac{-4}{4^4}\right) &&= &0\\
\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^5)}{4^5} &= \mathrm{Im}\left(\frac{-4-4\mathrm{i}}{4^5}\right) &&= &-\frac{1}{4^4}\\
\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^6)}{4^6} &= \mathrm{Im}\left(\frac{-8\mathrm{i}}{4^6}\right) &&= &-\frac{1}{8\cdot 4^3}
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass sich die Einträge nach vier Schritten wiederholen, jeweils mit $-\frac{1}{4^3}$ multipliziert. Wir rechnen das nach:

$$\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^{n+4})}{4^{n+4}} = \frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})^n)}{4^{n+4}} = \frac{\mathrm{Im}(-4(1+\mathrm{i})^n)}{4^{n+4}} = -\frac{1}{4^3}\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^n)}{4^n}.$$

Somit lässt sich die Reihe in drei (geometrische!) Teilreihen aufteilen (der vierte Fall $n \in 4\mathbb{N}$ liefert keinen Beitrag zum Imaginärteil):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^n)}{4^n} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4^3}\right)^n + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4^3}\right)^n + \frac{1}{32}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4^3}\right)^n\\
&= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4^3}\right)^n\\
&= \frac{13}{32}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4^3}} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Hier sollte man nun doch zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert, sonst darf man nicht umordnen! Es ist

$$\left|\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^n)}{4^n}\right| \leqq \frac{|(1+\mathrm{i})^n|}{4^n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n$$

und die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n$ konvergiert, denn es handelt sich um eine geometrische Reihe. Nach dem Majoranten-Kriterium ist auch unsere gesuchte Reihe absolut konvergent.

*Zusatz:* Mit etwas mehr Theorie geht's einfacher: Betrachtet man auch komplexe Reihen (vgl. 1.14.1), dann kann man den Wert der Reihe so berechnen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^n)}{4^n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{4}\right)^n\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\mathrm{i}}{4}}\right) = \frac{2}{5}\,.$$

**Aufgabe H 58.** *Stetigkeit*

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j\colon D_j \to \mathbb{R}$ für $j \in \{1,2\}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+8}{x^3-9x^2+26x-24} & \text{für } x \neq 2 \\ -1 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

**(a)** Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subseteq \mathbb{R}$, für den die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f_1$ und $f_2$.

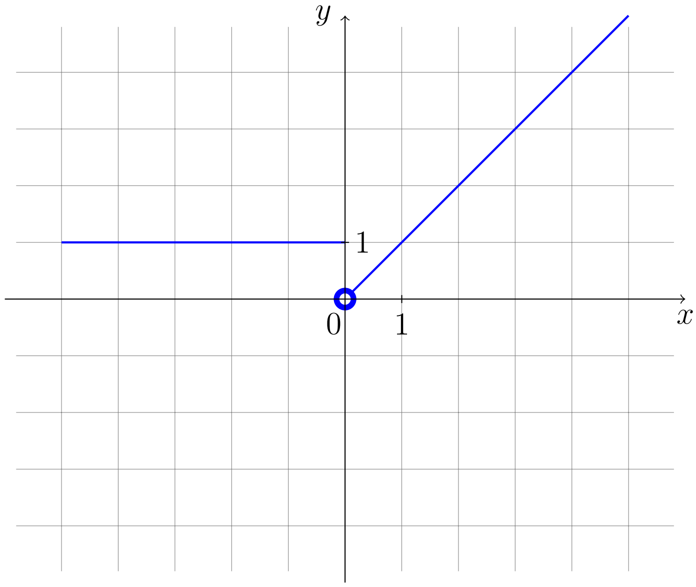
**(b)** Finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subseteq U_\varepsilon(f_2(2))$ ist.

**(c)** Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_1(U_\delta(0) \cap D_1) \subseteq U_\varepsilon(f_1(0))$ gilt?

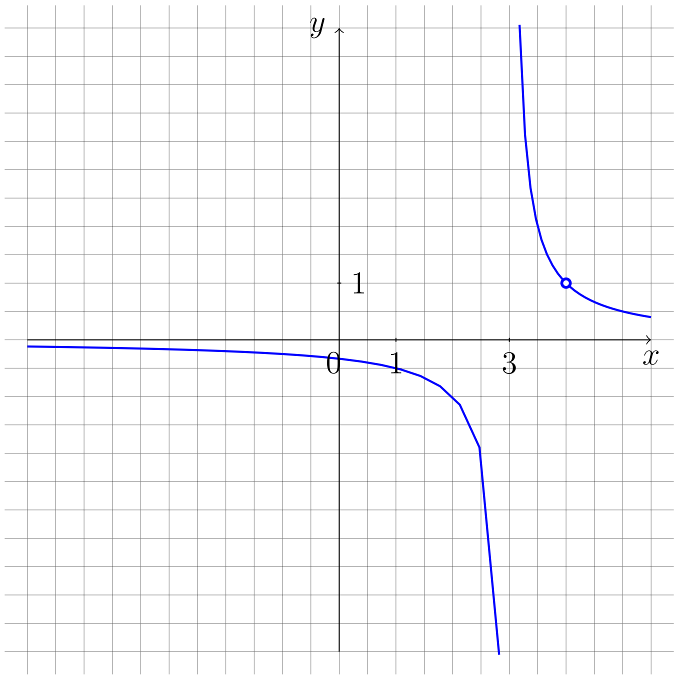
**(d)** Ist die Funktion $f_1$ stetig an der Stelle $x = 0$? Ist $f_2$ stetig an der Stelle $x = 2$?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)**
- Das Schaubild von $f_1$




- Das Schaubild von $f_2$



Die Funktion $f_1$ kann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden, d.h. $D_1 = \mathbb{R}$. Für $f_2$ formt man Zähler und Nenner um:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4), \qquad x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x-2)(x-3)(x-4),$$

und da eine gesonderte Vorschrift für $x = 2$ existiert, ist der maximale Definitionsbereich $D_2 = \mathbb{R} \smallsetminus \{3, 4\}$. (Die Funktion ist an $x = 4$ zwar stetig fortsetzbar, aber dennoch nicht definiert.)

**(b)** $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(2))$ gilt, wenn für alle $x$-Werte, die weniger als $\delta$ von $2$ entfernt liegen, der Abstand des Bildes $f_2(x)$ von $f_2(2)$ kleiner $\varepsilon$ ist.

Das $\delta$ muss also so klein gewählt werden, dass für jedes $x \in U_\delta(2) \cap D_2$ der Abstand $|f_2(x) - f_2(2)| < \varepsilon$ wird.

Für $\delta < 1$ und $x \in U_\delta(2)$ verwenden wir die Abkürzung $h := x - 2$. Dann gilt $h < \delta$, und

$$\begin{aligned}|f_2(x) - f_2(2)| = |f_2(2+h) - f_2(2)| &= \left|\frac{1}{2+h-3} - (-1)\right| = \left|\frac{1}{h-1} + \frac{h-1}{h-1}\right| \\ &= \left|\frac{h}{h-1}\right| = \left|\frac{h}{1-h}\right| < \frac{\delta}{1-\delta}\,,\end{aligned}$$

Es genügt also $\delta$ so zu wählen, dass $\frac{\delta}{1-\delta} \leqq \varepsilon$, d.h. $\delta \leqq \varepsilon/(1+\varepsilon) < 1$.

**(c)** Weil für alle $0 < x < \frac{1}{2}$

$$|f_1(x) - f_1(0)| = |x - 1| \geqq \frac{1}{2}$$

gilt, existiert zu $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ kein $\delta > 0$ mit $f_1(U_\delta(0) \cap D_1) \subseteqq U_\varepsilon(f_1(0))$.

**(d)** Die $\varepsilon$-$\delta$-Definition der Stetigkeit liefert mit den vorigen beiden Aufgabenteilen: Die Funktion $f_1$ ist nicht stetig an $x = 0$ und $f_2$ ist stetig an $x = 2$.

**Aufgabe H 59.** *Grenzwerte*

Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n = \dfrac{(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$.

**(a)** Bestimmen Sie folgende Werte, falls existent.

**(1)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **(2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ **(3)** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ **(4)** $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

**(5)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ **(6)** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ **(7)** $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

**(b)** Aus welchen der Aufgabenteile unter **(a)** lässt sich eine Konvergenzaussage über die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ableiten?

**(c)** Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}-1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

**(a)** Wegen $0 \leqq a_n \leqq \left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n$ und $\frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Sandwichsatz). Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert offensichtlich nicht, es gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$ (vgl. 1.9.21 Beispiel).

Die Folge $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ spaltet sich auf in zwei Teilfolgen: $\left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}\right|$ (für $n$ gerade) konvergiert gegen $0$ wegen $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} < 1$, $\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}\right|$ konvergiert bestimmt gegen $+\infty$. Also: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert nicht, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$.

**(b)** Wegen $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$ folgt aus dem Wurzel-Kriterium, dass die Reihe konvergiert, alle anderen Werte liefern keine Information:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung, es gibt Reihen mit dieser Eigenschaft, z. B. die harmonische Reihe, die nicht konvergieren.

Ebenso gibt es divergente Reihen, bei denen sich die Werte in Teil (2), (4), (5), (6) und (7) jeweils genauso verhalten wie unsere Reihe, d. h. auch aus diesen Informationen kann man ebenfalls keine Konvergenzaussage ableiten. Ein Beispiel für eine solche divergente Reihe ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ mit

$$b_k = \begin{cases} q_1^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $q_1 > 1$.

**(c)** Aus dem Wurzel-Kriterium folgt, dass die Reihe absolut konvergiert, also darf man umordnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^{2l+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{9}\right)^l + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{9}\right)^l \\ &= \frac{1}{1-\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{9}} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{9}} \\ &= \frac{6}{7} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 60.** *Grenzwerte und Stetigkeit*

Sei $\alpha \geqq 0$ ein reeller Parameter. Sei

$$f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{\alpha x + 7} & \text{für } x \geqq 2 \\ \dfrac{4(x^3 - 2x^2 - 3x + 6)}{2-x} & \text{für } x < 2. \end{cases}$$

**(a)** Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$. Für welche $\alpha$ liegt dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$?

**(b)** Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_\alpha$ in Abhängigkeit von $\alpha$.

**(c)** Bestimmen Sie $\alpha_0$ so, dass $f_{\alpha_0}$ in $x_0 = 2$ stetig ist.

**(d)** Skizzieren Sie den Graphen von $f_{\alpha_0}$ auf dem Intervall $[-2, 20]$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{\alpha x + 7}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x-2} - \sqrt{\alpha x+7}\right)\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{\alpha x+7}\right)}{\sqrt{x-2} + \sqrt{\alpha x+7}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\alpha)x - 9}{\sqrt{x-2} + \sqrt{\alpha x+7}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left( \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{1-\frac{2}{x}} + \sqrt{\alpha + \frac{7}{x}}}\sqrt{x} - \frac{9}{\sqrt{x-2} + \sqrt{\alpha x+7}} \right) \\
&= \begin{cases} -\infty, & \alpha > 1 \\ 0, & \alpha = 1 \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Das heißt, für $\alpha = 1$ liegt der Grenzwert in $\mathbb{R}$.

**(b)** Wir betrachten zunächst den Fall $x \geqq 2$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= \sqrt{\alpha x + 7} \\
\Leftrightarrow x - 2 &= \alpha x + 7 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{9}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $x \geqq 2$ ist dabei nur für $\alpha \in [0, 1)$ erfüllt.

Betrachte nun den Fall $x < 2$:

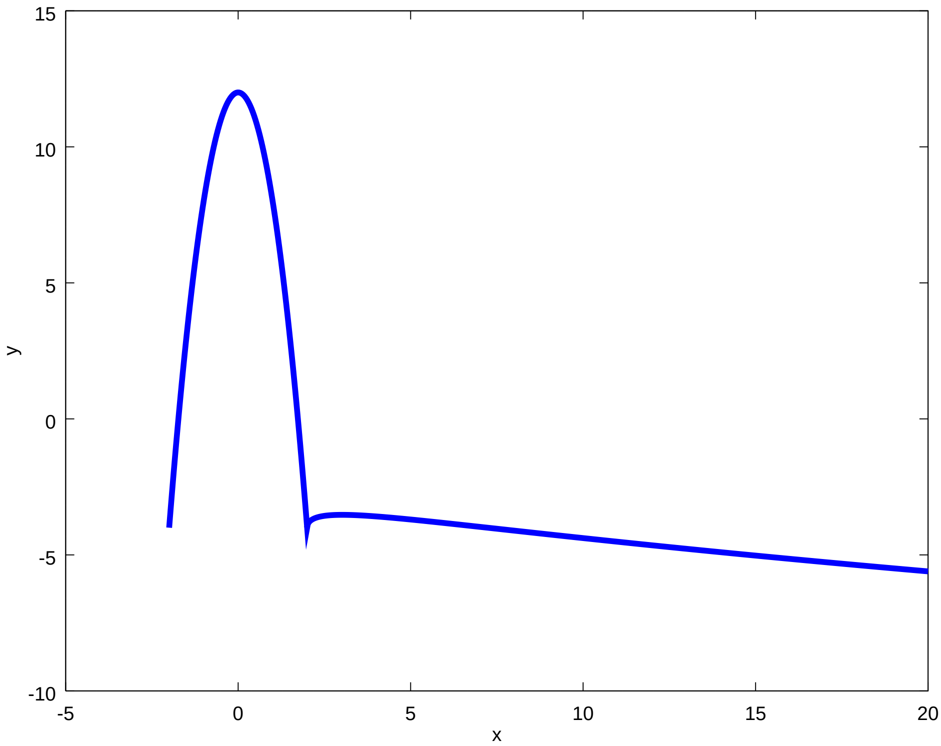
$$\begin{aligned}
\frac{4(x^3 - 2x^2 - 3x + 6)}{2-x} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{4(x^2-3)(x-2)}{2-x} &= 0 \\
\Leftrightarrow -4(x^2 - 3) &= 0 \\
\Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{3} < 2.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich insgesamt die Nullstellen $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, und im Fall $\alpha \in [0,1)$ zusätzlich die Nullstelle $x_3 = \frac{9}{1-\alpha}$.

**(c)** Der links- und rechtsseitige Grenzwert von $f_{\alpha_0}$ soll an der Stelle $x_0 = 2$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2-0} f_{\alpha_0}(x) &= \lim_{x\to 2+0} f_{\alpha_0}(x) \\
\Leftrightarrow \lim_{x\to 2-0} \frac{4(x-2)(x^2-3)}{2-x} &= -\sqrt{2\alpha_0+7} \\
\Leftrightarrow -4 &= -\sqrt{2\alpha_0+7} \\
\Leftrightarrow \alpha_0 &= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

**(d)** Der Graph von $f$ ist in der folgenden Abbildung dargestellt:




**Aufgabe H 61.** *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie folgende Funktionsgrenzwerte.

**(a)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+5}{x^3-7x^2-5x+75}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{7x+5}}{\sqrt{2x}}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+\sin(x^2)}{x^2+1}$

**(d)** $\lim\limits_{x\to 0} \left( \dfrac{x}{\tan(3x)} + \dfrac{2\tan(x)}{3x} \right)$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+5}{x^3-7x^2-5x+75} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+5}{(x-5)^2(x+3)} = -\infty$

**(b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{7x+5}}{\sqrt{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2x}}\right) = \dfrac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$

**(c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+\sin(x^2)}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+1}\right) = 1.$

Der erste Summand strebt nach Satz 1.11.8 gegen $1$ und der zweite Summand mit der Sandwichabschätzung gegen 0 (vgl. Bsp. 1.12.8).

**(d)**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan(3x)}+\frac{2\tan(x)}{3x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\frac{3x}{\tan(3x)}+\frac{2}{3}\frac{\tan(x)}{x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{3x}}\right) + \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1.\end{aligned}$$

Grenzwerte der Form $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\tan(y)}{y} = 1$ sind nach Bsp. 1.12.5 bekannt.

**Aufgabe H 62.** *Eigenschaften stetiger Funktionen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 2x^3-14x^2+30x-19 \quad \text{und} \quad g\colon (1,+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{2}{(x-1)^3}\,.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass $f$ in $(1,2)$, in $(2,3)$ und in $(3,4)$ je mindestens eine Nullstelle besitzt. Wieviele reelle Nullstellen besitzt $f$ insgesamt?

**(b)** Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x)=g(x)$ mindestens eine reelle Lösung $x>1$ hat.

**(c)** An wievielen Stellen $x\in\mathbb{R}$ ist $f(2x)$ doppelt so groß wie $f(x)$ ?

**(d)** Nimmt $f+g$ auf $[2,4)$ ein Minimum an? Nimmt $g$ auf $(2,3]$ ein Maximum an?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Als Polynom ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, vgl. 1.12.3. Anhand der Funktionswerte

$$f(1)=-1<0, \qquad f(2)=1>0, \qquad f(3)=-1<0 \qquad \text{und} \qquad f(4)=5>0$$

erkennt man, dass $f$ auf jedem der Intervalle $I_1=(1,2)$, $I_2=(2,3)$ und $I_3=(3,4)$ das Vorzeichen wechselt. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano 1.13.5 besitzt $f$ in jedem dieser Intervalle mindestens eine Nullstelle.

Da die Intervalle $I_1$, $I_2$ und $I_3$ keine gemeinsamen Punkte enthalten, sind die drei gefundenen (reellen) Nullstellen paarweise verschieden. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra 0.4.5 folgt, dass ein Polynom vom Grad 3 nicht mehr als drei (komplexe oder reelle) Nullstellen besitzen kann. $f$ hat also genau drei reelle Nullstellen.

**(b)** Als gebrochen rationale Funktion, deren Nenner keine Nullstelle im Definitionsbereich $M=(1,+\infty)$ besitzt, ist $g$ nach Satz 1.12.4.3 stetig auf $M$. Wertet man $g$ an den Stellen $x=3$ und $x=4$ aus, so ergibt sich

$$g(3)=\tfrac{1}{4}>-1=f(3) \qquad \text{und} \qquad g(4)=\tfrac{2}{27}<5=f(4).$$

Die als Differenz zweier stetiger Funktionen ebenfalls stetige Funktion

$$h\colon M\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x)-g(x)$$

nimmt also bei $x=3$ einen negativen und bei $x=4$ einen positiven Wert an. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano existiert mindestens ein $\xi\in(3,4)\subsetneqq M$ mit $h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)-g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=g(\xi)$.

**(c)** Die Funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(2x) = 2\cdot(2x)^3 - 14\cdot(2x)^2 + 30\cdot 2x - 19$ ist als Hintereinanderausführung der stetigen Funktionen $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2x$ und $f$ stetig, und damit ist auch $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto v(x) - 2f(x) = f(2x) - 2f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$, vgl. Satz 1.12.4. Auswerten an den Stellen $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ und $x = 2$ liefert

$$u(-1) = -21 < 0, \qquad u(0) = 19 > 0, \qquad u\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{7}{2} < 0 \quad \text{und} \quad u(2) = 3 > 0,$$

so dass $u$ nach dem Nullstellensatz von Bolzano in jedem der Intervalle $J_1 = (-1,0)$, $J_2 = (0,\frac{3}{2})$ und $J_3 = (\frac{3}{2},2)$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Es gibt also (paarweise verschiedene) Stellen $\xi_1 \in (-1,0)$, $\xi_2 \in (0,\frac{3}{2})$ und $\xi_3 \in (\frac{3}{2},2)$ mit

$$u(\xi_k) = 0 \iff f(2\xi_k) - 2f(\xi_k) = 0 \iff f(2\xi_k) = 2f(\xi_k), \qquad \text{für } k \in \{1,2,3\}.$$

Da mit $f$ auch $u$ ein Polynom vom Grad 3 ist, gibt es genau drei Stellen in $\mathbb{R}$, an denen $f(2x)$ doppelt so groß ist wie $f(x)$.

**(d)** $s := f + g$ ist nach Satz 1.12.4.1 stetig auf $[2,4] \subseteqq (1,+\infty)$ und nimmt daher nach dem Weierstraßschen Satz 1.13.12 ein Minimum an. Es gibt also ein $\xi \in [2,4]$ mit $s(\xi) \leqq s(x)$ für alle $x \in [2,4]$. Wegen

$$s(4) = f(4) + g(4) = 5 + \frac{2}{27} > 3 = f(2) + g(2) = s(2)$$

wird das Minimum nicht bei $x = 4$, sondern im Intervall $[2,4)$ angenommen.

Die Funktion $g$ ist streng monoton fallend. Daher gibt es zu jedem $\xi \in (2,3]$ eine Stelle $x$ im offenen Intervall $(2,\xi)$, so dass $g(x) > g(\xi)$. Somit kann $g$ auf $(2,3]$ kein Maximum annehmen.

**Aufgabe H 63.** *Abschnittsweise definierte Umkehrfunktion*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x} & \text{für } x \leqq -3 \\ \dfrac{2-x}{x+3} & \text{für } -3 < x < 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{für } x \geqq 2. \end{cases}$$

**(a)** Finden Sie ein Intervall $I = (-a,a)$ maximaler Länge so, dass die Einschränkung $g\colon I \to f(I)\colon x \mapsto f(x)$ von $f$ auf $I$ injektiv ist.

**(b)** Bestimmen Sie einen (abschnittsweise definierten) Funktionsterm für $g^{-1}\colon f(I) \to I$.

**(c)** Skizzieren Sie die Graphen von $g$ und $g^{-1}$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die gebrochenrationale Funktion

$$f_2\colon (-3,2) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{2-x}{x+3} = -1 + \frac{5}{x+3}$$

ist auf dem Intervall $(-3,2)$ streng monoton fallend und wegen $x + 3 \neq 0$ stetig, vgl. 1.12.4.3. Das quadratische Polynom

$$f_3\colon [2,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$$

ist für $2 \leqq x \leqq 3$ streng monoton fallend und für $x \geqq 3$ streng monoton wachsend (und nach 1.12.3 ebenfalls stetig). An der Stelle $x = 2$ gehen $f_2$ und $f_3$ wegen

$$\lim_{x\to 2-0} f_2(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{2-x}{x+3} = \frac{2-2}{2+3} = 0 = 2^2 - 6\cdot 2 + 8 = f_3(2)$$

stetig ineinander über. Durch Einschränken der gegebenen Funktion $f$ auf das Intervall $I = (-3, 3)$ erhält man also eine stetige, streng monoton fallende und daher injektive Funktion $g$, deren Werte wegen

$$\lim_{x\to -3+0} f_2(x) = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 3-0} f_3(x) = -1$$

im offenen Intervall $f(I) = (-1, +\infty)$ liegen. Unabhängig davon, wie $f$ für $x \leqq -3$ definiert ist, ginge bei Wahl eines Intervalls $(-a, a)$ mit $a > 3$ im Bereich $3 < x < a$ die Monotonie – und damit die Injektivität – verloren, vgl. Satz 1.13.11.

**(b)** Für $x \in (-3, 2) \Leftrightarrow y = g(x) = f_2(x) \in (0, +\infty)$ ergibt sich durch Auflösen nach $x$:

$$y = -1+\frac{5}{x+3} \Leftrightarrow y+1 = \frac{5}{x+3} \Leftrightarrow x+3 = \frac{5}{y+1} \Leftrightarrow x = -3+\frac{5}{y+1} = \frac{2-3y}{y+1}\,.$$

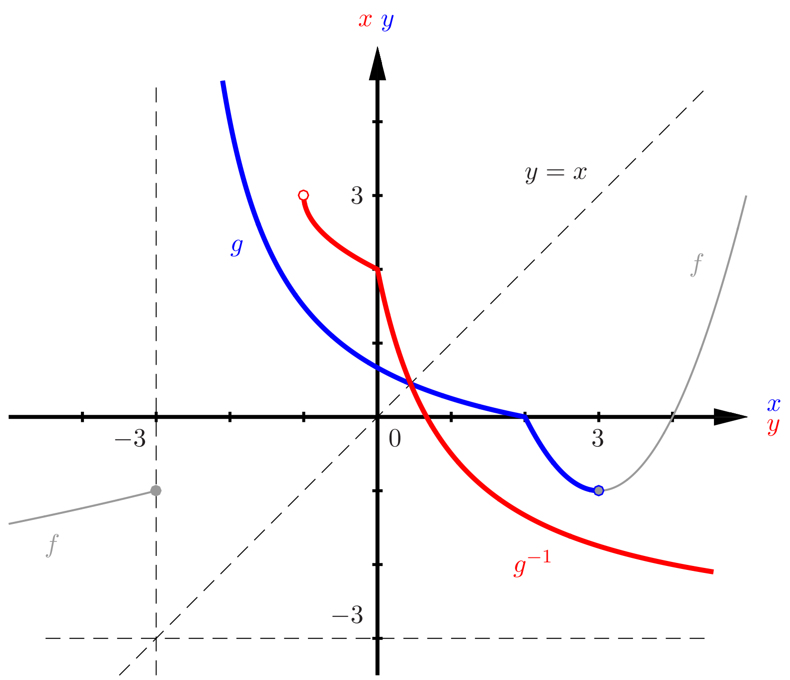
Für $x \in [2, 3) \Leftrightarrow y = g(x) = f_3(x) \in (-1, 0]$ erhält man

$$y = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + (8-y) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{y+1}\,,$$

und da der Graph von $g$ den Punkt $(x, y) = (2, 0)$ enthalten muss, entspricht die Lösung $x = 3 - \sqrt{y+1}$ dem richtigen Ast der Parabel. Insgesamt haben wir:

$$g^{-1}\colon (-1, +\infty) \to (-3, 3)\colon y \mapsto \begin{cases} 3 - \sqrt{y+1} & \text{für } -1 < y \leqq 0 \\ \dfrac{2-3y}{y+1} & \text{für } y > 0. \end{cases}$$

**(c)** Die Graphen von $g$ und $g^{-1}$ sind in der folgenden Abbildung dargestellt:



## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 64.** *Konvergenzradien von Potenzreihen*

**(a)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für:

**(i)** $a_n = n^{-n}$ **(ii)** $a_n = \left(\mathrm{i} - \frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$

**(b)** Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und skizzieren Sie die Konvergenzkreise. Untersuchen Sie, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

**(i)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z+\frac{\mathrm{i}}{2})^n}{n(n+1)}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir wenden 1.14.7 an und erhalten für den Konvergenzradius $\rho$ :

**(i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} = 0$, also $\rho = +\infty$.

**(ii)**
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\mathrm{i} - \tfrac{1}{n}\right)^{(n^3)}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\mathrm{i} - \tfrac{1}{n}\right|^{(n^2)} = \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{(-\tfrac{1}{n})^2 + 1^2}\,\right]^{(n^2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}}.$$

Da $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^{(n^2)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e} \qquad \text{(vgl. 1.2.8 und 1.2.9)},$$

d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}} = \sqrt{\mathrm{e}}$ , und damit $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ .

**(b)** **(i)** Um 1.14.7 anwenden zu können, schreiben wir die Potenzreihe in der Form

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n (z-\frac{1}{2})^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

mit $z_0 = \dfrac{1}{2}$ und $a_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n^2+1}}$ . Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\sqrt{n^2+1}}{2^n\sqrt{(n+1)^2+1}} = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}} = 2$$

hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\rho = \dfrac{1}{2}$ . Ihr Konvergenzkreis ist also

$$U_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{2}\} \qquad \text{(siehe Abbildung).}$$

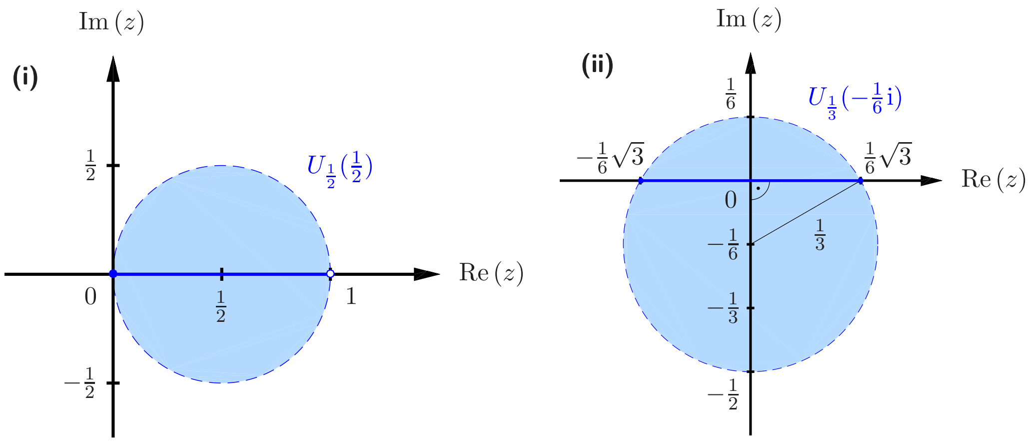
Betrachtet man nur die Punkte $z \in \mathbb{R}$ auf der reellen Achse, so ist die Potenzreihe für $0 < z < 1$ (absolut) konvergent und für $x < 0$ oder $x > 1$ divergent. Im Randpunkt $z = 0$ ergibt sich die alternierende Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(0-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{=:b_n},$$

die nach dem Leibniz–Kriterium 1.9.5 konvergiert (denn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine positive, monoton fallende Nullfolge). Für $z=1$ erhält man

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\geqq\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n},$$

d. h. die Reihe besitzt die harmonische Reihe als divergente Minorante und ist damit selbst divergent. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also für $z\in[0,1)$.




**(ii)** Wir identifizieren den Entwicklungspunkt und die Koeffizienten der Potenzreihe: Aus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3z+\frac{\mathrm{i}}{2})^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(z+\frac{\mathrm{i}}{6})^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

erhalten wir $z_0=-\frac{\mathrm{i}}{6}$ und $a_n=\dfrac{3^n}{n(n+1)}$, so ergibt sich aus

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n(n+1)}{3^n(n+1)(n+2)}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}=3$$

der Konvergenzradius $\rho=\frac{1}{3}$. Der Konvergenzkreis

$$U_\rho(z_0)=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z+\tfrac{\mathrm{i}}{6}|<\tfrac{1}{3}\right\}\qquad\text{(siehe Abbildung)}$$

der Potenzreihe hat den Rand

$$\partial U_\rho(z_0)=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z+\tfrac{\mathrm{i}}{6}|=\tfrac{1}{3}\right\}.$$

Dieser Rand schneidet die reelle Achse in den Punkten $\pm\frac{1}{6}\sqrt{3}$. Somit liegt für $|z|<\frac{1}{6}\sqrt{3}$ (absolute) Konvergenz und für $|z|>\frac{1}{6}\sqrt{3}$ Divergenz vor. In den Randpunkten $z=\pm\frac{1}{6}\sqrt{3}$ gilt $|z+\frac{\mathrm{i}}{6}|=\frac{1}{3}$, also $|3z+\frac{\mathrm{i}}{2}|=3|z+\frac{\mathrm{i}}{6}|=1$, und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(3z+\frac{\mathrm{i}}{2})^n}{n(n+1)}\right|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|3z+\frac{\mathrm{i}}{2}|^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe besitzt demnach eine konvergente Majorante (vgl. Beispiel 1.8.2) und ist nach dem Majoranten–Kriterium 1.9.10 konvergent. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe für alle $z\in\mathbb{R}$ mit $|z|\leqq\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

**Aufgabe H 65.** *Formel von Euler und de Moivre*

Schreiben Sie $f$ unter Verwendung der Formel von Euler und de Moivre als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und Funktionen der Form $\cos(bx)$, wobei $a,\, b \in \mathbb{N}_0$ .

**(a)** $f(x) = \sin(x)^3$

**(b)** $f(x) = \sin(5x)\cos(3x)^2$

**(c)** $f(x) = \sin(x)^4 \cos(2x)$

**(d)** $f(x) = (\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x))^3$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Mit der binomischen Formel $(a+b)^n = \sum_{k \leqq n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(x)^3 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \tfrac{-1}{8\mathrm{i}}(-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) \\ &= \tfrac{-1}{8\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x)\end{aligned}$$

**(b)** Es ist

$$\begin{aligned}\sin(5x)\cos(3x)^2 &= \frac{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{8\mathrm{i}}\left(\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{8\mathrm{i}}\left(\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{8\mathrm{i}}\left(2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{11\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-11\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(2\sin(5x) + \sin(11x) - \sin(x)\right).\end{aligned}$$

**(c)** Wir verwenden wieder die binomische Formel und erhalten:

$$\begin{aligned}\sin(x)^4\cos(2x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^4 \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2} \\ &= \tfrac{1}{32}\left(\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) \\ &= \tfrac{1}{32}\left(\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) \\ &= \tfrac{1}{32}\left(7\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 7\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x} - 8\right) \\ &= \tfrac{1}{16}\left(7\cos(2x) - 4\cos(4x) + \cos(6x) - 4\right)\end{aligned}$$

**(d)** Es gilt nach Euler und de Moivre

$$\begin{aligned}(\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x))^3 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)^3 \\ &= \tfrac{1}{8}\left(2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^3 = \mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} = \cos(6x) + \mathrm{i}\sin(6x).\end{aligned}$$

**Aufgabe H 66.** *Wie hängt $\rho_{f \cdot g}$ mit $\rho_f$ und $\rho_g$ zusammen?*

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} 4 & \text{für } n = 0 \\ -\frac{2}{3^n} & \text{für } n \geqq 1 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{mit} \quad b_n := \begin{cases} 9 & \text{für } n = 0 \\ \frac{3}{2^n} & \text{für } n \geqq 1. \end{cases}$$

**(a)** Berechnen Sie die Konvergenzradien $\rho_f$ von $f$, $\rho_g$ von $g$ und $\rho_{f\cdot g}$ von $f\cdot g$.

**(b)** Stellen Sie $f$, $g$ und $f\cdot g$ als gebrochen rationale Funktionen von $z$ dar.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Konvergenzradien $\rho_f$ und $\rho_g$ werden durch die abweichende Definition der Folgenglieder $a_0$ und $b_0$ nicht beeinflusst. Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

also $\rho_f = 3$ und $\rho_g = 2$.

Die Potenzreihe zu $f\cdot g$ ist nach 1.14.11.4 durch

$$f(z)\,g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}, \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}_0,$$

gegeben und in jedem Fall für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z| < \min(\rho_f,\rho_g) = 2$ konvergent. Wir untersuchen durch direktes Betrachten der Koeffizienten $c_n$, ob die Potenzreihe nur für diese $z$ konvergiert oder ob ihr tatsächlicher Konvergenzradius $\rho_{f\cdot g}$ größer als $2$ ist. Mit Hilfe der geometrischen Summenformel aus Beispiel 1.8.4 ergibt sich

$$\begin{aligned}
c_n &= a_0\,b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\,b_{n-k} + a_n\,b_0 = 4\cdot\frac{3}{2^n} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^k}\cdot\frac{3}{2^{n-k}} - 9\cdot\frac{2}{3^n} \\
&= \frac{12}{2^n} - 6\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k}{2^n\,3^k} - \frac{18}{3^n} = \frac{12}{2^n} - \frac{6}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 1\right] - \frac{18}{3^n} \\
&= \frac{12}{2^n} - \frac{6}{2^n}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - 1\right] - \frac{18}{3^n} = \frac{12}{2^n} - \frac{6}{2^n}\left[3 - \frac{3\cdot 2^n}{3^n} - 1\right] - \frac{18}{3^n} \\
&= \frac{12}{2^n} - \frac{18}{2^n} + \frac{18}{3^n} + \frac{6}{2^n} - \frac{18}{3^n} = 0, \qquad \text{für alle } n \geqq 1.
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$ besitzt die Potenzreihe für $f\cdot g$ den Konvergenzradius $+\infty$.

Wie die Summe $f+g$ (vgl. Aufgabe P52) kann also auch das Produkt $f\cdot g$ zweier Potenzreihen einen Konvergenzradius besitzen, der größer ist als das Minimum der Konvergenzradien der Reihen $f$ und $g$.

**(b)** Durch Anwenden der geometrischen Summenformel erhält man die Darstellungen

$$\begin{aligned}
f(z) &= 4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}z^n = 4 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = 4 - 2\left[\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - 1\right] \\
&= 4 - 2\left[\frac{3}{3-z} - 1\right] = 6 - \frac{6}{3-z} = \frac{6z-12}{z-3}, \qquad \text{und} \\
g(z) &= 9 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}z^n = 9 + 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = 9 + 3\left[\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - 1\right] \\
&= 9 + 3\left[\frac{2}{2-z} - 1\right] = 6 + \frac{6}{2-z} = \frac{6z-18}{z-2},
\end{aligned}$$

für $|z| < \rho_f$ bzw. $|z| < \rho_g$. Für die Produktpotenzreihe gilt

$$f(z)\,g(z) \;=\; \frac{6z-12}{z-3}\cdot\frac{6z-18}{z-2} \;=\; \frac{6(z-2)}{z-3}\cdot\frac{6(z-3)}{z-2} \;=\; 36,$$

in Übereinstimmung mit $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = a_0\, b_0 + 0z + 0z^2 + \ldots = 4 \cdot 9 = 36$.

**Aufgabe H 67.** *Potenzreihen*

Bestimmen Sie den Konvergenzkreis $K$ der Potenzreihe $f(z)$. Geben Sie für $f(z)$ einen geschlossenen Funktionsterm an. Bestimmen Sie die Partialsummen $S_1(z)$ und $S_2(z)$ der Potenzreihe $f(z)$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto S_1(x)$ und $x \mapsto S_2(x)$ für $x \in K \cap \mathbb{R}$ in dasselbe Koordinatensystem.

**(a)** $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n!}$ **(b)** $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/3}{n} (2z-1)^n$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir berechnen den Konvergenzradius $\rho$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Mit Koeffizienten $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ ergibt dies

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Der Konvergenzradius ist $\rho = +\infty$. Also ist der Konvergenzkreis $K = \mathbb{C}$. Vergleicht man $f(z)$ mit der Exponentialreihe aus Beispiel 1.14.10, so erkennt man

$$f(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n!} \;=\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n!}\right) - 1 \;=\; \exp(1-z) - 1.$$

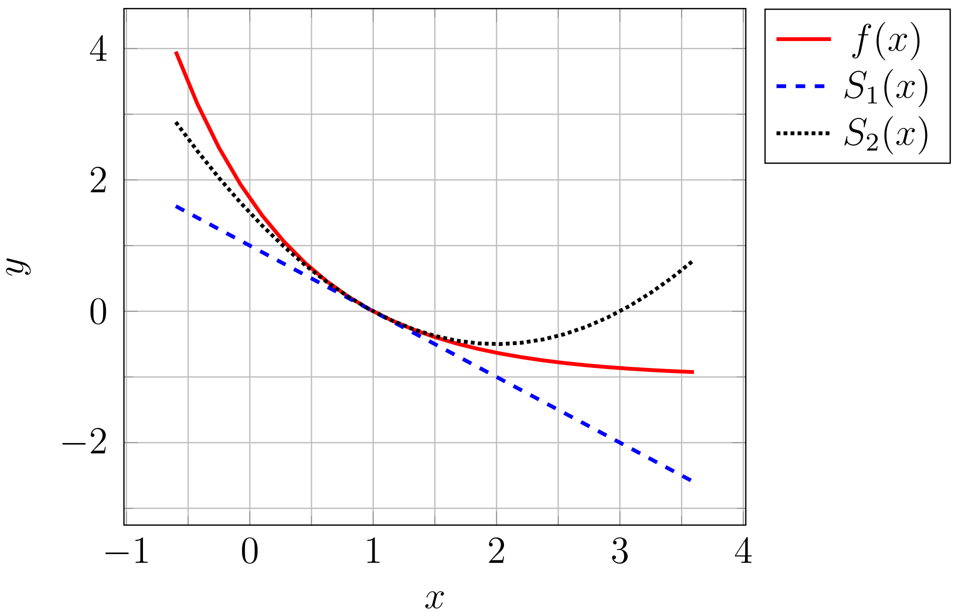
Die $n$-te Partialsumme $S_n$ ist nach Definition 1.8.1 gegeben durch

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-z)^k}{k!}.$$

Somit erhalten wir

$$S_1(z) \;=\; 1 - z \qquad \text{und} \qquad S_2(z) \;=\; (1-z) + \tfrac{1}{2}(1-z)^2.$$

Skizze:



**(b)** Nach Definition 1.14.14 ist

$$\binom{1/3}{n} = \frac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}.$$

Um den Konvergenzradius zu bestimmen, formen wir $f(z)$ um:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/3}{n}(2z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}2^n\binom{1/3}{n}(z-\tfrac{1}{2})^n.$$

Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\binom{1/3}{n+1}}{2^n\binom{1/3}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|2\cdot\frac{\frac{1}{3}-n}{n+1}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2}{3}}{n+1}-\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\right| = |0-2| = 2.\end{aligned}$$

Folglich ist der Konvergenzradius $\rho=\frac{1}{2}$ und der Konvergenzkreis

$$K = \{z\in\mathbb{C} \mid \left|z-\tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{2}\}.$$

Als nächstes vergleichen wir die Potenzreihe mit Beispiel 1.14.16 und setzen $\widetilde{z} := 2z-1$. Für $z\in K$ gilt $|\widetilde{z}|<1$ und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}\widetilde{z}^n = (1+\widetilde{z})^{\frac{1}{3}} = (2z)^{\frac{1}{3}}.$$

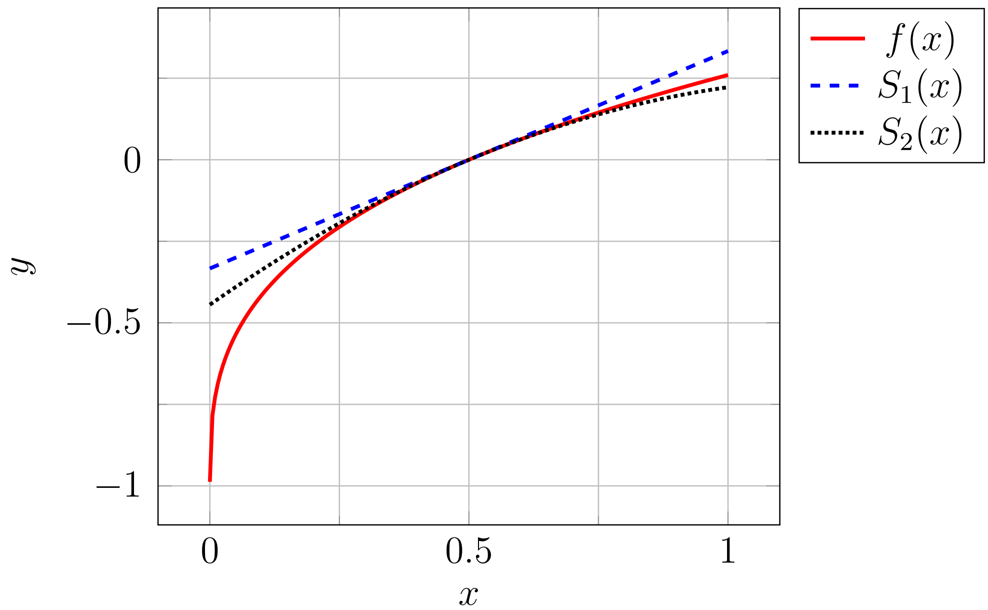
Demnach erhalten wir

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/3}{n}(2z-1)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}(2z-1)^n\right)-1 = (2z)^{\frac{1}{3}}-1.$$

Die Partialsummen lauten

$$S_1(z) = \tfrac{1}{3}(2z-1) \qquad \text{und} \qquad S_2(z) = \tfrac{1}{3}(2z-1)-\tfrac{1}{9}(2z-1)^2.$$

Skizze für $x\in K\cap\mathbb{R}=(0,1)$:



## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 68.** *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von $f$. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von $f'$ und von $f''$. Berechnen Sie $f'$ und $f''$.

**(a)** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ **(b)** $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

**(c)** $f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}$ **(d)** $f(x) = \ln(\tan(x)^2)$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Der Definitionsbereich ist gegeben durch $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ und die Ableitungen berechnen sich wie folgt:

$$f'(x) = \Big(\frac{1}{1-x^2}\Big)' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \Big(\frac{2x}{(1-x^2)^2}\Big)' = \frac{2(1-x^2)^2 - 2x\,2(1-x^2)\,(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

Für $f'$ und $f''$ ergibt sich derselbe Definitonsbereich wie für $f$.

**(b)** Der Definitionsbereich ist gegeben durch $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Wir bekommen für die Ableitungen folgendes

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$f''(x) = \Big(-\frac{1}{\sin^2(x)}\Big)' = \frac{2\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

$f'$ und $f''$ haben jeweils $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap D_f = D_f$ als Definitionsbereich.

**(c)** Der Definitionsbereich ist gegeben durch $D_f = \mathbb{R}$. Wir lösen die Wurzel $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ im Zähler auf (je nach dem Vorzeichen von $x+1$) und schreiben

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-1}{\sqrt{x^2+1}} = -(x+1)(x^2+1)^{-1/2} & \text{für } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = (x+1)(x^2+1)^{-1/2} & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

Für $x < -1$ berechnen wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{-(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{-(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)\frac{2x}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^2+1)^{\frac{2}{2}}}$$

$$= \frac{-(x^2+1)+(x+1)x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Analog berechnen wir die Ableitung für $x > -1$ (dabei ändert sich nur das Vorzeichen), und erhalten

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} & \text{für } x < -1 \\ \dfrac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} & \text{für } x > -1\,. \end{cases}$$

An der Stelle $x = -1$ ist der Nenner von $f(x)$ nicht differenzierbar, weil die Wurzelfunktion bei Null nicht differenzierbar ist.
Die zweite Ableitung berechnen wir wieder mit Hilfe der Quotientenregel als

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{x-1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right) &= \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,2x}{(x^2+1)^{\frac{6}{2}}} \\ &= \frac{x^2+1-3(x-1)x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2x^2+3x+1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}\,. \end{aligned}$$

Analog berechnen wir die zweite Ableitung für $x > -1$ (dabei ändert sich wieder nur das Vorzeichen), und erhalten

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2+3x+1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} & \text{für } x < -1 \\ \dfrac{2x^2-3x-1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

Die Ableitungen $f'$ und $f''$ haben jeweils $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ als Definitionsbereich.

**(d)** Der Definitionsbereich ist gegeben durch $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Wir bekommen für die Ableitungen folgendes

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sin(x)\cos(x)} \\ f''(x) &= \frac{2\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \frac{2}{\cos^2(x)} - \frac{2}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

$f'$ und $f''$ haben jeweils $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap D_f = D_f$ als Definitionsbereich.

**Aufgabe H 69.** *Differenzierbarkeit*

**(a)** Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{für } x \geqq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x + |x|\,|x-2|\ .$$

**(b)** Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ und $g$ an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$ differenzierbar ist.

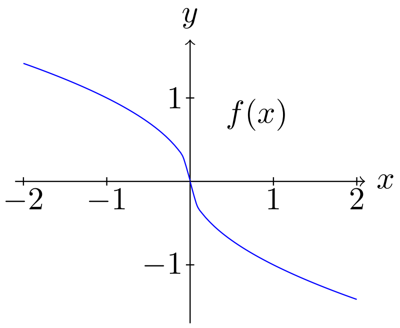
**(c)** Finden Sie ein Polynom $p$ so, dass die Funktion

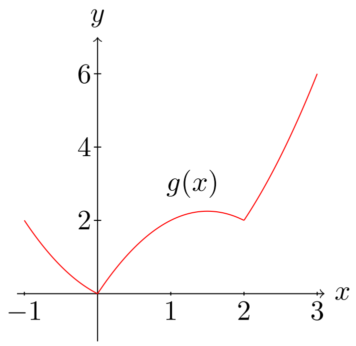
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \ln(2+|x|) & \text{für } x \leqq 0 \\ p(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

zweimal differenzierbar, aber nicht dreimal differenzierbar ist.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Graphen der Funktionen $f$ und $g$ :




Zum Zeichnen von $g$ verwendet man die betragsfreie Darstellung

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x\,, & \text{für } x \leqq 0 \\ -x^2 + 3x\,, & \text{für } 0 < x \leqq 2 \\ x^2 - x\,, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

**(b)** Für den Differenzenquotienten von $f$ bei $x_0 = 0$ gilt

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{-\sqrt{x} + \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Da kein endlicher rechtsseitiger Grenzwert vorliegt, existiert auch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nicht, d. h. $f$ ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Im Fall der Funktion $g$ ergibt sich:

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{(-x^2 + 3x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0+0} (-x + 3) = 3,$$

$$\lim_{x \to x_0-0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{(x^2 - x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0-0} (x - 1) = -1,$$

d. h. $g$ ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

An der Stelle $x_1 = 2$ ist $g$ nicht differenzierbar, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1+0} \tfrac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} &= \lim_{x \to 2+0} \tfrac{(x^2-x)-2}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2+0} \tfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2+0} (x+1) = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1-0} \tfrac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} &= \lim_{x \to 2-0} \tfrac{(-x^2+3x)-2}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2-0} \tfrac{(x-2)(-x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2-0} (1-x) = -1. \end{aligned}$$

**(c)** Wir berechnen zunächst die Ableitungen der Funktion

$$l\colon \quad (-\infty, 0] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \ln(2-x)\,.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} l'\colon &\quad (-\infty, 0] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \frac{1}{x-2} \\ l''\colon &\quad (-\infty, 0] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto -\frac{1}{(x-2)^2} \\ l'''\colon &\quad (-\infty, 0] \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \frac{2}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

Für $p$ wählen wir ein Polynom vom Grad $2$ (es wird sich am Ende der Rechnung herausstellen, dass das genügt). Um die Rechnung einfacher zu gestalten, setzen wir mit

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

an. Damit die Funktion $h$ stetig ist (diese Eigenschaft muss erfüllt sein, damit $h$ differenzierbar werden kann), muss

$$\lim_{x\to 0-0} h(x) = \lim_{x\to 0+0} h(x)$$

gelten. Daraus erhalten wir die Bedingung

$$\lim_{x\to 0-0} \ln(2-x) = \lim_{x\to 0+0} ax^2 + bx + c$$

und daraus $c = \ln(2)$. Nun wollen wir mit Hilfe des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ dafür sorgen, dass $h$ differenzierbar ist. Dafür soll gelten

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{h(x)-h(0)}{x}\,.$$

Wir erhalten

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\ln(2-x)-\ln(2)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{ax^2+bx}{x} = \lim_{x\to 0+0} (ax+b) = b\,.$$

Da die Funktion $l$ differenzierbar und die Funktion $l'$ stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\ln(2-x)-\ln(2)}{x} = l'(0) = -\frac{1}{2}$$

und wir erhalten $b = -\frac{1}{2}$. Damit hat $h$ die Ableitung

$$h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{für} \quad x \leqq 0 \\ 2ax - \frac{1}{2} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

Damit $h$ zweimal differenzierbar wird, betrachten wir den Differenzenquotienten von $h'$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-0} \frac{h'(x)-h'(0)}{x} &= \lim_{x\to 0+0} \frac{h'(x)-h'(0)}{x} \\ \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2}}{x} &= \lim_{x\to 0+0} \frac{2ax-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{x} \\ l''(0) &= 2a \\ -\frac{1}{8} &= a\,. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$p(x) = \ln(2) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

und

$$h'' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-2)^2} & \text{für } \; x \leqq 0 \\ -\frac{1}{4} & \text{für } \; x > 0 \end{cases} .$$

Diese Funktion $h''$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{h''(x) - h''(0)}{x} = l'''(0) = -\frac{1}{4}$$

und

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{h''(x) - h''(0)}{x} = 0$$

sind verschieden.

**Aufgabe H 70.** *Mehrfaches Ableiten*

Seien $a,\, b \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für die angegebene $n$-te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ . Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

**(a)** $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (\sinh(ax) - \cosh(ax))$

**(b)** $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n x\mathrm{e}^x$, wobei $x > 0$

**(c)** $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n a^{-x}$, wobei $x > 0$

**(d)** $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \frac{1}{a-bx}$ , wobei $x \neq \frac{a}{b}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen, dass die folgende Gleichung gilt.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (\sinh(ax) - \cosh(ax)) = (-a)^n (\sinh(ax) - \cosh(ax))$$

**IA** Für $n = 1$ gilt $(\sinh(ax) - \cosh(ax))' = (-a)(\sinh(ax) - \cosh(ax))$.

**IS** Dann gilt für die $(n+1)$-te Ableitung:

$$((-a)^n (\sinh(ax) - \cosh(ax)))' = (-a)^{n+1} (\sinh(ax) - \cosh(ax))$$

**(b)** Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen, dass die folgende Gleichung gilt.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n x\mathrm{e}^x = n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$$

**IA** Für $n = 1$ gilt $(x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$.

**IS** Dann gilt für die $n+1$-te Ableitung:

$$(n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)' = n\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (n+1)\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$$

**(c)** Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen, dass die folgende Gleichung gilt.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n a^{-x} = (-\ln(a))^n a^{-x}$$

**IA** Für $n = 1$ gilt $\left(a^{-x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{-x\ln(a)}\right)' = -\ln(a)\,\mathrm{e}^{-x\ln(a)} = -\ln(a)\,a^{-x}$.

**IS** Dann gilt für die $n+1$-te Ableitung:

$$\left((-\ln(a))^n a^{-x}\right)' = (-\ln(a))^n\ (-\ln(a))\ a^{-x} = (-\ln(a))^{n+1}\ a^{-x}$$

**(d)** Und noch einmal:

$$\left(\frac{1}{a-bx}\right)^{(n)} = \frac{n!b^n}{(a-bx)^{n+1}}$$

**IA** Für $n = 1$ gilt $\left(\frac{1}{a-bx}\right)' = \frac{-1\cdot(-b)}{(a-bx)^2} = \frac{1!b^1}{(a-bx)^{1+1}}$ .

**IS** Dann gilt für die $n+1$-te Ableitung

$$\left(\frac{n!b^n}{(a-bx)^{n+1}}\right)' = \frac{0 - n!b^n(n+1)(a-bx)^n(-b)}{(a-bx)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!b^{n+1}}{(a-bx)^{n+2}}$$

**Aufgabe H 71.** *Differentiation der Umkehrfunktion*

**(a)** Überprüfen Sie, ob $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \to \ln(4+\mathrm{e}^{2x})$ streng monoton ist. Bestimmen Sie den Wertebereich $f(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}$ und bestimmen Sie damit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}f^{-1}(y)$, ohne Verwendung von Satz 2.3.1. Bestimmen Sie abermals $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}f^{-1}(y)$, nun unter Verwendung von Satz 2.3.1. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

**(b)** Sei $I := [-0{,}5\,,\ 4{,}5\,]$. Gegeben sei die differenzierbare und streng monotone Funktion $f\colon I\to\mathbb{R}$ mit

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 0,5 |
| 2 | 2,3 | 0,2 |
| 3 | 3 | 1,5 |
| 4 | 6 | 4 |

Wir betrachten $f^{-1} : f(I)\to I$. Berechnen Sie $\left(f^{-1}\right)'(1)$ und $\left(f^{-1}\right)'(2)$.
Skizzieren Sie die Graphen von $f$ und von $f^{-1}$ näherungsweise.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und stets positiv, die Logarithmusfunktion ist streng monoton wachsend. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} &: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ \\ \ln(4+\mathrm{e}^{2x}) &: \quad \mathbb{R}\to(\ln(4+0),\infty) = (\ln(4),\infty)\ . \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion lautet somit

$$f^{-1}\colon\ (\ln(4),\infty)\to\mathbb{R}\colon y\mapsto \frac{\ln\left(e^y-4\right)}{2}\,,$$

und die Ableitung der Umkehrfunktion ergibt sich zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}f^{-1}(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\frac{\ln\left(e^y-4\right)}{2} = \frac{e^y}{2\left(e^y-4\right)}\,.$$

oder mit Verwendung von Satz 2.3.1 zu

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} f^{-1}(y)\right|_{y=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{4+e^{2x_0}}{2e^{2x_0}} = \frac{e^y}{2\,(e^y-4)}$$

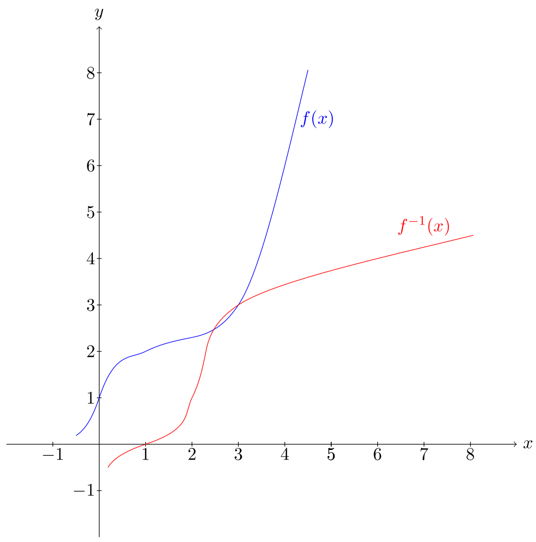
**(b)** **(i)** Der Funktionswert $y_0 = 1$ ergibt sich für $x_0 = 0$, damit ist die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $f(0)$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} f^{-1}(y)\right|_{y=f(0)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}\,.$$

**(ii)** Der Funktionswert $y_1 = 2$ ergibt sich für $x_1 = 1$, damit ist die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $f(1)$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} f^{-1}(y)\right|_{y=f(1)} = \frac{1}{f'(1)} = 2\,.$$

Graphen der Funktionen $f$ und $f^{-1}$ :



## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 72.** *Differentialquotient und l'Hospital*

**(a)** Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{(-t^4)}$.

**(b)** Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \mathrm{e}^{(-1/x^4)}$ für $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ und $f(0) := 0$. Berechnen Sie $f'(0)$ mittels Differentialquotienten.

*Hinweis:* Verwenden Sie **(a)**.

**(c)** Sei $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (x^2)^{(x^2)}$. Ist $g$ stetig in $x=0$ ?
Bestimmen Sie $g'(0)$ mittels Differentialquotienten. Ist $g'$ differenzierbar in $x=0$ ?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Nach der Regel von l'Hospital ist

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{(-t^4)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{(t^4)}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(t)'}{(\mathrm{e}^{(t^4)})'} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{4t^3\mathrm{e}^{(t^4)}} = 0.$$

**(b)** Für den Differentialquotienten von $f$ bei $x_0=0$ gilt nach Substitution $h=1/t$

$$\lim_{h\to0+0}\frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to0+0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^4}}}{h} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{(-t^4)}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{(-t^4)} = 0$$

und nach Substitution $h=-1/t$

$$\lim_{h\to0-0}\frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to0-0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^4}}}{h} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{(-t^4)}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} -t\mathrm{e}^{(-t^4)} = 0.$$

Die Funktion $f$ ist differenzierbar bei $x_0=0$, mit $f'(0)=0$.

**(c)** Für den Grenzwert von $g$ bei $x_0=0$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(x^2\right)^{\left(x^2\right)} &= \lim_{x\to0}\mathrm{e}^{2\ln(|x|)x^2} = \exp\left(\lim_{x\to0}2\ln(|x|)x^2\right) = \exp\left(\lim_{x\to0}\frac{2\ln(|x|)}{\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{-2}{x^3}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to0}-x^2\right) = \mathrm{e}^0 = 1 \quad (=0^0).\end{aligned}$$

Die Funktion $g$ ist stetig. Für den Differentialquotienten von $g$ bei $x_0=0$ gilt

$$\begin{aligned}g'(0) &= \lim_{h\to0}\frac{g(h)-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(h^2)^{(h^2)}-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^{2h^2\ln(|h|)}-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\left(\mathrm{e}^{2h^2\ln(|h|)}-1\right)'}{(h)'}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^{2h^2\ln(|h|)}\,(4h\ln(|h|)+2h)}{1} = \lim_{h\to0}\frac{1\,(0+0)}{1} = 0.\end{aligned}$$

Die Funktion $g$ ist differenzierbar bei $x_0=0$, mit $g'(0)=0$.
Für den Differentialquotienten von $g'$ bei $x_0=0$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{g'(h)-0}{h} &= \lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^{2h^2\ln(|h|)}\,(4h\ln(|h|)+2h)}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\mathrm{e}^{2h^2\ln(|h|)}\,(4\ln(|h|)+2)\\ &= 1\,(-\infty+2) = -\infty.\end{aligned}$$

$g'$ ist bei $x_0=0$ nicht differenzierbar.

**Aufgabe H 73.** *Mittelwertsatz, Monotonie und Funktionsgrenzwerte*
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

**(a)** Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}\,.$$

*Hinweis:* Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $h\colon [x, x+1] \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \ln(t)$ an.

**(b)** Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$.

**(c)** Zeigen Sie mit **(a)** und **(b)**, dass $f$ streng monoton wachsend ist.

**(d)** Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ unter Verwendung von **(a)**.
Berechnen Sie damit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Sei $x \in \mathbb{R}^+$. Die Logarithmusfunktion ist auf dem Intervall $[x, x+1] \subsetneq \mathbb{R}^+$ stetig und differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz 2.4.4 existiert ein (von $x$ abhängiges) $\xi = \xi(x) \in (x, x+1)$ so, dass

$$h'(\xi) = \frac{h(x+1)-h(x)}{(x+1)-x} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{1} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Aus $x < \xi < x+1$ folgt

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}, \qquad \text{und damit} \qquad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}\,.$$

**(b)** Wir schreiben $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right],$$

und mit der Produktregel folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\,,$$

so dass insgesamt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$ gilt.

**(c)** Nach **(a)** ist $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ , so dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}}_{>0}\underbrace{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]}_{>0} > 0, \qquad \text{für alle } x > 0,$$

gilt. Gemäß 2.4.8 ist $f$ streng monoton wachsend.

**(d)** Aus $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ folgt $\frac{x}{x+1} < x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$, für alle $x > 0$.
Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1$ muss dann auch $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ sein (Sandwichsatz!).
Daraus folgt $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

**Aufgabe H 74.** *Regel von l'Hospital*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

**(a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x + x^2)}{x\ln(x)}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4^x - 2^{x+3} + 16}{(x-2)^2}$

**(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(2x))^2}{1-\cosh(x)}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^{(\mathrm{e}^x)}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es liegt Situation $\mathbf{U}_{+\infty}$ vor.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^x + x^2)}{x\ln(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\mathrm{e}^x + x^2))'}{(x\ln(x))'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^x+2x}{\mathrm{e}^x+x^2}}{\ln(x)+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + 2x}{\mathrm{e}^x + x^2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathrm{e}^x + 2x)'}{(\mathrm{e}^x + x^2)'} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x + 2x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathrm{e}^x + 2)'}{(\mathrm{e}^x + 2x)'} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)+1} = 1\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

**(b)** Es liegt Situation $\mathbf{N}_2$ vor.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{4^x - 2^{x+3} + 16}{(x-2)^2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(2^x-4)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{\left((2^x-4)^2\right)'}{((x-2)^2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2\,(2^x-4)\,2^x\ln(2)}{2(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{x-2} \cdot \lim_{x\to 2} 2^x\ln(2) = \lim_{x\to 2} \frac{(2^x-4)'}{(x-2)'} \cdot \lim_{x\to 2} 2^x\ln(2) \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\ln(2)2^x}{1} \cdot \lim_{x\to 2} 2^x\ln(2) = 4\ln(2)\cdot 4\ln(2) = 16\ln(2)^2.
\end{aligned}$$

**(c)** Es liegt Situation $\mathbf{N}_0$ vor.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(2x))^2}{1-\cosh(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left((\sin(2x))^2\right)'}{(1-\cosh(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)\cos(2x)}{-\sinh(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sinh(x)} \cdot \lim_{x\to 0}(-4\cos(2x)) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(2x))'}{(\sinh(x))'} \cdot \lim_{x\to 0}(-4\cos(2x)) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{\cosh(x)} \cdot \lim_{x\to 0}(-4\cos(2x)) = 2\cdot(-4) = -8.
\end{aligned}$$

**(d)** Nach Umformung liegt Situation $\mathbf{N}_{+\infty}$ vor.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^{(\mathrm{e}^x)} &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\mathrm{e}^x\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\right)'}{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right)}{-\mathrm{e}^{-x}}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right) = \mathrm{e}^{-1}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe H 75.** *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x\mathrm{e}^{1-x}$ gegeben.

**(a)** Leiten Sie mittels vollständiger Induktion eine Formel für $f^{(n)}(x)$ für $n\in\mathbb{N}_0$ her.

**(b)** Geben Sie das Taylorpolynom $T_3(f,x,1)$ und die Taylorreihe $T(f,x,1)$ an. Zeigen Sie durch Abschätzen des Restglieds, dass $T(f,x,1)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist.

**(c)** Bestimmen Sie ein $C>0$ so, dass

$$|f(x)-T_3(f,x,1)| \leqq C|x-1|^4 \quad \text{für alle } x\in[0,2] \text{ ist.}$$

**(d)** Bestimmen Sie ein $a\in(0,1)$ so, dass

$$|f(x)-T_3(f,x,1)| \leqq 10^{-4} \quad \text{für alle } x\in[1-a,1+a] \text{ ist.}$$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die ersten drei Ableitungen von $f(x)=x\mathrm{e}^{1-x}$ lauten

$$f'(x)=(1-x)\,\mathrm{e}^{1-x},\qquad f''(x)=(x-2)\,\mathrm{e}^{1-x},\qquad f'''(x)=(3-x)\,\mathrm{e}^{1-x},$$

was die Vermutung nahelegt, dass

$$f^{(n)}(x) \;=\; (-1)^n(x-n)\,\mathrm{e}^{1-x}, \qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R},\ \ n\in\mathbb{N}_0\,,$$

gilt. Wir beweisen diese Formel durch vollständige Induktion:

**IA** Für $n=0$ ist $f^{(0)}(x)=f(x)=x\mathrm{e}^{1-x}=(-1)^0(x-0)\,\mathrm{e}^{1-x}$. ✓

**IS** Ist die Formel für die $n$–te Ableitung korrekt, so folgt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f^{(n)}(x) \;=\; (-1)^n\left[\mathrm{e}^{1-x}-(x-n)\,\mathrm{e}^{1-x}\right]\\
&= (-1)^n\,(1-x+n)\,\mathrm{e}^{1-x} \;=\; (-1)^{n+1}\left[x-(n+1)\right]\mathrm{e}^{1-x}. \quad ✓
\end{aligned}$$

**(b)** Setzt man $f^{(k)}(1)=(-1)^k(1-k)$ in die Definition des Taylorpolynoms $n$–ter Stufe und der Taylorreihe von $f$ um den Entwicklungspunkt $x_0=1$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
T_n(f,x,1) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(x-1)^k \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(1-k)}{k!}\,(x-1)^k, \quad \text{insbesondere}\\
T_3(f,x,1) &= \sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k(1-k)}{k!}\,(x-1)^k \;=\; 1-\tfrac{1}{2}\,(x-1)^2+\tfrac{1}{3}\,(x-1)^3, \quad \text{und}\\
T(f,x,1) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(x-1)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-k)}{k!}\,(x-1)^k,
\end{aligned}$$

vgl. Definition 2.6.2 und 2.6.6. Das Restglied nach Lagrange hat die Form

$$R_n(f,x,1) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-1)^{n+1} \;=\; \frac{(-1)^{n+1}\,(\xi-n-1)\,\mathrm{e}^{1-\xi}}{(n+1)!}\,(x-1)^{n+1},$$

mit einem $\xi = \xi_{x,1}$ zwischen $\min(1,x)$ und $\max(1,x)$, vgl. Bemerkung 2.6.3.2.

Um nachzuweisen, dass die Funktion $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird, muss nach Satz 2.6.7 gezeigt werden, dass $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f,x,1) = 0$ für jedes fest gewählte $x \in \mathbb{R}$ gilt. Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} |R_n(f,x,1)| \;&=\; \left|\frac{(-1)^{n+1}\,(\xi-n-1)\,\mathrm{e}^{1-\xi}}{(n+1)!}\,(x-1)^{n+1}\right| \\ &=\; \left|\frac{(\xi-n-1)\,\mathrm{e}^{1-\xi}}{(n+1)!}\right|\,|x-1|^{n+1} \;=\; \left|\frac{\xi-n-1}{n+1}\right|\,\mathrm{e}^{1-\xi}\,|x-1|\,\frac{|x-1|^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Aus $\xi > \min(1,x)$ folgt $\mathrm{e}^{1-\xi} < \mathrm{e}^{1-\min(1,x)}$. Dies liefert die Abschätzung

$$0 \;\leqq\; |R_n(f,x,1)| \;\leqq\; \left|\frac{\xi-n-1}{n+1}\right|\,\mathrm{e}^{1-\min(1,x)}\,|x-1|\,\frac{|x-1|^n}{n!}\,,$$

und da $\mathrm{e}^{1-\min(1,x)}\,|x-1|$ nicht von $n$ abhängt und

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\xi-n-1}{n+1}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1-\xi}{n+1}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|1-\frac{\xi}{n+1}\right| \;=\; 1 \qquad \text{sowie}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^n}{n!} \;=\; 0 \qquad \text{(vgl. Beispiel 1.5.9)}$$

gilt, muss auch

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\xi-n-1}{n+1}\right|\,\mathrm{e}^{1-\min(1,x)}\,|x-1|\,\frac{|x-1|^n}{n!} \;=\; 0$$

und damit gemäß der obigen Abschätzung $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f,x,1) = 0$ sein.

**(c)** Für $n = 3$ und $x \in [0,2]$ ist

$$|f(x) - T_3(f,x,1)| \;=\; |R_3(f,x,1)| \;=\; \left|\frac{(\xi-4)\,\mathrm{e}^{1-\xi}}{4!}\right|\,|x-1|^4,$$

mit einem $\xi = \xi_{x,1}$ im Intervall $\big(\min(1,x),\max(1,x)\big) \subseteqq (0,2)$. Aus $0 < \xi < 2$ folgt $|\xi - 4| < 4$ und wegen der Monotonie der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{1-\xi} < \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, so dass

$$\left|\frac{(\xi-4)\,\mathrm{e}^{1-\xi}}{4!}\right| \;=\; \frac{|\xi-4|\,\mathrm{e}^{1-\xi}}{4!} \;\leqq\; \frac{4\mathrm{e}}{4!} \;=\; \frac{\mathrm{e}}{6} \quad (\approx\; 0{,}4530)$$

und damit die gewünschte Ungleichung mit $C := \frac{\mathrm{e}}{6}$ gilt.

**(d)** Für $0 < a < 1$ ist $[1-a, 1+a] \subseteqq (0,2)$, so dass die Abschätzung aus **(c)** benutzt werden kann. Für $x \in [1-a,1+a]$ ist $x - 1 \in [-a,a]$, d. h. $|x-1| \leqq a$ und

$$C|x-1|^4 \;\leqq\; Ca^4.$$

Aus der Bedingung $Ca^4 \;\leqq\; 10^{-4}$ folgt $a^4 \leqq \frac{10^{-4}}{C}$, also

$$a \;\leqq\; \sqrt[4]{\frac{10^{-4}}{C}} \;=\; \frac{1}{10}\sqrt[4]{\frac{6}{\mathrm{e}}} \quad (\approx\; 0{,}1219).$$

Die Abschätzung ist somit für jedes positive $a \leqq \frac{1}{10}\sqrt[4]{\frac{6}{\mathrm{e}}}$ gültig.

**Bemerkung:** Bei der Bestimmung der Konstanten in **(c)** und **(d)** wurde mehrmals mehr oder weniger grob abgeschätzt, so dass man nicht die optimalen Werte für $C$ und $a$ erhält. Genauere analytische bzw. numerische Untersuchungen zeigen, dass die Abschätzung in **(c)** sogar mit $C = \frac{1}{6}$ gilt und das größtmögliche $a$ etwa $0{,}1663$ ist.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 76.** *Stammfunktion, Kurvendiskussion*

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos(3x))^2 - 1.$$

**(a)** Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema von $f$.

**(b)** Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F$ von $f$.
Bestimmen Sie eine Stammfunktion $G$ von $F$.

**(c)** Skizzieren Sie die Graphen von $f$, $F$ und $G$ in dasselbe Schaubild.

**(d)** An welchen Stellen besitzt $F$ Wendepunkte?
An welchen Stellen besitzt $G$ Wendepunkte?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Zur Bestimmung der Nullstellen betrachten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(3x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(3x) &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow 3x &= \begin{cases} 2\pi n \\ (2n+1)\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &\in \left\{ \frac{2}{3}\pi n, \frac{2n+1}{3}\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Es ist $f'(x) = -2\cos(3x) \cdot 3\sin(3x) = -6\cos(3x)\sin(3x) = -3\sin(6x)$. Notwendige Bedingung für Extrema:

$$\begin{aligned} f'(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(6y) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &\in \left\{ \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.7.1 folgt, da für $y$ mit geraden $n$ bei $f'$ ein Vorzeichenwechsel von negativ nach positiv und bei ungeraden $n$ ein Vorzeichenwechsel von positiv nach negativ vorliegt, dass für $y$ mit $n$ gerade die Funktion $f$ ein lokales Minimum und für $n$ ungerade ein lokales Maximum aufweist.

**(b)**

$$\begin{aligned} \int \cos(3x)^2 - 1 \,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{2}(\cos(6x) + 1) - 1 \,\mathrm{d}\,x \\ &= \int \frac{1}{2}(\cos(6x) - 1) \,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{12}(\sin(6x) - 6x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da *eine* Stammfunktion gefragt ist, wählen wir $c = 0$ und erhalten

$$F(x) = \frac{1}{12}(\sin(6x) - 6x).$$

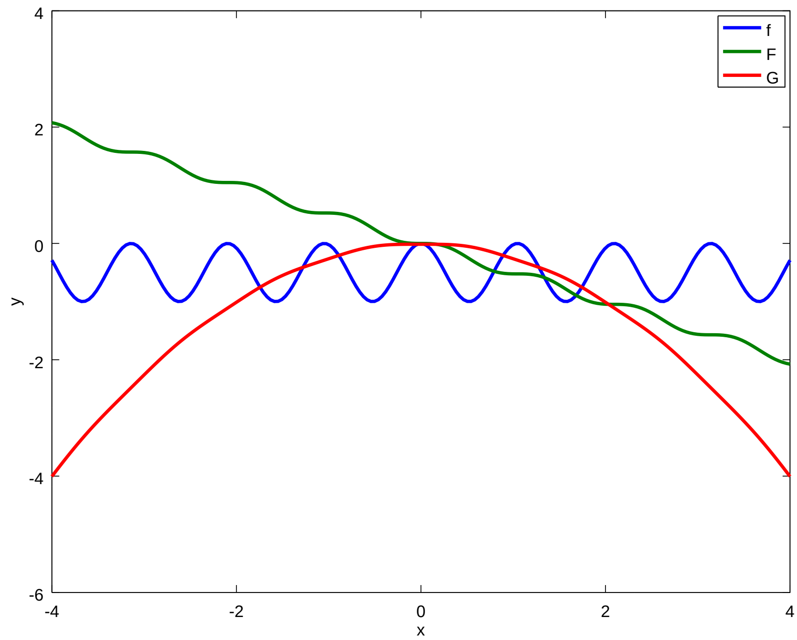
Diese Wahl für $c$ ist naheliegend, da wir nun bei der Bestimmung von $G$ keinen linearen Teil beachten müssen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int F(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{12}(\sin(6x) - 6x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\frac{1}{72}\cos(6x) - \frac{1}{4}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Da wieder nur eine Stammfunktion gefragt ist, wählen wir $c = 0$ und erhalten

$$G(x) = -\frac{1}{72}\cos(6x) - \frac{1}{4}x^2.$$

**(c)**




**(d)** Die Funktion $F$ besitzt an genau den Stellen Wendepunkte, an denen die Funktion $f$ lokale Extrema besitzt (vgl. Definition 2.7.4). Diese Stellen wurden in Aufgabenteil **(a)** bestimmt. Weiterhin besitzt $G$ genau an den Stellen Wendepunkte, an denen die Ableitung $G' = F$ lokale Extrema besitzt. In Frage dafür kommen die Nullstellen von $F' = f$. Argumentiert man wieder mit Lemma 2.7.1 folgt, dass es keine Wendepunkte gibt, da bei keiner Nullstelle von $f$ ein Vorzeichenwechsel vorliegt.

**Aufgabe H 77.** *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie folgende Integrale.

**(a)** $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{3-x^6}\,\mathrm{d}\,x$

**(b)** $\displaystyle\int \frac{x\arctan(x)-\arctan(x)}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}\,x$

**(c)** $\displaystyle\int \frac{(\sin(s))^3-\sin(s)}{\sqrt{5-(\cos(s))^3}}\,\mathrm{d}\,s$

**(d)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\tanh(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ , wobei $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)**

$$\int_0^1 x^5 e^{3-x^6}\,\mathrm{d}\,x =$$

mit $u = x^6, \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 6x^5$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6}e^{3-u}\,\mathrm{d}\,u = \left[-\frac{1}{6}e^{3-u}\right]_0^1 = \frac{1}{6}(e^3 - e^2).$$

**(b)**

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arctan(x)-\arctan(x)}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{(x-1)\arctan(x)}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

mit $u = \arctan(x), \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 1/(x^2+1)$

$$\begin{aligned}&= \int u\,\mathrm{d}\,u \\ &= \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\arctan(x))^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**(c)**

$$\int \frac{(\sin(s))^3-\sin(s)}{\sqrt{5-(\cos(s))^3}}\,\mathrm{d}\,s = \int \frac{\sin(s)((\sin(s))^2-1)}{\sqrt{5-(\cos(s))^3}}\,\mathrm{d}\,s = \int \frac{-\sin(s)(\cos(s))^2}{\sqrt{5-(\cos(s))^3}}\,\mathrm{d}\,s$$

mit $u = (\cos(s))^3, \mathrm{d}\,u = -3(\cos(s))^2\sin(s)\,\mathrm{d}\,s$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{3\sqrt{5-u}}\,\mathrm{d}\,u \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{5-u} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{5-(\cos(x))^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**(d)**

$$\int\limits_1^2 \frac{x}{\tanh(x^2)}\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_1^2 \frac{x\cosh(x^2)}{\sinh(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$$

mit $u = \sinh(x^2)$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2x\cosh(x^2)$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\sinh(1)}^{\sinh(4)} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{1}{2}\ln(u)\right]_{\sinh(1)}^{\sinh(4)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{2}(e^4 - e^{-4})\right) - \ln\left(\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^4 - e^{-4}}{e^1 - e^{-1}}\right).
\end{aligned}$$

**Aufgabe H 78.** *Partielle Integration*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

**(a)** $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int (-2x^2 + 4x + 1)\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$

**(c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** In der folgenden Lösung wird zuerst eine Stammfunktion bestimmt und dann die Grenzen eingesetzt. Selbstverständlich kann man die Grenzen auch schon während der Rechnung einsetzen, dann lässt sich aber nicht durch Ableiten überprüfen, ob man richtig gerechnet hat!

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\sqrt{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln(x)\right] - \int \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln(x)\right] - \int \frac{2}{3}\cdot x^{1/2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2}\right],
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2}\right]_1^9 \\
&= \frac{2}{3}\cdot 27\cdot\ln(9) - \frac{4}{9}\cdot 27 - \frac{2}{3}\cdot\ln(1) + \frac{4}{9} = 36\cdot\ln(3) - \frac{104}{9}
\end{aligned}$$

**(b)**

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{(-2x^2+4x+1)}_{g(x)}\underbrace{\cos(2x)}_{f'(x)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[(-2x^2+4x+1)\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\right] - \int(-4x+4)\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[(-x^2+2x+\tfrac{1}{2})\sin(2x)\right] + \int \underbrace{(x-1)}_{u(x)}\cdot\underbrace{2\sin(2x)}_{v'(x)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[(-x^2+2x+\tfrac{1}{2})\sin(2x)\right] + \left[(x-1)\cdot(-\cos(2x))\right] - \int 1\cdot(-\cos(2x))\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[(-x^2+2x+\tfrac{1}{2})\sin(2x)\right] + \left[(x-1)\cdot(-\cos(2x))\right] + \left[\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right] \\
&= \left[(-x^2+2x+1)\sin(2x)+(1-x)\cos(2x)\right]
\end{aligned}$$

**(c)** Hier wieder zuerst die Stammfunktion, dann die Grenzen einsetzen, aber man darf auch die Grenzen schon vorher einsetzen.

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)}\underbrace{\cos(2x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}\,x &= [\mathrm{e}^x\cos(2x)] - \int \mathrm{e}^x\cdot(-2\sin(2x))\,\mathrm{d}\,x \\
&= [\mathrm{e}^x\cos(2x)] + \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'(x)}\cdot\underbrace{2\sin(2x)}_{v(x)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= [\mathrm{e}^x\cos(2x)+\mathrm{e}^x\cdot 2\sin(2x)] - \int \mathrm{e}^x\cdot 4\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

Nun kann man die Gleichung nach dem gesuchten Integral auflösen und erhält

$$\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\tfrac{1}{5}\mathrm{e}^x(\cos(2x)+2\sin(2x))\right]$$

Einsetzen der Grenzen liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}(\cos(\tfrac{\pi}{2})+2\sin(\tfrac{\pi}{2})) - 1\cdot(\cos(0)+2\sin(0))\right) = \frac{1}{5}\cdot(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-1)$$

**(d)** Beachte: laut Tabelle 3.1.7 ist die Ableitung von $g(x)=\arcsin(x)$ gegeben durch $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\begin{aligned}
\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\arcsin(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= [x\arcsin(x)] - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \\
&= [x\arcsin(x)] - \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u \\
&= [x\arcsin(x)] + \left[\sqrt{u}\right] \\
&= \left[x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}\right]
\end{aligned}$$

(wobei im dritten Schritt substituiert wurde: $u=1-x^2$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}=-2x$ )

**Aufgabe H 79.** *Potenzreihen*

**(a)** Sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(1-x)$. Bestimmen Sie

$$F\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

**(b)** Weiter sei die Funktion

$$g : (-\rho,\rho) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Konvergenzradius $\rho$ und die Ableitungen $g'$ und $g''$.

**(c)** Bestimmen Sie $f'(x)+g''(x)$. Bestimmen Sie $f(x)+g'(x)$. Bestimmen Sie $F(x)+g(x)$. Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $g(x)$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)**

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \underbrace{1}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\ln(1-t)}_{g(t)}\,\mathrm{d}\,t \\
&= [t\cdot\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x t \cdot \frac{-1}{1-t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= x\cdot\ln(1-x) - \int_0^x \frac{1-t}{1-t} - \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= x\cdot\ln(1-x) - [t+\ln(1-t)]_0^x \\
&= x\cdot\ln(1-x) - x - \ln(1-x)
\end{aligned}$$

**Alternative Lösung:** Wer den Trick beim dritten "=" nicht sieht, kann auch in der ersten Zeile mit $u = 1-t$ substituieren, und dann auf $-\ln(u) = (-1)\ln(u)$ partielle Integration anwenden.

**(b)** Für $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$ ist $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)n} = 1$, also ist $\rho = 1$. Somit ist die Potenzreihe auf dem Intervall $(-1,1) = U_1(0)$ konvergent und nach 2.6.10 kann man sie beliebig oft ableiten, und zwar

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
g''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n
\end{aligned}$$

**(c)** $g''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ist die geometrische Reihe, $f'(x) = \frac{-1}{1-x}$, also $f'(x)+g''(x) = 0$ für $x \in (-1,1)$. $f(x)+g'(x)$ ist eine Stammfunktion davon, also konstant. Wegen $f(0)+g'(0) = \ln(1)+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$ ist diese Konstante gleich $0$, also $f(x)+g'(x) = 0$. $F(x)+g(x)$ ist eine Stammfunktion davon, also ist $F(x)+g(x) = c$ konstant. Es folgt $c = F(0)+g(0) = 0$, also $F(x)+g(x) = 0$ und damit

$$g(x) = -F(x) = -x\cdot\ln(1-x) + x + \ln(1-x)$$

*Hinweis:* Dass $g'(x) = -f(x) = -\ln(1-x)$ ist, wird schon in 1.14.9 Beispiel erwähnt, in 2.6.13 wird die Reihe ausgerechnet, allerdings wird der Defininitionsbereich hier zur Abschätzung des Restglieds eingeschränkt auf das Intervall $[-\frac{1}{2}, 1]$.
Setzt man dies voraus, kann man $g$ auch mit Hilfe von Partialbruchzerlegung ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x \\
&= x \cdot (-\ln(1-x)) + \ln(1-x) + x \,.
\end{aligned}$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 80.** *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

**(a)** $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \frac{x^5}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

**(b)** $\displaystyle\int \frac{2}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}\,x$

**(c)** $\displaystyle\int \frac{17x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}\,x$

**(d)** $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+2x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Vor der Partialbruchzerlegung muss zunächst eine Polynomdivision durchgeführt werden, um eine gebrochen rationale Funktion zu erhalten, bei der der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist:

$$\begin{array}{rll}
& x^5 : ((x^2+1)(x+1)^2) & \\
= & x^5 \qquad\qquad : (x^4+2x^3+2x^2+2x+1) & = \; x-2+\frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)(x+1)^2} \\
- & \underline{x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x} & \\
& -2x^4-2x^3-2x^2-x & \\
- & \underline{-2x^4-4x^3-4x^2-4x-2} & \\
& 2x^3+2x^2+3x+2 &
\end{array}$$

Jetzt die Partialbruchzerlegung: Der Ansatz

$$\frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

führt auf $2x^3+2x^2+3x+2 = (A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+(A+B+D)$ und damit auf das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

mit der eindeutigen Lösung $(A,B,C,D) = (2,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$. Es gilt also

$$\frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)}\,.$$

Schließlich integrieren wir:

$$\begin{aligned}
\int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \frac{x^5}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} x-2+\frac{2x^3+2x^2+3x+2}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} x-2+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}-2x+2\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\arctan(x)\right]_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \\
&= 0-\frac{4}{\sqrt{3}}+2\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6} \\
&= -\frac{11\sqrt{3}}{6}+2\ln(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

**(b)** Die Substitution $u = x^2$ liefert $1 + x^2 + x^4 = u^2 + u + 1 = (u + \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})(u + \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})$. Es gilt $-\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$ und $-\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$. Die komplexen Nullstellen des Nennerpolynoms sind also $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}$, $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}$ und $-\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$. Wir fassen diese zu konjugiert komplexen Paaren zusammen und erhalten $1 + x^2 + x^4 = \Big((x - \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})(x - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})\Big)\Big((x - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}})(x - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}})\Big) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ als reelle Faktorisierung des Nennerpolynoms. Partialbruchzerlegung liefert den Ansatz

$$\frac{2}{1 + x^2 + x^4} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

und daraus das LGS

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

das die eindeutige Lösung $(A, B, C, D) = (-1, 1, 1, 1)$ hat. Also gilt

$$\frac{2}{1 + x^2 + x^4} = \frac{-x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}\,.$$

Wir integrieren:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{1 + x^2 + x^4}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int \frac{1 - x}{x^2 - x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\ln|x^2 - x + 1|\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\ln|x^2 + x + 1|\right]
\end{aligned}$$

**(c)** Es gilt $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{x^2}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$$

Einsetzen der Werte $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$ ergibt

$$\begin{aligned}
17\int \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{2}{3}x + -\frac{1}{3}}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}\,x &= 17\left[\frac{1}{3}\ln|x + 1| + \frac{1}{3}\ln|x^2 - x + 1|\right] \\
&= 17\left[\frac{1}{3}(\ln|x + 1| + \ln|x^2 - x + 1|)\right] \\
&= 17\left[\frac{1}{3}(\ln|(x + 1)(x^2 - x + 1)|)\right] \\
&= \frac{17}{3}\left[\,\ln|x^3 + 1|\right]
\end{aligned}$$

Schnellere Alternative ist die Substitution mit $x^3 = u$ (und $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 3x^2$):

$$\frac{17}{3}\int \frac{1}{1 + u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{17}{3}\left[\,\ln|x^3 + 1|\right]$$

**(d)** Wir beginnen wie in 3.4.7.1

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x}_{I} - \underbrace{\int \frac{2}{(x^2+2x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x}_{II}\right)$$

$$\begin{aligned}
I &\overset{\text{Lemma 3.4.8.2}}{=} \left[\frac{-1}{2(x^2+2x+4)^2}\right]\\
II &= 2\int \frac{1}{(x^2+2x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x\\
&\underset{u=\frac{x+1}{\sqrt{3}}}{\overset{\text{Lemma 3.4.9.2}}{=}} 2\frac{\sqrt{3}}{27}\int \frac{1}{(u^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,u\\
&\overset{\text{Lemma 3.4.9.2}}{=} 2\frac{\sqrt{3}}{27}\left(\frac{3}{4}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,u + \left[\frac{u}{4(u^2+1)^2}\right]\right)\\
&\overset{3.4.14}{=} 2\frac{\sqrt{3}}{27}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\arctan(u)+\frac{u}{u^2+1}\right]+\left[\frac{u}{4(u^2+1)^2}\right]\right)\\
&= 2\frac{\sqrt{3}}{27}\left(\frac{3}{8}\left[\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}(x+1)}{x^2+2x+4}\right]+\left[\frac{3\sqrt{3}(x+1)}{4(x^2+2x+4)^2}\right]\right)
\end{aligned}$$

Insgesamt ist das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x^2+2x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2(x^2+2x+4)^2}\right.\\
&\qquad - 2\frac{\sqrt{3}}{27}\left(\frac{3}{8}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}(x+1)}{x^2+2x+4}\right)\right.\\
&\qquad \left.\left. +\frac{3\sqrt{3}(x+1)}{4(x^2+2x+4)^2}\right)\right]\\
&= \left[-\frac{\sqrt{3}}{72}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{24}\frac{x+1}{x^2+2x+4}-\frac{1}{12}\frac{x+4}{(x^2+2x+4)^2}\right].
\end{aligned}$$

**Aufgabe H 81.** *Ober- und Untersummen*

Gegeben seien $f : [0,3] \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-2)^2+1$ sowie $I := \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**(a)** Skizzieren Sie das Schaubild von $f$.

**(b)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersummen von $f$ zu den Partitionen

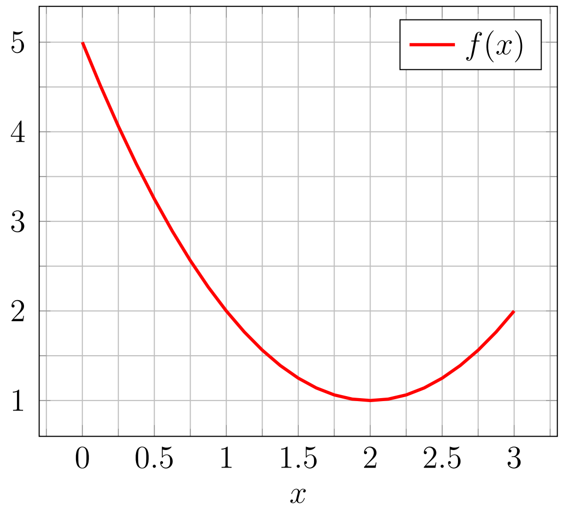
$$P := \{0,1,2,3\} \qquad \text{und} \qquad Q := \left\{0,\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3},3\right\}$$

jeweils eine obere und eine untere Schranke für $I$. Bestimmen Sie $I$.

**(c)** Finden Sie eine Partition $R = \{0,a,b,3\}$ so, dass $\underline{S}(f,R) > \underline{S}(f,Q)$ ist.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Skizze:




**(b)** Die Funktion $f$ ist auf dem Interval $[0,2]$ monoton fallend und auf dem Interval $[2,3]$ monoton steigend. Daher ist die Obersumme von $f$ zur Partition $P$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P) &= \sum_{k=1}^{3} S_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= f(0)\cdot(1-0) + f(1)\cdot(2-1) + f(3)\cdot(3-2) = 5+2+2 = 9.\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Monotonie erhält man die Untersumme

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P) &= \sum_{k=1}^{3} I_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= f(1)\cdot(1-0) + f(2)\cdot(2-1) + f(2)\cdot(3-2) = 2+1+1 = 4.\end{aligned}$$

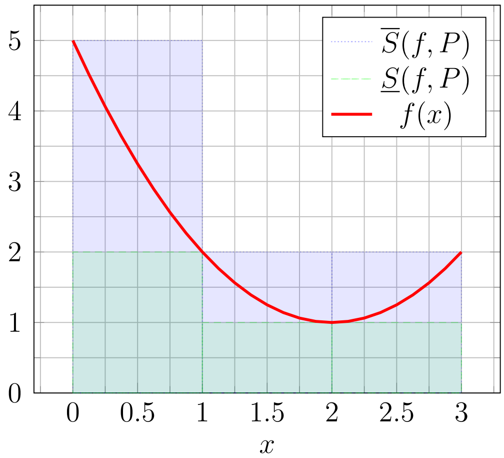
Für die Partition $Q$ haben wir

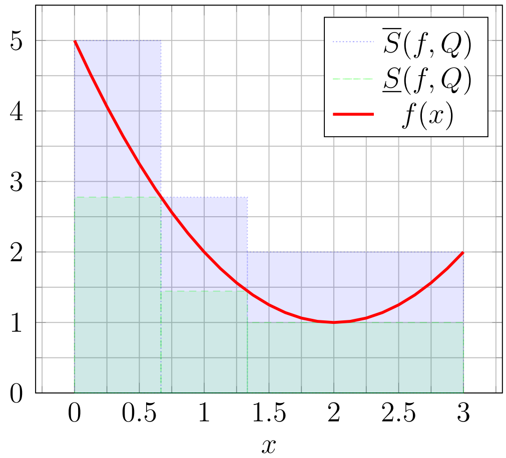
$$\begin{aligned}\overline{S}(f,Q) &= \sum_{k=1}^{3} S_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(0)\cdot\tfrac{2}{3} + f(\tfrac{2}{3})\cdot(\tfrac{4}{3}-\tfrac{2}{3}) + f(3)\cdot(3-\tfrac{4}{3}) \\ &= \tfrac{10}{3} + \tfrac{25}{9}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{10}{3} = \tfrac{230}{27} \approx 8.5185, \\ \underline{S}(f,Q) &= \sum_{k=1}^{3} I_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(\tfrac{2}{3})\cdot\tfrac{2}{3} + f(\tfrac{4}{3})\cdot(\tfrac{4}{3}-\tfrac{2}{3}) + f(2)\cdot(3-\tfrac{4}{3}) \\ &= \tfrac{25}{9}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{13}{9}\cdot\tfrac{2}{3} + 1\cdot\tfrac{5}{3} = \tfrac{121}{27} \approx 4.4815\end{aligned}$$

Der genaue Wert des Integrals $I$ ist

$$\int_0^3 (x-2)^2 + 1 \,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^3 = 6.$$

Skizzen der Ober- und Untersummen von $f$ zu den Partitionen $P$ und $Q$:




**(c)** Wir wählen die Partition $R = \{0, \frac{1}{2}, 1, 3\}$ und erhalten

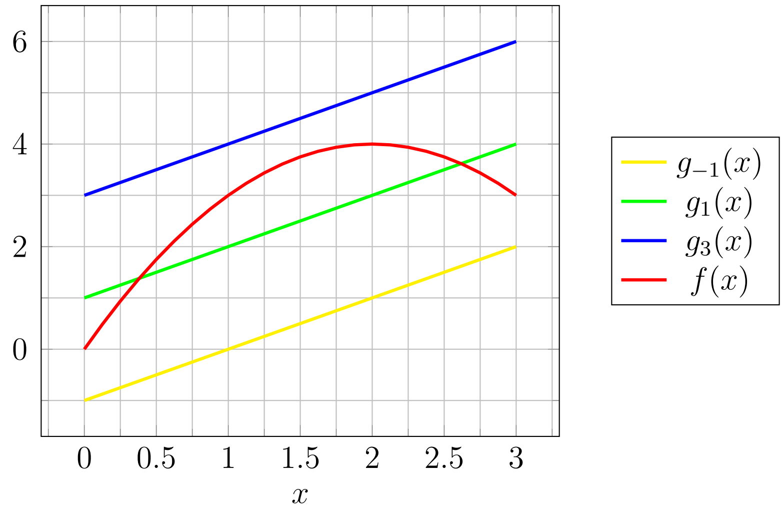
$$\begin{aligned}\underline{S}(f,R) &= f(\tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{2} + f(1) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}) + f(2) \cdot (3-1) \\ &= \tfrac{13}{8} + 1 + 2 = \tfrac{37}{8} = 4.625\end{aligned}$$

In diesem Fall gilt also $\underline{S}(f,R) > \underline{S}(f,Q)$.

**Aufgabe H 82.** *Integrale und Flächeninhalte*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4x - x^2$ und $g_\alpha\colon [0,3] \mapsto \mathbb{R}\colon x \mapsto x + \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

**(a)** Skizzieren Sie das Schaubild von $f$, $g_{-1}$, $g_1$ und $g_3$.




**Lösungshinweise hierzu:**

**(b)** Bestimmen Sie die Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ der Elemente $\alpha$, für welche

$$\{x \in [0,3] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} \neq \emptyset$$

ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir setzen die Funktionswerte gleich und erhalten:

$$\begin{aligned} & f(x) = g_\alpha(x) \\ \iff\ & 4x - x^2 = x + \alpha \\ \iff\ & 0 = x^2 - 3x + \alpha \\ \implies\ & x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha}}{2}\end{aligned}$$

Nun müssen wir entscheiden, wann (mindestens ein) solches $x$ existiert und im Intervall $[0,3]$ liegt.

- Für $\alpha > \frac{9}{4}$ ist die Diskriminante negativ, d.h. es existiert kein solches $x$.
- Für $\alpha < 0$ ist $x_1 > 3$ und $x_2 < 0$, d.h. nicht im gewünschten Intervall.
- Für $\alpha \in [0, \frac{9}{4}]$ existiert ein solches $x$ im Intervall $[0,3]$.

Damit ist $I = [0, \frac{9}{4}]$.

**(c)** Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in I$ die Menge $\{x \in [0,3] \mid f(x) = g_\alpha(x)\}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Wie im vorherigen Teil bereits gerechnet, gilt für $\alpha \in I = [0, \frac{9}{4}]$

$$\{x \in [0,3] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} = \left\{ \frac{3+\sqrt{9-4\alpha}}{2}; \frac{3-\sqrt{9-4\alpha}}{2} \right\}.$$

(Der Spezialfall $\alpha = \frac{9}{4}$, also $\frac{3+\sqrt{9-4\alpha}}{2} = \frac{3-\sqrt{9-4\alpha}}{2}$, ist mit dieser Schreibweise ebenfalls abgedeckt!)

**(d)** Für $\alpha \in I$ schließen die Graphen von $f$ und $g_\alpha$ die Fläche $F_\alpha$ ein.
Bestimmen Sie deren Inhalt.

**Lösungshinweise hierzu:** Mit dem bisher Errechneten müssen wir nun also für $\alpha \in I$ das folgende Integral lösen:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{3-\sqrt{9-4\alpha}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{9-4\alpha}}{2}} f(x) - g_\alpha(x) \,\mathrm{d}\, x &= \int_{\frac{3-\sqrt{9-4\alpha}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{9-4\alpha}}{2}} 4x - x^2 - (x+\alpha) \,\mathrm{d}\, x \\
&= \int_{\frac{3-\sqrt{9-4\alpha}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{9-4\alpha}}{2}} -x^2 + 3x - \alpha \,\mathrm{d}\, x \\
&= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \alpha x \right]_{\frac{3-\sqrt{9-4\alpha}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{9-4\alpha}}{2}} \\
&= \frac{1}{6}(9-4\alpha)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe H 83.** *Integrale*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

**(a)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\cosh(x)^2} \,\mathrm{d}\, x$

**(b)** $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2 + 4x + 26} \,\mathrm{d}\, x$

**(c)** $\displaystyle\int \sin(x)^4 \, \cos(2x) \,\mathrm{d}\, x$

**(d)** $\displaystyle\int \frac{8}{4 + x^4} \,\mathrm{d}\, x$

*Hinweis:* **(c)**: Siehe **H 65**.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir wenden die Transformation $t = \mathrm{e}^x$ an. Also ist $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \mathrm{e}^x$. Wir erhalten, mit $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\cosh(x)^2}\ \mathrm{d}x &= 4\int \frac{t^2}{t^2+2+t^{-2}}\ \mathrm{d}t = 4\int \frac{t^4}{t^4+2t^2+1}\ \mathrm{d}t \\ &= 4\int 1 - \frac{2t^2+1}{t^4+2t^2+1}\ \mathrm{d}t = 4\int 1 - \frac{2t^2+2}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= 4\int 1 - \frac{2}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}\ \mathrm{d}t = 4\left[t - \tfrac{3}{2}\arctan(t) + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}\right] \\ &= \left[4\mathrm{e}^x - 6\arctan(\mathrm{e}^x) + \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right]\end{aligned}$$

Für den vorletzten Schritt siehe Lemma 3.4.9 und Beispiel 3.4.14.

**(b)** Dieses Integral ist von der Form wie in Lemma 3.4.9 (mit Faktor $\frac{1}{2}$). Dabei ist $\beta = 2$ und $\gamma = 12$. Also setzen wir $\Delta = 12$ und $u = \frac{x+1}{\sqrt{12}} = \frac{x+1}{2\sqrt{3}}$. Einsetzen in die Formel von Lemma 3.4.9 ergibt

$$\int \frac{1}{2x^2+4x+26}\ \mathrm{d}\,x = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\arctan(u)\right] = \left[\tfrac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{x+1}{2\sqrt{3}}\right)\right].$$

**(c)** In **H 65** haben wir gezeigt, dass

$$\sin(x)^4\cos(2x) = \tfrac{1}{16}\left(7\cos(2x) - 4\cos(4x) + \cos(6x) - 4\right)$$

gilt. Ferner gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\int \cos(ax)\ \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{a}\sin(ax)\right].$$

Damit erhalten erhalten wir als Lösung

$$\begin{aligned}\int \sin(x)^4\ \cos(2x)\ \mathrm{d}\,x &= \tfrac{1}{16}\int 7\cos(2x) - 4\cos(4x) + \cos(6x) - 4\ \mathrm{d}\,x \\ &= \tfrac{1}{16}\left[\tfrac{7}{2}\sin(2x) - \sin(4x) + \tfrac{1}{6}\sin(6x) - 4x\right] \\ &= \left[\tfrac{7}{32}\sin(2x) - \tfrac{1}{16}\sin(4x) + \tfrac{1}{96}\sin(6x) - \tfrac{1}{4}x\right].\end{aligned}$$

**(d)** Zunächst betrachten wir das Polynom $p(x) = x^4 + 4$. Die (komplexen) Nullstellen von $p(x)$ sind $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$ und $-1-\mathrm{i}$. Damit zerfällt $p(x)$ in die komplexen Linearfaktoren

$$p(x) = (x-1-\mathrm{i})\cdot(x-1+\mathrm{i})\cdot(x+1-\mathrm{i})\cdot(x+1+\mathrm{i}).$$

Multipliziert man die Linearfaktoren zu den komplex konjugierten Nullstellen ($1\pm\mathrm{i}$ sowie $-1\pm\mathrm{i}$), so erhalten wir die reelle Faktorisierung

$$p(x) = (x^2-2x+2)\cdot(x^2+2x+2).$$

Als nächstes führen wir eine Partialbruchzerlegung aus:

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{(x^2-2x+2)\cdot(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Multiplikation mit $(x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 2)$ und Koeffizientenvergleich liefert $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{8}$ und $D = \frac{1}{4}$. Somit erhalten wir

$$\int \frac{8}{4 + x^4} \,\mathrm{d}x = \int \frac{-x+2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{x+2}{x^2+2x+2} \,\mathrm{d}x$$

Um Lemma 3.4.8 anwenden zu können, müssen wir die Terme zuerst in die entsprechende Form bringen:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{-x+2}{x^2-2x+2} + \frac{x+2}{x^2+2x+2} \,\mathrm{d}x \\
&= \int -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{x^2-2x+2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{x^2+2x+2} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\tfrac{1}{2}\ln(|x^2-2x+2|) + \arctan(x-1) + \tfrac{1}{2}\ln(|x^2+2x+2|) + \arctan(x+1)\right]
\end{aligned}$$

Wobei wir im letzten Schritt Lemma 3.4.8 und Lemma 3.4.9 verwendet haben.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 84.** *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

**(a)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1\,\mathrm{d}\,x$

**(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t$ in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Beachte: die Funktion $x\mathrm{e}^{-x}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, das Problem ist also die untere Grenze $-\infty$.

Die Funktion $x\mathrm{e}^{-x}$ divergiert für $x \to -\infty$ bestimmt gegen $-\infty$, insbesondere ist $-x\mathrm{e}^{-x} \geqq 1$ für $x \leqq -1$, somit ist $\int_{-\infty}^{-1} 1\,\mathrm{d}\,x$ eine divergente Minorante für $\int_{-\infty}^{-1} -x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$, somit existiert auch dieses Integral nicht, es folgt leicht, dass auch $\int_{-\infty}^{2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ nicht existiert.

Oder: Wir berechnen eine Stammfunktion von $x\mathrm{e}^{-x}$ mit Hilfe partieller Integration (die in H 85 nützlich sein wird):

$$\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right] - \int 1\cdot(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}\,x = \left[-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\right]$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \lim_{\alpha\to-\infty}\left[-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\right]_{\alpha}^{2} = -3\mathrm{e}^{-2} + \lim_{\alpha\to-\infty}(\alpha+1)\mathrm{e}^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, also auch nicht das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$.

**(b)** Der Integrand ist auf dem Intervall $(0,\infty)$ stetig, aber an der Stelle $0$ nicht definiert. Die Problemstellen sind also die beiden Grenzen $0$ und $+\infty$. Es gilt (Substitution $u = \ln(x+1)$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{x+1}$)

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{1}{x}\right]$$

$$\int -\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}\,\mathrm{d}\,x = \int -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{1}{u}\right] = \left[\frac{1}{\ln(x+1)}\right]$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}\,\mathrm{d}\,x$ ist somit $\left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right]$. Also gilt

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \underbrace{\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(\beta+1)} - \frac{1}{\beta}\right)}_{0} - \lim_{\alpha\to0+0}\left(\frac{1}{\ln(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

Den zweiten Grenzwert kann man mit zweifacher Anwendung der Regel von l'Hospital berechnen:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0+0}\left(\frac{1}{\ln(\alpha+1)}-\frac{1}{\alpha}\right) &= \lim_{\alpha\to 0+0}\frac{\alpha-\ln(\alpha+1)}{\alpha\ln(\alpha+1)} = \lim_{\alpha\to 0+0}\frac{1-\frac{1}{\alpha+1}}{\ln(\alpha+1)+\frac{\alpha}{\alpha+1}}\\
&= \lim_{\alpha\to 0+0}\frac{\alpha+1-1}{(\alpha+1)\ln(\alpha+1)+\alpha}\\
&= \lim_{\alpha\to 0+0}\frac{\alpha}{(\alpha+1)\ln(\alpha+1)+\alpha}\\
&= \lim_{\alpha\to 0+0}\frac{1}{\ln(\alpha+1)+\frac{\alpha+1}{\alpha+1}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt wurde mit $\alpha+1$ erweitert. Also ergibt sich insgesamt

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}.$$

**(c)** Der Integrand ist stetig auf $(2,\infty)$, das Problem ist also die obere Grenze $+\infty$. Eine Stammfunktion des vorderen Teils erhält man mit Hilfe der Substitution $u = x^2+x$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2x+1$:

$$\int \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u = [\sqrt{u}] = [\sqrt{x^2+x}]$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]_2^{\beta}\\
&= \lim_{\beta\to+\infty}(\sqrt{\beta^2+\beta}-\beta)+2-\sqrt{6}\\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{(\sqrt{\beta^2+\beta}-\beta)(\sqrt{\beta^2+\beta}+\beta)}{\sqrt{\beta^2+\beta}+\beta}+2-\sqrt{6}\\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta^2+\beta-\beta^2}{\sqrt{\beta^2+\beta}+\beta}+2-\sqrt{6}\\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\beta}+\beta}+2-\sqrt{6}\\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}+1}+2-\sqrt{6}\\
&= \frac{1}{2}+2-\sqrt{6} = \frac{5}{2}-\sqrt{6}
\end{aligned}$$

**(d)** Der Integrand ist stetig, Problem ist die obere Grenze $+\infty$. Die Stammfunktion berechnet man mit Hilfe zweifacher partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t &= \left[-\cos(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]-\int \alpha\cos(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t\\
&= \left[-\cos(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-\alpha\sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]-\int \alpha^2\sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Löst man nach dem gesuchten Integral auf, dann erhält man

$$\int \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{1+\alpha^2}\left[-\cos(t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - \alpha\sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]$$

Also ist

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\alpha^2}\left(-\cos(\beta)\mathrm{e}^{-\alpha\beta} - \alpha\sin(\beta)\mathrm{e}^{-\alpha\beta}+1\right)\right)$$

Ist $\alpha > 0$, dann ist $\lim_{\beta\to+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\beta} = 0$, also existiert das gesuchte Integral und es gilt

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Ist $\alpha = 0$, dann existiert das Integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\beta\to+\infty}(-\cos(\beta)+1)$ nicht. Ist $\alpha < 0$ dann gilt für $\beta = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$-\cos(\beta)\mathrm{e}^{-\alpha\beta} - \alpha\sin(\beta)\mathrm{e}^{-\alpha\beta} + 1 = -\mathrm{e}^{-\alpha 2\pi n} + 1$$

Dieser Term konvergiert für $n \to \infty$ gegen $-\infty$, also kann auch das Integral nicht konvergieren.

*Hinweis:* Das Integral, das hier berechnet wurde, ist die Laplace-Transformierte der Sinusfunktion.

**Aufgabe H 85.** *Konvergenz*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

**(a)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x-1}{x^3-4x^2+5x-2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\cos(x)|+|\sin(x)|}{|x|+1}\,\mathrm{d}\,x$

**(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es gilt $x^3-4x^2+5x-2 = (x-1)^2(x-2)$, das heißt, die Funktion $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x^3-4x^2+5x-2}$ ist im Intervall $[0,1)$ stetig und positiv. Wir können also das Grenzwertkriterium anwenden. Als Vergleichsfunktion wählen wir $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Dann ist

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1-0}\frac{x^2-x-1}{x-2} = 1 > 0,$$

also hat $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x-1}{x^3-4x^2+5x-2}\,\mathrm{d}\,x$ das gleiche Konvergenzverhalten wie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}\,x$, divergiert also.

**(b)** Wegen $|\cos(x)| \leqq 1$ ist $(\cos(x))^2 \leqq |\cos(x)|$, gleiches gilt für $\sin(x)$, also ist

$$\frac{|\cos(x)|+|\sin(x)|}{|x|+1} \geqq \frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{|x|+1} = \frac{1}{|x|+1}$$

Das Integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{|x|+1}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x$ existiert nicht, also ist $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x$ eine divergente Minorante für das Integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\cos(x)|+|\sin(x)|}{|x|+1}\,\mathrm{d}\,x$, das daher ebenfalls nicht existiert. Somit existiert auch $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\cos(x)|+|\sin(x)|}{|x|+1}\,\mathrm{d}\,x$ nicht.

**(c)** Die Problemstelle ist die obere Grenze $1$, an der der Integrand eine Polstelle hat. Es gilt $1 - x^3 = (1 + x + x^2)(1 - x)$, die Vermutung ist also, dass das Integral dasselbe Konvergenzverhalten hat wie das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \,\mathrm{d}\,x$ (das laut Vorlesung existiert). Wir wenden das Grenzwertkriterium an, es gilt:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0,$$

somit existiert das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \,\mathrm{d}\,x$.

**(d)** Das Problem ist hier die obere Grenze $+\infty$. Vermutung: das Integral hat dasselbe Konvergenzverhalten wie $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x \,\mathrm{d}\,x$. Dazu wenden wir das Grenzwertkriterium an:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{-x}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$$

Für die zweite Gleichung wurde die Regel von l'Hospital verwendet. Das Grenzwertkriterium besagt nun zwar nicht, dass beide Integrale dasselbe Konvergenzverhalten haben, aber aus der Konvergenz von $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x \,\mathrm{d}\,x$ folgt die von $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x) \,\mathrm{d}\,x$.

Wir untersuchen $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x \,\mathrm{d}\,x$. Wir haben bereits in H 84 (a) eine Stammfunktion berechnet, also

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x \,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty} [-(x+1)\mathrm{e}^{-x}]_0^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} (-(\beta+1)\mathrm{e}^{-\beta} + 1) \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} \left(-\frac{\beta+1}{\mathrm{e}^{\beta}}\right) + 1 = \lim_{\beta\to+\infty} \left(-\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta}}\right) + 1 = 1.\end{aligned}$$

Für das vorletzte Gleichheitszeichen wurde die Regel von l'Hospital verwendet. Somit existiert dieses Integral, also auch das Integral $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x) \,\mathrm{d}\,x$.

**Aufgabe H 86.** *Integralkriterium*

Untersuchen Sie das Integral $\int_2^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}\,x$ und die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ für

**(a)** $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$ **(b)** $f(x) = \frac{2\pi x\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)}{x^2}$

auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Werte.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Funktion $f$ ist für $x \geqq 2$ positiv und wegen

$$f'(x) = \frac{1 - 3x^2}{(x^3 - x)^2} < 0$$

(streng) monoton fallend. Nach Satz 3.8.1 haben das angegebene uneigentliche Integral und die zugehörige Reihe das gleiche Konvergenzverhalten.

Um die Partialbruchzerlegung von $f(x)$ zu bestimmen, wählt man den Ansatz

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1} \\
&= \frac{Ax(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-C)x - B}{x(x+1)(x-1)},
\end{aligned}$$

vgl. 3.4.5. Koeffizientenvergleich liefert

$$A+B+C=0, \quad A-C=0, \quad -B=1, \qquad \text{also} \qquad B=-1, \quad A=C=\frac{1}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta} \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_2^{\beta} \\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)+\ln(x+1)-2\ln x\right)\right]_2^{\beta} \\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right)\right]_2^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]_2^{\beta} \\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)}_{\to\ln 1=0} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral ist konvergent. Nach Satz 3.8.1 muss auch die Reihe konvergieren, allerdings nicht notwendig gegen denselben Wert. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung von $f(n)$ ergibt sich („Teleskopreihe“, vgl. Beweis zu Beispiel 1.8.2):

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=3}^{m+1}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{m}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=3}^{m}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*Bemerkung:* Die Konvergenz der Reihe kann auch mit dem Majoranten–Kriterium nachgewiesen werden:

$$\frac{1}{n(n+1)(n-1)} \leqq \frac{1}{n\cdot n\cdot 1} = \frac{1}{n^2}, \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{konvergiert, vgl. Beispiel 1.8.2.}$$

**(b)** Die Funktion $f$ ist weder positiv noch monoton fallend, denn es ist

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{2\pi n\cdot 1-0}{n^2} = \frac{2\pi}{n} > 0 \qquad \text{und} \\ f(n+\tfrac{1}{2}) &= \frac{(2n+1)\pi\cdot(-1)-0}{(n+\frac{1}{2})^2} = -\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}} < 0, \qquad \text{für } n\in\mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Satz 3.8.1 ist also nicht anwendbar, weshalb das uneigentliche Integral und die Reihe ein unterschiedliches Konvergenzverhalten besitzen können. Für das Integral gilt

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_2^\beta \frac{2\pi x\cos(2\pi x)-\sin(2\pi x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\int_2^\beta \frac{2\pi\cos(2\pi x)}{x}\,\mathrm{d}\,x - \int_2^\beta \frac{\sin(2\pi x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x\right]. \end{aligned}$$

Das rechte Integral kann durch partielle Integration gemäß 3.2.2 umgeformt werden. Mit $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ und $g(x)=\sin(2\pi x)$ ergibt sich

$$\int_2^\beta \frac{\sin(2\pi x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{\sin(2\pi x)}{x}\right]_2^\beta + \int_2^\beta \frac{2\pi\cos(2\pi x)}{x}\,\mathrm{d}\,x,$$

so dass insgesamt

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\int_2^\beta \frac{2\pi\cos(2\pi x)}{x}\,\mathrm{d}\,x + \left[\frac{\sin(2\pi x)}{x}\right]_2^\beta - \int_2^\beta \frac{2\pi\cos(2\pi x)}{x}\,\mathrm{d}\,x\right] \\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{\sin(2\pi x)}{x}\right]_2^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\sin(2\pi\beta)}{\beta}-\frac{\sin(4\pi)}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

gilt, d. h. das uneigentliche Integral konvergiert und hat den Wert $0$. Dagegen ist

$$\sum_{n=2}^\infty f(n) = \sum_{n=2}^\infty \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}$$

als Vielfaches der harmonischen Reihe divergent, vgl. Beispiel 1.8.5.

**Aufgabe H 87.** *Modell: Parabolische Quadrik als Funktionsgraph*
Für $(r,s)\in\mathbb{R}^2$ betrachten wir $f_{r,s}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon (x_1,x_2)\mapsto rx_1^2+sx_2^2$.
Für $t\in\mathbb{R}$ sei $N_t(r,s)$ die Niveaumenge von $f_{r,s}$ zum Niveau $t$.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $f_{-1,1}$ dar. Dargestellt ist der Bereich $(x_1,x_2)\in[-1,1]\times[-1,1]$. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

**(a)** Zeichnen Sie für $(r,s)\in\{(1,0),(-4,1),(1,4)\}$ jeweils die Niveaumengen $N_t(r,s)$ für $t\in\{-4,0,4\}$.

**(b)** Bestimmen Sie die Gestalt des Graphen $\Gamma(f_{r,s})$ in Abhängigkeit von $(r,s)\in\mathbb{R}^2$.

**(c)** Bestimmen Sie $(r,s)\in\mathbb{R}^2$ so, dass $f_{r,s}$ folgenden achsenparallelen Schnitt besitzt:
$\big\{(1,x_2,f_{r,s}(1,x_2))\;\big|\; x_2\in\mathbb{R}\big\} = \big\{(1,u-1,u^2-2u+3)\;\big|\; u\in\mathbb{R}\big\}$.

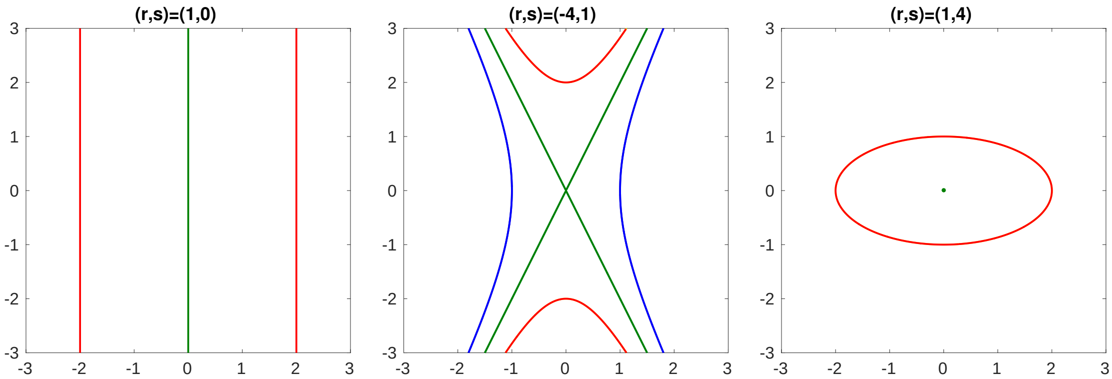
**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Für $(r,s) = (1,0)$ ist $f_{1,0}(x_1,x_2) = x_1^2$. Die Gleichung $x_1^2 = t$ besitzt für $t < 0$ keine reelle Lösung, d. h. $N_t(0,1)$ ist leer. Für $t = 0$ existiert nur die Lösung $x_1 = 0$, d. h. $N_0(0,1)$ ist eine Gerade. Im Fall $t > 0$ gibt es zwei Lösungen $x_1 = \pm\sqrt{t}$, d. h. $N_t(0,1)$ ist ein Paar paralleler Geraden.

Für $(r,s) = (-4,1)$ ist $f_{-4,1}(x_1,x_2) = -4x_1^2 + x_2^2$. Die Gleichung $-4x_1^2 + x_2^2 = t$ besitzt für $t = 0$ die Lösungen $x_2 = \pm 2x_1$, d. h. $N_0(-4,1)$ ist ein Paar sich schneidender Geraden. Für $t \neq 0$ beschreibt $-4x_1^2 + x_2^2 = t$ eine Hyperbel mit Asymptoten $x_2 = \pm 2x_1$, wobei die beiden Hyperbeläste im Fall $t > 0$ im oberen und unteren Feld und im Fall $t < 0$ im linken und rechten Feld zwischen den Asymptoten liegen.

Für $(r,s) = (1,4)$ ist $f_{1,4}(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$. Die Gleichung $x_1^2 + 4x_2^2 = t$ besitzt für $t < 0$ keine reelle Lösung, d. h. $N_t(1,4)$ ist leer. Für $t = 0$ existiert nur die Lösung $(x_1,x_2) = (0,0)$, d. h. $N_0(1,4)$ enthält nur den Nullpunkt. Im Fall $t > 0$ beschreibt $x_1^2 + 4x_2^2 = t$ eine Ellipse mit Halbachsen $a = \sqrt{t}$ und $b = \sqrt{t}/2$.

Die Abbildung zeigt jeweils $N_{-4}(r,s)$ in blau, $N_0(r,s)$ in grün und $N_4(r,s)$ in rot.




**(b)** Für $(r,s) \neq (0,0)$ kann der Graph $\Gamma(f_{r,s}) \subseteqq \mathbb{R}^3$ von $f_{r,s}$ als Quadrik mit der Gleichung

$$x_3 = rx_1^2 + sx_2^2 \qquad \text{bzw.} \qquad rx_1^2 + sx_2^2 - x_3 = 0$$

aufgefasst werden. Anhand der Vorzeichenverteilung erkennt man, dass $\Gamma(f_{r,s})$ ein ...

- *elliptisches Paraboloid* ist, wenn $r$ und $s$ dasselbe Vorzeichen haben,
- *hyperbolisches Paraboloid* ist, wenn $r$ und $s$ verschiedene Vorzeichen haben,
- *parabolischer Zylinder* ist, wenn genau einer der Parameter $r, s$ Null ist,

vgl. „Lineare Algebra und Geometrie“, Klassifikation 6.3.7 und 6.3.8.

Für $r = s = 0$ hat $\Gamma(f_{r,s})$ die Gestalt einer *Ebene*.
(Dieser Spezialfall wird in der linearen Algebra nicht als Quadrik klassifiziert.)

**(c)** Einsetzen von $x_2 = u - 1$ liefert die Bedingung

$$\left\{(1, u-1, f_{r,s}(1,u-1)) \,\middle|\, u \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(1, u-1, u^2 - 2u + 3) \,\middle|\, u \in \mathbb{R}\right\},$$

d. h. es muss $f_{r,s}(1,u-1) = r + s(u-1)^2 = u^2 - 2u + 3$ für alle $u \in \mathbb{R}$ gelten. Aus $r + su^2 - 2su + s = u^2 - 2u + 3$ folgt durch Koeffizientenvergleich $s = 1$ und $r = 2$.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 88.** *Stetigkeit*

Lässt sich die Funktion $f$ im Ursprung stetig fortsetzen?

**(a)** $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y)^2}{x^2+y^2}$

**(b)** $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{x^4+y^4}{x^2+2y^2}$

*Hinweis:* Ist $f(x,y) \leqq x^2+y^2$ ? Falls für $\varepsilon > 0$ sich $|(x,y)-(0,0)| < \sqrt{\varepsilon}$ ergibt, ist dann $|f(x,y)-0| < \varepsilon$ ?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Folgen $\left(\frac{1}{n},0\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(0,\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $(0,0)$. Aus dem bekannten Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (siehe 1.12.5) ergeben sich die Funktionsgrenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)+0}{\frac{1}{n^2}+0} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0-\sin\left(\frac{1}{n}\right)^2}{0+\frac{1}{n^2}} = -1\,.$$

Diese Grenzwerte sind verschieden. Also ist die Funktion im Ursprung nicht stetig ergänzbar.

**(b)** Für beliebige reelle Zahlen $x,y$ gilt $x^2+2y^2 \geqq x^2$ und daher $\frac{x^2}{x^2+2y^2} \leqq 1$. Im ganzen Definitionsbereich gilt deswegen

$$\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+2y^2}\right| \leqq x^2\frac{x^2}{x^2+2y^2} + y^2\frac{y^2}{x^2+2y^2} \leqq x^2+y^2.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $|(x,y)-(0,0)| < \sqrt{\varepsilon}$ ist

$$|f(x,y)-0| \leqq x^2+y^2 \leqq \varepsilon.$$

Also lässt sich die Funktion durch den Funktionswert $0$ stetig fortsetzen.

**Aufgabe H 89.** *Ableitungen*

Bestimmen Sie jeweils den Gradienten $\nabla f(P)$, die Hessematrix $\mathrm{H}f(P)$ und die Richtungsableitung $\partial_v f(P)$.

**(a)** $f(x,y,z) = x^3 + \mathrm{e}^{-z^3-y^3}$, $\quad P = (1,0,-1)$, $\quad v = \frac{1}{3}(1,-2,2)$

**(b)** $f(x,y,z) = \exp(\ln((z+y)^2+1)+x-1)$, $\quad P = (1,1,1)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -3y^2\mathrm{e}^{-z^3-y^3} \\ -3z^2\mathrm{e}^{-z^3-y^3} \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3\,\mathrm{e} \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3\,\mathrm{e} \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - 2\,\mathrm{e}.$$

Als Hessematrix ergibt sich

$$\mathrm{H}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & (9y^4-6y)\,\mathrm{e}^{-z^3-y^3} & 9y^2z^2\mathrm{e}^{-z^3-y^3} \\ 0 & 9y^2z^2\mathrm{e}^{-z^3-y^3} & (9z^4-6z)\,\mathrm{e}^{-z^3-y^3} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathrm{H}f(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15\,\mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

**(b)** Wir vereinfachen die Funktion. Es ist $\exp(\ln((z+y)^2+1)+x-1) = \left((z+y)^2+1\right)\mathrm{e}^{x-1}$. Damit gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x-1}\begin{pmatrix} (z+y)^2+1 \\ 2\,(z+y) \\ 2\,(z+y) \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Als Hessematrix ergibt sich

$$\mathrm{H}f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x-1}\begin{pmatrix} (z+y)^2+1 & 2\,(z+y) & 2\,(z+y) \\ 2\,(z+y) & 2 & 2 \\ 2\,(z+y) & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathrm{H}f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H 90.** *Lokale Extremstellen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto ((x-2)^2+(y-2)^2-1)(y-x)(y+x-4)$.

**(a)** Bestimmen Sie die Niveaumenge von $f$ zum Niveau 0.

**(b)** Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

$$M_1 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 1\right\}, \quad M_2 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > x\right\},$$
$$M_3 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqq x\right\}, \quad M_4 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq 4-x\right\},$$
$$M_5 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < 4-x\right\}.$$

Skizzieren Sie die Mengen

$$N_1 := M_1 \cap M_2 \cap M_4, \quad N_2 := M_1 \cap M_2 \cap M_5,$$
$$N_3 := M_1 \cap M_3 \cap M_4, \quad N_4 := M_1 \cap M_3 \cap M_5.$$

Welche dieser Mengen $M_i$ und $N_j$ sind kompakt?

**(c)** Welches Vorzeichen hat $f$ auf $N_i^\circ$ für $i \in \{1,2,3,4\}$?

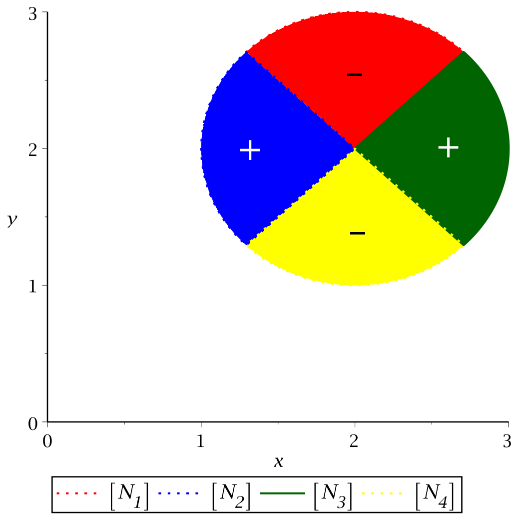
**(d)** Hat die eingeschränkte Funktion $f|_{N_3} \colon N_3 \to \mathbb{R}$ ein Maximum? Wird dieses Maximum auf $\partial N_3$ oder auf $N_3^\circ$ angenommen?
Hat die eingeschränkte Funktion $f|_{N_3} \colon N_3 \to \mathbb{R}$ ein Minimum? Wird dieses Minimum auf $\partial N_3$ oder auf $N_3^\circ$ angenommen?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Nullstellenmenge ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = 0\right\}$
$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y \vee ((x-2)^2 + (y-2)^2 = 1) \vee (x+y=4)\right\}$.

**(b)** Die Menge $M_1$ ist die Kreisscheibe (einschließlich Rand) vom Radius $1$ um $(2,2)$, die Mengen $M_2$, $M_3$, $M_4$ und $M_5$ sind Halbebenen (teils mit, teils ohne Rand), die durch Geraden durch den Mittelpunkt der Kreisscheibe abgetrennt werden.

Die fraglichen Schnittmengen ergeben sich damit als die farbig markierten Kreissegmente in der folgenden Skizze:




Die Mengen $M_1$ und $N_3$ sind kompakt. Die Mengen $M_2, M_3, M_4, M_5$ sind unbeschränkt und daher nicht kompakt, die Mengen $N_1, N_2$ und $N_4$ sind nicht abgeschlossen.

**(c)** Siehe Skizze aus Teil **(b)**.

**(d)** Da $N_3$ kompakt ist, gilt nach dem Satz vom Minimum und Maximum 4.2.18, dass die eingeschränkte Funktion $f|_{N_3}$ ein Maximum und ein Minimum hat. Da $\partial N_3$ zur Nullstellenmenge von $f$ und damit auch zu der von $f|_{N_3}$ gehört und $f$ auf $N_3$ positives Vorzeichen hat, wird das Minimum auf dem Rand $\partial N_3$ angenommen und das Maximum im Innern $N_3^\circ$.

**Aufgabe H 91.** *Taylorpolynome*

**(a)** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(xy)$.
Bestimmen Sie $T_1(f,(x,y),(0,0))$ und $T_2(f,(x,y),(0,0))$.
Skizzieren Sie die Graphen der durch $f(t,t)$, $T_1(f,(t,t),(0,0))$ und $T_2(f,(t,t),(0,0))$ auf $t \in [-2,2]$ definierten Funktionen in ein Koordinatensystem.

**(b)** Sei $D := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y\right\}$. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{x-y}$.
Bestimmen Sie $T_1(f,(x,y),(-1,1))$ und $T_2(f,(x,y),(-1,1))$.
Skizzieren Sie die Graphen der durch $f(-1,t)$, $T_1(f,(-1,t),(-1,1))$ und $T_2(f,(-1,t),(-1,1))$ auf $t \in [0,2]$ definierten Funktionen in ein Koordinatensystem.

**Lösungshinweise hierzu:**

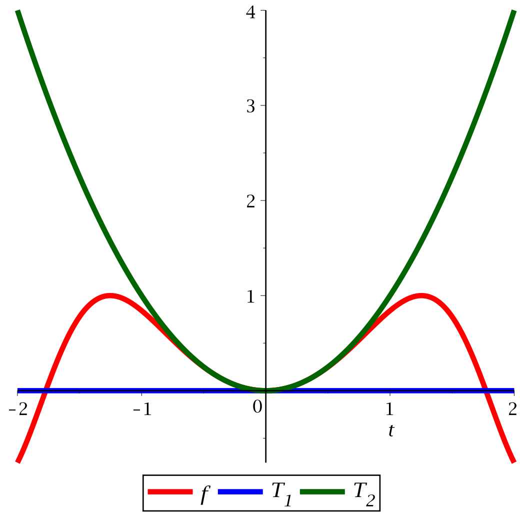
**(a)** Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ x\cos(xy) \end{pmatrix}, \\
Hf(x,y) &= \begin{pmatrix} -\sin(xy)y^2 & -\sin(xy)xy + \cos(xy) \\ -\sin(xy)xy + \cos(xy) & -\sin(xy)x^2 \end{pmatrix} \\
\operatorname{grad} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
T_1(f,(x,y),(0,0)) &= 0 + (0,0)^T \bullet (x,y)^\intercal = 0 \\
T_2(f,(x,y),(0,0)) &= 0 + (0,0)^T \bullet (x,y)^\intercal + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x,y)^\intercal = xy.
\end{aligned}$$

Die Graphen der durch $f(t,t)$, $T_1(f,(t,t),(0,0))$ und $T_2(f,(t,t),(0,0))$ auf $t \in [-2,2]$ definierten Funktionen sind in der folgenden Abbildung dargestellt.




**(b)** Es gilt

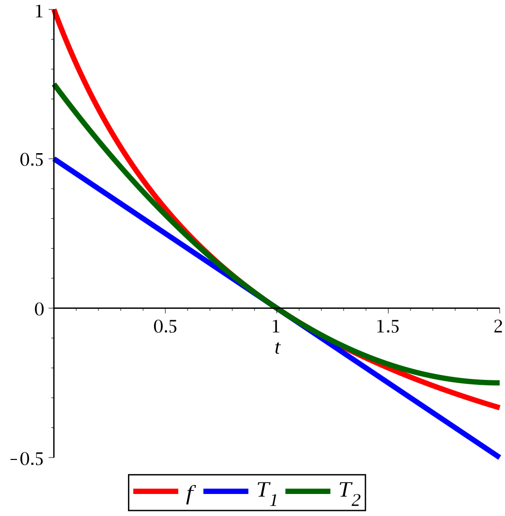
$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}\begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix} \quad Hf(x,y) = \frac{1}{(x-y)^3}\begin{pmatrix} 4y & -2(x+y) \\ -2(x+y) & 4x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(-1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
T_1(f,(x,y),(-1,1)) &= 0 + (-1/2,-1/2)^\intercal \bullet (x+1,y-1)^\intercal = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\
T_2(f,(x,y),(-1,1)) &= 0 + (-1/2,-1/2)^\intercal \bullet (x+1,y-1)^\intercal \\
&\quad + \frac{1}{2}(x+1,y-1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}(x+1,y-1)^\intercal \\
&= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2.
\end{aligned}$$

**(c)** Die Graphen der durch $f(-1,t)$, $T_1(f,(-1,t),(-1,1))$ und $T_2(f,(-1,t),(-1,1))$ auf $t \in [0,2]$ definierten Funktionen sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



# Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 92.** *Schmiegquadrik und Minimalstelle*

Sei
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^y + 3\mathrm{e}^y + x^3 - 3x^2 + 3x.$$

**(a)** Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$ und $\mathrm{H}f(x,y)$.

**(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$ und deren Typ.

**(c)** Bestimmen Sie die Tangentialebene und die Schmiegquadrik an den Graphen von $f$ im Punkt $(2,0)$.

**(d)** Ist der Punkt $(2,0)$ eine globale Minimalstelle von $f$?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es gilt
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -3\mathrm{e}^y + 3x^2 - 6x + 3 \\ 3\mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^y + 3\mathrm{e}^y \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & -3\mathrm{e}^y \\ -3\mathrm{e}^y & 9\mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^y + 3\mathrm{e}^y \end{pmatrix}.$$

**(b)** Für die kritischen Stellen berechnen wir
$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^y + x^2 - 2x + 1 \\ \mathrm{e}^{3y} - x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y \\ \mathrm{e}^{2y} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4y} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y \\ 1 + \mathrm{e}^{2y} \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir machen die Probe und setzen $(x,y) = (2,0)$ in den Gradienten ein:
$$\nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} -3 + 12 - 12 + 3 \\ 3 - 6 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt also nur eine kritische Stelle $(x,y) = (2,0)$. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt lautet
$$\mathrm{H}f(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Eigenwerte:
$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{H}f(2,0)}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{Sp}(\mathrm{H}f(2,0)) + \det(\mathrm{H}f(2,0)) &= \lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 3. \end{aligned}$$

Beide Eigenwerte sind positiv, damit ist die Hesse-Matrix an der Stelle $(2,0)$ positiv definit und es handelt sich bei der kritischen Stelle um ein lokales Minimum.

Alternativ mit 4.5.8: $d((2,0)) = 27 > 0 \wedge f_{xx}((2,0)) = 6 > 0$. Es handelt sich also um ein lokales Minimum.

**(c)** Die Tangentialebene an den Graphen von $f$ im Punkt $(2,0)$ ist gegeben durch:
$$z = T_1(f,(x,y),(2,0)) = f(2,0) + (x-2, y-0)^{\mathsf{T}} \bullet \nabla f(2,0) = 0.$$

Die Schmiegquadrik an den Graphen von $f$ im Punkt $(2,0)$ lautet

$$\begin{aligned} z = T_2(f,(x,y),(2,0)) &= T_1(f,(x,y),(2,0)) + \frac{1}{2}(x-2,y-0)\,\mathrm{H}f(2,0)\,(x-2,y-0)^\intercal \\ &= 0 + \frac{1}{2}(x-2,y)\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}(x-2,y)^\intercal \\ &= 3((x-2)^2-(x-2)y+y^2). \end{aligned}$$

**(d)** Der Punkt $(2,0)$ ist keine globale Minimalstelle von $f$, da z.B.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty,$$

oder $f(-10,0) = -1296 < f(2,0)$.

**Aufgabe H 93.** *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2+2y^2-2x)^2$$

**(a)** Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N$ und die Vorzeichenverteilung von $f$.

**(b)** Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

**(c)** Bestimmen Sie $\det(\mathrm{H}f(x,y)) - 96f(x,y)$. Für welche $P \in N$ ist $\det(\mathrm{H}f(P)) = 0$?

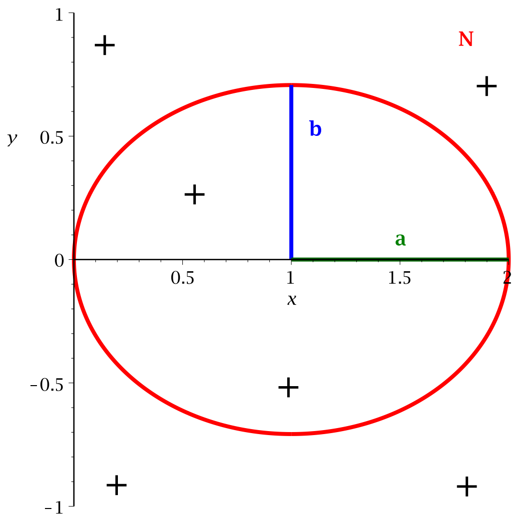
**(d)** Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von $f$ und geben Sie deren Typ an.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Nullstellenmenge $N$ von $f$ ist gegeben durch

$$N = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+2y^2-2x=0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2+2y^2=1\right\}.$$

Diese Menge beschreibt eine Ellipse mit Mittelpunkt $(1,0)$ und den Halbachsen $a=1$ und $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Funktion $f$ ist offensichtlich überall nicht negativ, damit ergibt sich die, in die Skizze eingetragene, Vorzeichenverteilung. In der folgenden Abbildung ist die Nullstellenmenge dargestellt.



**(b)** Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x^2+2y^2-2x)(2x-2) \\ 8(x^2+2y^2-2x)y \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(2x-2)^2+4(x^2+2y^2-2x) & 8(2x-2)y \\ 8(2x-2)y & 8(x^2+2y^2-2x)+32y^2 \end{pmatrix}.$$

**(c)** Die Determinante der Hesse-Matrix lautet:

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{H}f(x,y)) &= 16(x^2+2y^2-2x)(2x-2)^2+32(x^2+2y^2-2x)^2 \\ &\quad + 64(2x-2)^2y^2+128(x^2+2y^2-2x)y^2-64(2x-2)^2y^2 \\ &= 96(x^2+2y^2-2x)^2+64(x^2+2y^2-2x).\end{aligned}$$

Damit folgt
$$\det(\mathrm{H}f(x,y)) = 96f(x,y)+64(x^2+2y^2-2x).$$

Es gilt $f(P) = 0$ und $\det(\mathrm{H}f(P)) = 96f(P) - 0 = 0$ für $P \in N$. Daher ist $\det(\mathrm{H}f(P)) = 0$ für alle $P \in N$.

**(d)** Wir betrachten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 0$$

und unterscheiden die folgenden Fälle:

$$x^2+2y^2-2x = 0, \text{ also } (x,y) \in N \tag{1}$$
$$x^2+2y^2-2x \neq 0, \quad \text{dann müssen } 2x-2=0 \text{ und } y=0 \text{ gelten, also } (x,y)=(1,0). \tag{2}$$

Die in $(1)$ gefundenen Punkte bilden die Nullstellenmenge $N$, also die Ellipse. Der in $(2)$ gefundene Punkt ist der Mittelpunkt $(1,0)$ der Ellipse.

Da $f(x,y) \geqq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(P) = 0$ für $P \in N$ sind die Punkte in der Nullstellenmenge globale Minimalstellen.

Wir müssen also nur noch den Mittelpunkt betrachen. Die Hesse-Matrix im Punkt $(1,0)$ lautet
$$\mathrm{H}f(1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sie ist offensichtlich negativ definit und damit liegt ein lokales Maximum an der Stelle $(1,0)$ vor. Es handelt sich nicht um ein globales Maximum, da z.B.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty.$$

**Aufgabe H 94.** *Minimierung mit Nebenbedingung*

Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ Parameter mit $a^2+b^2+c^2=4$.
Sei $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$.

**(a)** Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ hat ein Minimum auf der Ebene $E$. Bestimmen Sie dieses mit der Methode von Lagrange.

**(b)** Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von $E$. Bestimmen Sie damit den Abstand des Ursprungs von der Ebene $E$.

**(c)** Bestimmen Sie den Punkt auf $E$ mit minimalem Abstand vom Ursprung unter Verwendung von **(a)**. Bestimmen Sie hiermit abermals den Abstand des Ursprungs von der Ebene $E$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Nebenbedingung $(x, y, z) \in E$ wird durch die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ : \ (x, y, z) \mapsto ax + by + cz - d$$

beschrieben. Die Gradienten von $f$ und $g$ lauten

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} g(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Lagrange-Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x + \lambda a &= 0 \\ 2y + \lambda b &= 0 \\ 2z + \lambda c &= 0 \\ ax + by + cz &= d \end{aligned}$$

Aus den ersten drei Gleichungen erhalten wir $x = -\frac{1}{2}\lambda a$, $y = -\frac{1}{2}\lambda b$ und $z = -\frac{1}{2}\lambda c$. Eingesetzt in die Ebenengleichung ergibt

$$-\lambda(a^2 + b^2 + c^2) = 2d$$

Mit der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ ergibt dies $\lambda = -\frac{1}{2}d$. Damit erhalten wir mit den ersten drei Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{4}da \qquad y = \tfrac{1}{4}db \qquad z = \tfrac{1}{4}dc. \tag{3}$$

In $f$ eingesetzt liefert dies (wieder mit $a^2 + b^2 + c^2 = 4$)

$$f(x, y, z) = \frac{d^2}{16}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{d^2}{4}.$$

**(b)** Die Ebene $E$ ist bereits in Normalenform, mit der Normalen $n = (a, b, c)^\intercal$, angegeben. Um die Hessesche Normalform der Ebene $E$ zu erhalten müssen wir die Normale noch normieren, d.h.

$$\|n\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2, \tag{4}$$

wobei wir wieder $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ ausgenutzt haben. Also lautet die Hessesche Normalform von $E$

$$\tfrac{a}{2}x + \tfrac{b}{2}y + \tfrac{c}{2}z = \tfrac{d}{2}.$$

Den Abstand vom Ursprung ist $\frac{d}{2}$ wie man nun einfach ablesen kann.

**(c)** Da die Wurzelfunktion streng monoton wächst, kann statt des Abstands auch das Quadrat des Abstands minimiert werden. Genau das wird von der Funktion $f$ beschrieben, damit haben wir den Punkt auf $E$ mit minimalen Abstand vom Ursprung bereits in **(a)** bestimmt – siehe (3). Der minimale Abstand ist also die Wurzel des minimalen Werts von $f$ aus **(a)** und demnach $\frac{d}{2}$.

**Aufgabe H 95.** *Abstand zweier Mengen*

Die Gerade $G$ und die Ellipse $E$ sind gegeben durch

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + 3y = 12 \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4u^2 + 9v^2 = 36 \right\} .$$

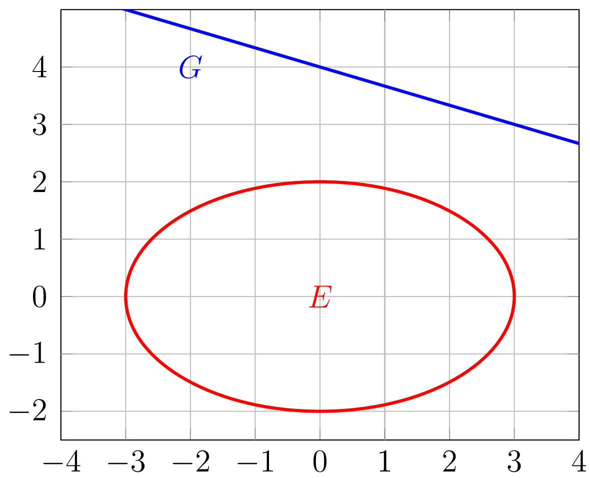
**(a)** Zeichnen Sie $G$ und $E$ in ein Koordinatensystem.

**(b)** Erstellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange für die Bestimmung der Extrema des Quadrats des Abstands $(x-u)^2 + (y-v)^2$ unter den beiden Nebenbedingungen $(x, y) \in G$ und $(u, v) \in E$.

**(c)** Es gibt ein Punktepaar $((x, y), (u, v)) \in G \times E$ mit minimalem Abstand voneinander. Bestimmen Sie dieses Paar mittels **(b)**. Zeichnen Sie dieses Punktepaar in die Zeichnung aus **(a)** ein.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Skizze:




**(b)** Für einen Punkt $(x, y) \in G$ und $(u, v) \in E$ ist

$$f(x, y, u, v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$$

zu minimieren, wobei die Nebenbedingungen

$$x + 3y - 12 = 0\,, \quad 4u^2 + 9v^2 - 36 = 0$$

erfüllt sein müssen. Es ergeben sich somit die Lagrange-Bedingungen

$$\begin{aligned} 2(x-u) + \lambda &= 0 && (5)\\ 2(y-v) + 3\lambda &= 0 && (6)\\ -2(x-u) + 8\mu u &= 0 && (7)\\ -2(y-v) + 18\mu v &= 0 && (8)\\ x + 3y - 12 &= 0 && (9)\\ 4u^2 + 9v^2 - 36 &= 0 && (10) \end{aligned}$$

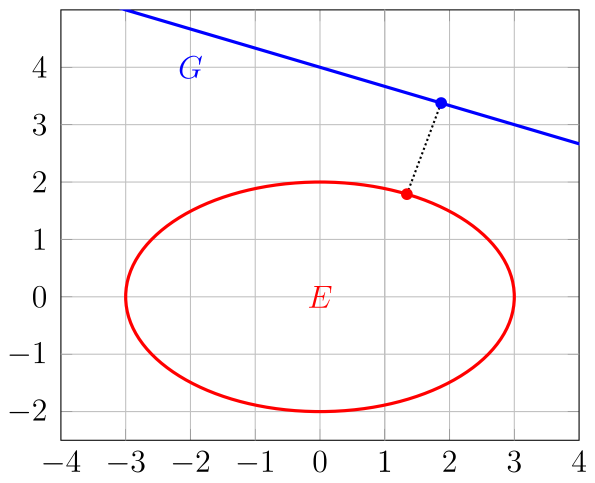
**(c)** Da die Gerade die Ellipse nicht schneidet (das sieht man aus der Skizze, oder weil Einsetzen der Geradengleichung in die Ellipsengleichung auf keine reelle Lösung führt) ist $x \neq u$ oder $y \neq v$ und damit müssen $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ sein.

Aus den Gleichungen (5) & (7) folgt $\lambda = -8\mu u$ und aus (6) & (8) $3\lambda = -18\mu v$. Daraus ergibt sich $3\mu v = 4\mu u$ bzw. $v = \frac{4}{3}u$.

Eingesetzt in die Ellipsengleichung $(10)$ folgt daraus $u = \pm 3/\sqrt{5}$ und $v = \pm 4/\sqrt{5}$, wobei das globale Minimum an der Stelle im ersten Quadranten angenommen wird (siehe Skizze). Somit betrachten wir $u = 3/\sqrt{5}$ und $v = 4/\sqrt{5}$.

Auflösen von Gleichung $(5)$ nach $\lambda$ und Einsetzen in $(6)$ ergibt $y - v = 3x - 3u$. Auflösen nach $x$ bzw. $y$ und Einsetzen in die Geradengleichung $(9)$ ergibt $x = \frac{6}{5} + \frac{3}{10}\sqrt{5}$ und $y = \frac{18}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10}$ mit $\lambda = -\frac{12}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Skizze:



## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 96.** *Jacobi–Matrizen*

Die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2y+z} - 1 \\ \arctan(xz) - y - z \\ x - 2\cos(2+yz) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 3\ln(5+v^2w^2) \\ uw\sqrt{3+v^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{J}f(x,y,z)$, $\mathrm{J}g(u,v,w)$, $\mathrm{J}(g\circ f)(0,-1,2)$ und $\mathrm{J}(f\circ f\circ f)(0,1,-2)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Durch Anwenden der Regeln für partielle Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{e}^{2y+z} & \mathrm{e}^{2y+z} \\ \dfrac{z}{1+x^2z^2} & -1 & \dfrac{x}{1+x^2z^2} - 1 \\ 1 & 2z\sin(2+yz) & 2y\sin(2+yz) \end{pmatrix} \qquad \text{und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}g(u,v,w) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial g_1}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial g_2}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{6vw^2}{5+v^2w^2} & \dfrac{6v^2w}{5+v^2w^2} \\ w\sqrt{3+v^2} & \dfrac{uvw}{\sqrt{3+v^2}} & u\sqrt{3+v^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel 4.8.3 für vektorwertige Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(g\circ f)(0,-1,2) &= \mathrm{J}g(f(0,-1,2))\cdot \mathrm{J}f(0,-1,2) = \mathrm{J}g(0,-1,-2)\cdot \mathrm{J}f(0,-1,2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es gilt $f(0,1,-2) = (0,1,-2)$, d. h. der Punkt $(0,1,-2)$ wird durch $f$ auf sich selbst abgebildet. Zweimaliges Anwenden der Kettenregel auf $f\circ f\circ f = (f\circ f)\circ f$ liefert somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(f\circ f\circ f)(0,1,-2) &= \mathrm{J}(f\circ f)(f(0,1,-2))\cdot \mathrm{J}f(0,1,-2) \\
&= \mathrm{J}(f\circ f)(0,1,-2)\cdot \mathrm{J}f(0,1,-2) \\
&= \mathrm{J}f(f(0,1,-2))\cdot \mathrm{J}f(0,1,-2)\cdot \mathrm{J}f(0,1,-2) \\
&= \mathrm{J}f(0,1,-2)\cdot \mathrm{J}f(0,1,-2)\cdot \mathrm{J}f(0,1,-2) = \big(\mathrm{J}f(0,1,-2)\big)^3.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von $(x,y,z) = (0,1,-2)$ in $\mathrm{J}f(x,y,z)$ erhalten wir die gesuchte Matrix

$$\mathrm{J}(f\circ f\circ f)(0,1,-2) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 5 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H 97.** *Lineare Approximation*

**(a)** Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2,x_3)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + (x_2+x_3)^2 - x_3 \\ (x_1+1)^2 - 4x_2 + \frac{2}{x_3} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die lineare Approximation $L_{f,a} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ von $f$ im Punkt $a = (1,0,2)^\intercal$.

**(b)** Bestimmen Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ so, dass für alle $\varepsilon \in (0,1)$ und alle $x = (x_1,x_2,x_3)^\intercal \in U_\varepsilon(a)$ die Abschätzung $|f(x) - L_{f,a}(x)| < c\varepsilon^2$ gilt.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Jacobi–Matrix von $f$ an der Stelle $x = (x_1,x_2,x_3)^\intercal \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ lautet

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}f(x) \;&=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} \\
&=\; \begin{pmatrix} 3 & 2(x_2+x_3) & 2(x_2+x_3)-1 \\ 2(x_1+1) & -4 & -\frac{2}{x_3^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die lineare Approximation von $f$ im Punkt $a$ hat nach Satz 4.7.2 die Gestalt

$$L_{f,a}(x) \;:=\; f(a) \;+\; \mathrm{J}f(a)(x-a),$$

und durch Einsetzen von $a = (1,0,2)^\intercal$ in $f$ und $\mathrm{J}f$ ergibt sich

$$L_{f,a}(x) \;=\; \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-0 \\ x_3-2 \end{pmatrix}.$$

**(b)** Ausmultiplizieren liefert

$$L_{f,a}(x) \;=\; \begin{pmatrix} 5 + 3(x_1-1) + 4x_2 + 3(x_3-2) \\ 5 + 4(x_1-1) - 4x_2 - \frac{1}{2}(x_3-2) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4 \\ 4x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Differenz

$$\begin{aligned}
f(x) - L_{f,a}(x) \;&=\; \begin{pmatrix} 3x_1 + (x_2+x_3)^2 - x_3 \\ (x_1+1)^2 - 4x_2 + \frac{2}{x_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4 \\ 4x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2 \end{pmatrix} \\
&=\; \begin{pmatrix} (x_2+x_3)^2 - 4x_2 - 4x_3 + 4 \\ (x_1+1)^2 + \frac{2}{x_3} - 4x_1 + \frac{1}{2}x_3 - 2 \end{pmatrix} \;=:\; \begin{pmatrix} d_1(x) \\ d_2(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und fassen beiden Komponenten nach Potenzen von $x_1-1$, $x_2$ und $x_3-2$ zusammen:

$$\begin{aligned}
d_1(x) &= (x_2+x_3)^2 - 4x_2 - 4x_3 + 4 \;=\; x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 4x_2 - 4x_3 + 4 \\
&= x_2^2 + 2x_2(x_3-2) + (x_3-2)^2, \\
d_2(x) &= (x_1+1)^2 + \frac{2}{x_3} - 4x_1 + \frac{1}{2}\,x_3 - 2 \;=\; x_1^2 - 2x_1 + 1 + \frac{x_3^2-4x_3+4}{2x_3} \\
&= (x_1-1)^2 + \frac{(x_3-2)^2}{2x_3}\,.
\end{aligned}$$

Aus der Annahme $x \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow (x_1-1)^2 + (x_2-0)^2 + (x_3-2)^2 < \varepsilon^2$ folgt

$$(x_1-1)^2 < \varepsilon^2, \qquad x_2^2 < \varepsilon^2 \qquad \text{und} \qquad (x_3-2)^2 < \varepsilon^2$$

bzw. $|x_1-1| < \varepsilon$, $|x_2| < \varepsilon$ und $|x_3-2| < \varepsilon$, vgl. Definition 4.2.1.
Der Betrag von $d_1(x)$ kann damit durch

$$|d_1(x)| \;\leqq\; x_2^2 + 2|x_2||x_3-2| + (x_3-2)^2 \;<\; \varepsilon^2 + 2\,\varepsilon\cdot\varepsilon + \varepsilon^2 \;=\; 4\,\varepsilon^2$$

abgeschätzt werden. Wegen $|x_3-2| < \varepsilon < 1$ ist außerdem $x_3 > 1$, und damit

$$|d_2(x)| \;\leqq (x_1-1)^2 + \frac{(x_3-2)^2}{2} \;<\; \varepsilon^2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \;<\; 2\,\varepsilon^2.$$

Insgesamt ergibt sich die Abschätzung

$$|f(x) - L_{f,a}(x)| \;=\; \sqrt{d_1(x)^2 + d_2(x)^2} \;<\; \sqrt{(4\,\varepsilon^2)^2 + (2\,\varepsilon^2)^2} \;=\; \sqrt{20}\,\varepsilon^2,$$

und damit die gewünschte Aussage mit $c := \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $(\approx 4{,}4721)$.

**Bemerkung:** Wie schon bei Aufgabe H75 ergibt sich auch hier aufgrund mehrerer großzügiger Abschätzungen nicht der optimale Wert für die Konstante. Numerische Berechnungen lassen vermuten, dass das kleinstmögliche $c$, mit dem die Abschätzung noch gilt, im Bereich zwischen 2 und 2,1 liegt.

**Aufgabe H 98.** *Tangente und Tangentialebene*
Gegeben seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 - y^2 - 4z^2$ und die Ebene $E : x = -2$.

**(a)** Um was für ein geometrisches Objekt handelt es sich bei der Niveaumenge

$$N \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = -4\}\ ?$$

Sind $(0,0,1)$ und $(-2,2,-1)$ in $N$ enthalten?

**(b)** Berechnen Sie die Tangentialebenen an $N$ in den Punkten $(0,0,1)$ und $(-2,2,-1)$.

**(c)** Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Tangente an $E \cap N$ im Punkt $(-2,2,-1)$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Bedingung

$$f(x,y,z) \;=\; -4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 - y^2 - 4z^2 \;=\; -4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 - y^2 - 4z^2 + 4 \;=\; 0$$

entspricht der affinen Normalform eines *einschaligen Hyperboloids* in den Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}\,x, \frac{1}{2}\,y, z)$, vgl. „Lineare Algebra und Geometrie“, Klassifikation 6.3.7.
Wegen $f(0,0,1) = f(-2,2,-1) = -4$ liegen die Punkte $(0,0,1)$ und $(-2,2,-1)$ in der Niveaumenge $N$.

**(b)** Die gesuchten Tangentialebenen können nun wie in Beispiel 4.9.4.2 bestimmt werden. Der Normalenvektor der Ebene ist dabei stets der Gradient

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) \;=\; (2x,-2y,-8z)^{\intercal}$$

von $f$ an der jeweiligen Berührstelle. Für die Tangentialebene in $(0,0,1)$ erhält man auf diese Weise die Gleichung

$$\operatorname{grad} f(0,0,1) \bullet (x-0,y-0,z-1)^{\intercal} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (0,0,-8)^{\intercal} \bullet (x,y,z-1)^{\intercal} \;=\; 0,$$

d. h. $-8z+8=0$, also $E_1 : z = 1$. Für die Tangentialebene in $(-2,2,-1)$ muss

$$\operatorname{grad} f(-2,2,-1) \bullet (x+2,y-2,z+1)^{\intercal} \;=\; (-4,-4,8)^{\intercal} \bullet (x+2,y-2,z+1)^{\intercal} \;=\; 0$$

und damit $-4x-4y+8z+8=0$ gelten; dies liefert $E_2 : x+y-2z=2$.

**(c)** Die Punkte der Schnittmenge $E\cap N$ erfüllen die beiden Bedingungen

$$x \;=\; -2 \qquad \text{und} \qquad x^2-y^2-4z^2=-4$$

und somit auch die Gleichung $y^2+4z^2=4+x^2=8$. Es handelt sich bei $E\cap N$ also um eine Ellipse in der Ebene $E : x=-2$.

Die Tangente an $E\cap N$ im Punkt $(-2,2,-1)$ kann z. B. als Schnittgerade der Tangentialebene $E_2$ aus **(b)** mit $E$ bestimmt werden. Hierzu löst man die Gleichung von $E_2$ nach $y$ auf und erhält mit $z=t$ und $x=-2$ die Parameterdarstellung

$$g: \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x\\ 2-x+2z\\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2\\ 4+2t\\ t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2\\ 4\\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

**Aufgabe H 99.** *Geometrische Eigenschaften von Gradienten*

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} : (x,y)\mapsto x(x^2+y^2-1)$.

**(a)** Skizzieren Sie die Niveaumenge

$$N_0 \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=0\}.$$

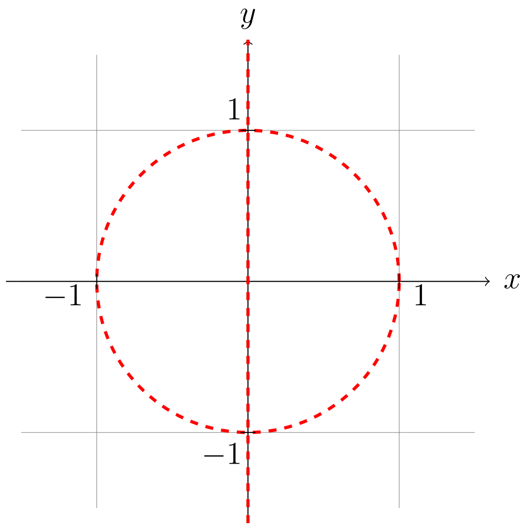
**(b)** Berechnen Sie die Tangenten an $N_0$ in den Punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Fügen Sie diese Tangenten und die Gradienten in diesen Punkten zur Skizze aus **(a)** hinzu.

**(c)** Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ in den Punkten $(0,-1)$ und $(0,1)$. Was lässt sich über die Tangenten an $N_0$ in diesen Punkten sagen?

**(d)** Sei $N_6=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=6\}$. Liegen $(\sqrt[3]{6},1)$, $(\sqrt[3]{6},-1)$ und $(2,0)$ in $N_6$? Berechnen und skizzieren Sie die Tangenten an $N_6$ in diesen Punkten. Bestimmen Sie alle $y\in\mathbb{R}$ mit $(\frac{3}{2},y)\in N_6$ und fügen Sie diese Punkte der Skizze hinzu. Skizzieren Sie nun $N_6$ im Bereich $[\frac{3}{2},2]\times[-2,2]$ näherungsweise.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)**




**(b)** Berechne zuerst den Gradienten von $f$. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) \;=\; (3x^2+y^2-1, 2xy)^{\mathsf{T}}.$$

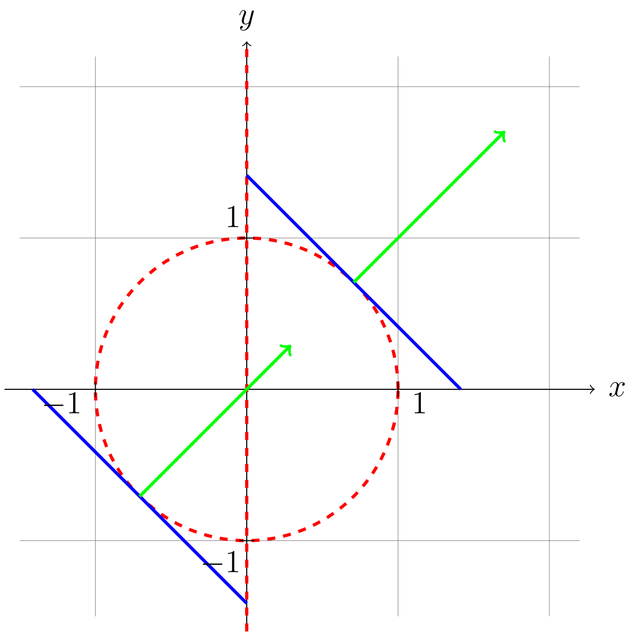
Für die Tangente in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ erhält man auf diese Weise die Gleichung

$$\operatorname{grad} f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \bullet (x+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y+\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{\mathsf{T}} \;=\; (1,1)^{\mathsf{T}} \bullet (x+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y+\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{\mathsf{T}} \;=\; 0,$$

d. h. $x+y+\sqrt{2}=0$, also $T_1 : y=-x-\sqrt{2}$. Für die Tangente in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ muss

$$\operatorname{grad} f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \bullet (x-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y-\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{\mathsf{T}} \;=\; (1,1)^{\mathsf{T}} \bullet (x-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y-\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{\mathsf{T}} \;=\; 0,$$

und damit $x+y-\sqrt{2}=0$ gelten; dies liefert $T_2 : y=-x+\sqrt{2}$.




**(c)** Der Gradient in den Punkten $(0,-1)$ und $(0,1)$ ist Null. $N_0$ hat keine Tangenten in diesen Punkten.

**(d)** Die Punkte $(\sqrt[3]{6},1)$, $(\sqrt[3]{6},-1)$ und $(2,0)$ liegen wegen

$$f(\sqrt[3]{6},1) \;=\; f(\sqrt[3]{6},-1) \;=\; f(2,0) \;=\; 6$$

in $N_6$. Für die Tangente in $(\sqrt[3]{6},1)$ muss

$$\operatorname{grad} f(\sqrt[3]{6},1) \bullet (x-\sqrt[3]{6}, y-1)^{\mathsf{T}} \;=\; (3\sqrt[3]{36}, 2\sqrt[3]{6})^{\mathsf{T}} \bullet (x-\sqrt[3]{6}, y-1)^{\mathsf{T}} \;=\; 0,$$

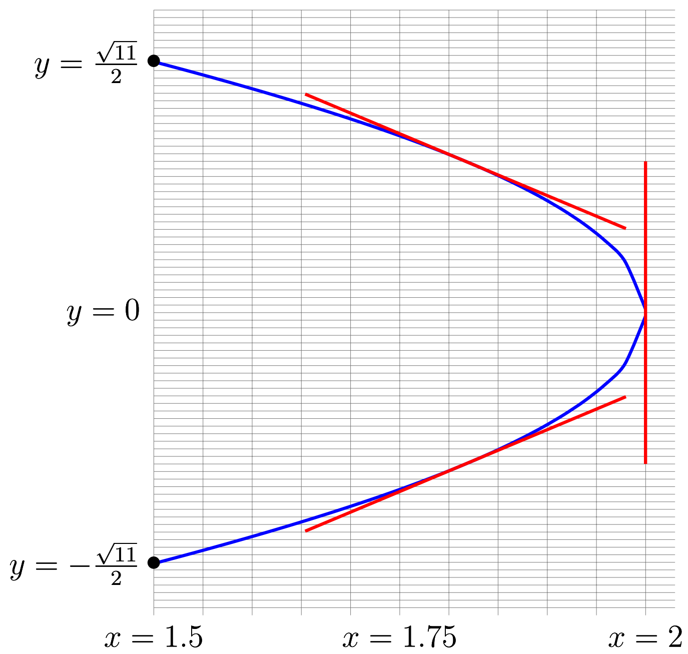
und damit $3\sqrt[3]{36}\,x + 2\sqrt[3]{6}\,y - 2\sqrt[3]{6} - 18 = 0$ gelten. Die Tangente in $(\sqrt[3]{6},-1)$ muss

$$\operatorname{grad} f(\sqrt[3]{6},-1) \bullet (x-\sqrt[3]{6}, y+1)^{\mathsf{T}} \;=\; (3\sqrt[3]{36}, -2\sqrt[3]{6})^{\mathsf{T}} \bullet (x-\sqrt[3]{6}, y+1)^{\mathsf{T}} \;=\; 0,$$

und damit $3\sqrt[3]{36}\,x - 2\sqrt[3]{6}\,y - 2\sqrt[3]{6} - 18 = 0$ erfüllen. Für die Tangente in $(2,0)$ muss

$$\operatorname{grad} f(2,0) \bullet (x-2, y)^{\mathsf{T}} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (11,0)^{\mathsf{T}} \bullet (x-2,y)^{\mathsf{T}} \;=\; 0,$$

und damit $11x - 22 = 0$ gelten; also $x = 2$.
Die Punkte $(\frac{3}{2}, y)$ in $N_6$ sind $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2}\right)^{\mathsf{T}}$ und $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^{\mathsf{T}}$.



## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 100.** *Parametrisierung, Potential, Kurvenintegral*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_2}{3}, \frac{x_1}{3}+1)^\intercal$.

**(a)** Bestimmen Sie die Rotation von $g$. Hat $g$ ein Potential?
Falls ja, geben Sie ein Potential $U$ an. Ist $U$ eine harmonische Funktion?

**(b)** Wir betrachten folgende Kurven von $(0,-1)$ nach $(0,1)$.
Sei $K = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x_1^2 + x_2^2 = 1,\; x_1 \geqq 0\}$.
Sei $L = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \; |x_1| + |x_2| = 1,\; x_1 \leqq 0\}$.
Sei $M = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x_1 = x_2^2 - 1,\; x_1 \leqq 0\}$.
Skizzieren und parametrisieren Sie diese Kurven.

**(c)** Berechnen Sie die Kurvenintegrale von $g$ längs der Kurven aus **(b)** mittels der Parametrisierungen aus **(b)**.

**(d)** Verwenden Sie das Potential $U$, um die Kurvenintegrale aus **(c)** erneut zu berechnen.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es gilt

$$\operatorname{rot} g(x_1,x_2) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Da der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ von $g$ sicherlich einfach zusammenhängend ist, hat $g$ mit Satz 5.2.4. ein Potential.

Wir bestimmen ein Potential zu $g$, indem wir zunächst die erste Komponente nach $x_1$ integrieren:

$$[U(x_1,x_2)] = \int U_{x_1}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\,x_1 = \int \mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_2}{3}\,\mathrm{d}\,x_1 = \left[\mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_2}{3}x_1\right].$$

Wir setzen eine von $x_2$ abhängige Konstante an, d.h.

$$U(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_2}{3}x_1 + c(x_2).$$

Diese bestimmen wir durch Ableiten nach $x_2$:

$$\frac{x_1}{3} + 1 = g_2(x_1,x_2) = U_{x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}c(x_2).$$

Es gilt $c(x_2) = x_2 + k$, wobei wir die Integrationskonstante $k \in \mathbb{R}$ Null setzen, da nur *ein* Potential gefragt ist. Insgesamt haben wir also

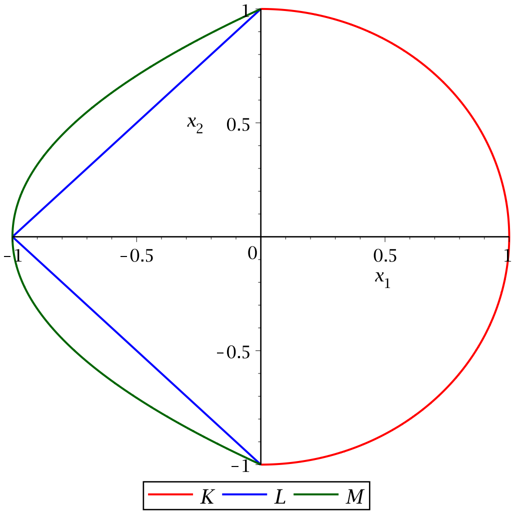
$$U(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_2}{3}x_1 + x_2.$$

Weiter ist

$$\Delta U(x_1,x_2) = U_{x_1x_1}(x_1,x_2) + U_{x_2x_2}(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{x_1} + 0 \neq 0.$$

Folglich ist $U$ keine harmonische Funktion.

**(b)** Die Kurven sind in der folgenden Abbildung dargestellt.




Sie werden zum Beispiel parametrisiert durch:

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\
C_2 &: [-1, 1] : t \mapsto \begin{cases} (-t-1, t)^\intercal & \text{für} \quad t < 0 \\ (t-1, t)^\intercal & \text{für} \quad t \geqq 0 \end{cases} \\
C_3 &: [-1, 1] : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Hinter $C_2$ steckt folgende Überlegung: Es ist $|x_2| = 1 - |x_1|$. Da $x_1 \leqq 0$ ist, gilt $|x_1| = -x_1$. Damit gilt $|x_2| = 1 + x_1$, also $x_1 = x_2 - 1$ (für $x_2 \geqq 0$) bzw. $x_1 = -x_2 - 1$ (für $x_2 < 0$). Wir wählen an der Stelle von $x_2$ unseren Parameter $t$ und lassen diesen im ersten Fall von $-1$ bis $0$ laufen und danach von $0$ bis $1$ um eine durchgängige Parametrisierung zu erhalten. Man kann auch direkt anhand der Skizze erkennen, dass sich $L$ durch zwei Strecken parametrisieren lässt.

**(c)** Wir benutzen die Parametrisierung:

$$
\begin{aligned}
\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\, x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\cos(t)} + \frac{\sin(t)}{3} \\ \frac{\cos(t)}{3} + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) - \frac{\sin(t)^2}{3} + \frac{\cos(t)^2}{3} + \cos(t) \, \mathrm{d}\, t \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} -\mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) \, \mathrm{d}\, t + \int_{0}^{\pi/2} -\mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) \, \mathrm{d}\, t + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)}{3} + \cos(t) \, \mathrm{d}\, t \\
&\text{(Subst. } u = \cos(t),\ \tfrac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} = -\sin(t)) \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}\, u + \int_1^0 \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}\, u + \left[ \frac{\sin(2t)}{6} + \sin(t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 + 2 = 2.
\end{aligned}
$$

(Man könnte $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) = 0$ auch damit begründen, dass der Integrand eine ungerade Funktion ist.)

$$\begin{aligned}
\int_L g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_{-1}^{0} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t-1} + \frac{t}{3} \\ \frac{-t-1}{3} + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_0^1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t-1} + \frac{t}{3} \\ \frac{t-1}{3} + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{0} -\mathrm{e}^{-t-1} - \frac{t}{3} - \frac{t+1}{3} + 1 \,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 \mathrm{e}^{t-1} + \frac{t}{3} + \frac{t-1}{3} + 1 \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{0} -\mathrm{e}^{-t-1} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t \,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 \mathrm{e}^{t-1} + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\mathrm{e}^{-t-1} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}t^2\right]_{-1}^{0} + \left[\mathrm{e}^{t-1} + \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t\right]_0^1 \\
&= \mathrm{e}^{-1} + 2 - \mathrm{e}^{-1} = 2. \\
\int_M g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2-1} + \frac{t}{3} \\ \frac{t^2-1}{3} + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{1} 2t\mathrm{e}^{t^2-1} + \frac{2}{3}t^2 + \frac{t^2-1}{3} + 1 \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{1} 2t\mathrm{e}^{t^2-1} \,\mathrm{d}\,t + \int_{-1}^{1} t^2 + \frac{2}{3} \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{0} 2t\mathrm{e}^{t^2-1} \,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 2t\mathrm{e}^{t^2-1} \,\mathrm{d}\,t + \int_{-1}^{1} t^2 + \frac{2}{3} \,\mathrm{d}\,t \\
&\text{(Subst. } u = t^2 - 1,\ \tfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = 2t\text{)} \\
&= \int_0^{-1} \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}\,u + \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}\,u + \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}t\right]_{-1}^{1} \\
&= 0 + 2 = 2.
\end{aligned}$$

(Man könnte $\int_{-1}^{1} 2t\mathrm{e}^{t^2-1}\,\mathrm{d}\,t = 0$ auch damit begründen, dass der Integrand eine ungerade Funktion ist.)

**(d)** Wir nutzen unser Potential:

$$\begin{aligned}
\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= U(C_1(\pi/2)) - U(C_1(-\pi/2)) = U(0,1) - U(0,-1) \\
&= \mathrm{e}^0 + 1 - (\mathrm{e}^0 - 1) = 2. \\
\int_L g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= U(C_2(1)) - U(C_2(-1)) = U(0,1) - U(0,-1) \\
&= \mathrm{e}^0 + 1 - (\mathrm{e}^0 - 1) = 2. \\
\int_M g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= U(C_3(1)) - U(C_3(-1)) = U(0,1) - U(0,-1) \\
&= \mathrm{e}^0 + 1 - (\mathrm{e}^0 - 1) = 2.
\end{aligned}$$

**Aufgabe H 101.** *Kurvenintegrale*

Gegeben seien die Vektorfelder

$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto (x_1^2, x_2^2)^\intercal \\ g&\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x_1,x_2,x_3)^\intercal \mapsto (\mathrm{e}^{x_1}+x_2^2, \mathrm{e}^{x_2}+x_3^2, \mathrm{e}^{x_3}+x_1^2)^\intercal \\ h&\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon (x_1,x_2,x_3,x_4)^\intercal \mapsto (\mathrm{e}^{x_1}+x_2^2, \mathrm{e}^{x_2}+x_3^2, \mathrm{e}^{x_3}+x_1^2, 0)^\intercal\,. \end{aligned}$$

Sei die Kurve $K_1$ parametrisiert durch $C_1\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (1,\mathrm{e}^t)^\intercal$. Sei die Kurve $K_2$ parametrisiert durch $C_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (t,t^2,t^3)^\intercal$. Sei die Kurve $K_3$ parametrisiert durch $C_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^4\colon t \mapsto (t,t^2,t^3,\mathrm{e}^{3t}\cos(t))^\intercal$. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

**(a)** $\displaystyle\int_{K_1} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{K_3} h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$

**(d)** Welches dieser Integrale lässt sich auch ohne Parametrisierung berechnen? Führen Sie auch diese Berechnung durch.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a), (b), (c)**

$$\begin{aligned} \int_{K_1} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t = \int_1^2 \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^6 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^3. \\ \int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t+t^4 \\ \mathrm{e}^{t^2}+t^6 \\ \mathrm{e}^{t^3}+t^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t = \int_0^1 \mathrm{e}^t + t^4 + 2t\mathrm{e}^{t^2} + 2t^7 + 3t^2\mathrm{e}^{t^3} + 3t^4\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^t + 4t^4 + 2t^7\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 2t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 3t^2\mathrm{e}^{t^3}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^t + 4t^4 + 2t^7\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}\,u + \int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}\,u \\ &= \left[\mathrm{e}^t + \frac{4}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^8\right]_0^1 + [\mathrm{e}^u]_0^1 + [\mathrm{e}^u]_0^1 \\ &= \mathrm{e} + \frac{1}{20} + 2(\mathrm{e}-1) = 3\mathrm{e} - \frac{39}{20}. \\ \int_{K_3} h(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t+t^4 \\ \mathrm{e}^{t^2}+t^6 \\ \mathrm{e}^{t^3}+t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \\ \frac{d}{\mathrm{d}\,t}(\mathrm{e}^{3t}\cos(t)) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t = \int_0^1 \mathrm{e}^t + t^4 + 2t\mathrm{e}^{t^2} + 2t^7 + 3t^2\mathrm{e}^{t^3} + 3t^4\,\mathrm{d}\,t \\ &= 3\mathrm{e} - \frac{39}{20}. \end{aligned}$$

Wir verzichten im letzten Integral auf die Berechnung von $\frac{d}{\mathrm{d}\,t}(\mathrm{e}^{3t}\cos(t))$, da dieser Term sowieso beim Skalarprodukt auf die Null des ersten Faktors trifft. Es ergibt sich damit das gleiche Integral wie bei $K_2$.

**(d)** Es kommt ein alternativer Lösungsweg mit Hilfe von Potentialen in Frage. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}x_2^2 - \frac{\partial}{\partial x_2}x_1^2 = 0. \\ \operatorname{rot} g(x_1,x_2,x_3) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{e}^{x_3}+x_1^2) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\mathrm{e}^{x_2}+x_3^2) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\mathrm{e}^{x_1}+x_2^2) - \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{e}^{x_3}+x_1^2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{e}^{x_2}+x_3^2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{e}^{x_1}+x_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2x_3 \\ 0-2x_1 \\ 0-2x_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Offenbar verschwindet $\operatorname{rot} g(x_1,x_2,x_3)$ nicht für alle $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, also besitzt $g$ kein Potential. Wenn wir zu $g$ kein Potential finden können, so finden wir sicherlich auch keines zu $h$. Die Rotation von $f$ verschwindet überall und $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend, also besitzt $f$ ein Potential.
Um dieses zu bestimmen, integrieren wir die erste Komponente nach $x_1$:

$$\int x_1^2 \,\mathrm{d}\, x_1 = \frac{1}{3}x_1^3 + c(x_2).$$

Wir differenzieren nach $x_2$ und vergleichen mit der zweiten Komponente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x_2}\left(\frac{1}{3}x_1^3 + c(x_2)\right) = c'(x_2) \overset{!}{=} x_2^2$$
$$\Rightarrow c(x_2) = \frac{1}{3}x_2^3 + k\ , \quad \text{(wir wählen } k = 0\text{)}.$$

Wir erhalten damit das Potential

$$U(x_1,x_2) = \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3).$$

Nun berechnen wir mit Hilfe des Potentials das Kurvenintegral aus **(a)**

$$\int_{K_1} f(x) \bullet \mathrm{d}\, x = U(C_1(2)) - U(C_1(1)) = U(1,\mathrm{e}^2) - U(1,\mathrm{e}^1)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \mathrm{e}^6 - 1 - \mathrm{e}^3\right) = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^3).$$

**Aufgabe H 102.** *Parametrisierung, Kurvenintegral*
Gegeben seien die Menge $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 = x_3^2\}$,
die Ebene $E = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2\}$ und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_2 + 4x_3 - 6 \\ 4x_1^2 + 3x_2 + 4x_2^2 + 8 \\ -4x_1^2 - 3x_2 - 4x_2^2 + 8x_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Parametrisieren Sie die Kurve $K = M \cap E$.
Sei ferner $K^*$ die Kurve $K$, nur rückwärts durchlaufen. Parametrisieren Sie $K^*$.

**(b)** Berechnen Sie $\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$. Berechnen Sie $\oint_{K^*} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Die Kurven $K$ und $K^*$ werden parametrisiert durch:

$$C\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 1 \\ 2\sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$C^*\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi - t) + 1 \\ 2\sin(2\pi - t) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**(b)**

$$\begin{aligned}\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -6\sin(t)+2 \\ 28+16\cos(t)+6\sin(t) \\ -16\cos(t)-6\sin(t)-3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^{2\pi} 12 - 4\sin(t) + 56\cos(t) + 20\cos(t)^2 + 12\cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= 44\pi.\end{aligned}$$

**Aufgabe H 103.** *Potential*

Berechnen Sie jeweils das Potential $U$ von $f$, das $U(0,0,0) = 17$ erfüllt.

**(a)** $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} -y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz} \\ (z\cos(xy) - x\sin(xy))\,\mathrm{e}^{yz} + z \\ y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + y + 1 \end{pmatrix}$

**(b)** $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{xyz} \cdot \begin{pmatrix} \cos(x+y+z) + yz\sin(x+y+z) \\ \cos(x+y+z) + xz\sin(x+y+z) \\ \cos(x+y+z) + xy\sin(x+y+z) \end{pmatrix}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir berechnen das Potential. Es ist

$$U(x,y,z) = \int -y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz}\,\mathrm{d}\,x = \cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + c_1(y,z)$$

Diesen Ausdruck leiten wir nach $y$ ab

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,y} &= -x\sin(xy)\mathrm{e}^{yz} + z\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + \frac{\mathrm{d}\,c_1}{\mathrm{d}\,y}(y,z) \\ &= -x\sin(xy)\mathrm{e}^{yz} + z\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + z = f_2(x,y,z).\end{aligned}$$

Es folgt

$$c_1(y,z) = \int z\,\mathrm{d}\,y = yz + c_2(z).$$

Ableiten nach z ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,z} &= y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + y + \frac{\mathrm{d}\,c_2}{\mathrm{d}\,z}(z) \\ &= y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + y + 1 = f_3(x,y,z).\end{aligned}$$

Es folgt

$$c_2(z) = \int 1\,\mathrm{d}\,z = z + c.$$

Nun berechnen wir

$$17 = U(0,0,0) = \cos(0)\mathrm{e}^0 + 0 + 0 + c = 1 + c.$$

Das Potential $U$ ist somit

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + yz + z + 16.$$

**(b)** Wir berechnen das Potential. Es ist

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int \cos(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + yz\sin(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \sin(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + c_1(y,z) \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck leiten wir nach $y$ ab

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,y} &= \cos(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + xz\sin(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + \frac{\mathrm{d}\,c_1}{\mathrm{d}\,y}(y,z) \\ &= \cos(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + xz\sin(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} \\ &= f_2(x,y,z). \end{aligned}$$

Es folgt

$$c_1(y,z) = c_2(z).$$

Ableiten nach z ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,z} &= \cos(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + xy\sin(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + \frac{\mathrm{d}\,c_2}{\mathrm{d}\,z}(z) \\ &= \cos(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} + xy\sin(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz} \\ &= f_3(x,y,z). \end{aligned}$$

Es folgt $c_2(z) = c$.
Nun berechnen wir

$$17 = U(0,0,0) = \sin(0)\mathrm{e}^0 + c = c.$$

Das Potential $U$ ist somit

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{xyz}\sin(x+y+z) + 17.$$

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 104.** *Kurvenintegrale*

**(a)** Skizzieren Sie die durch $C\colon [0,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - 3t \\ 1 - t - t^2 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve $K$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\displaystyle\int_K |f(s)|\,\mathrm{d}\,s$ für

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4x - 2y + 9 \\ 2x + y + 20 \end{pmatrix}.$$

**(b)** Berechnen Sie $L(K)$ sowie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ und $\displaystyle\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für

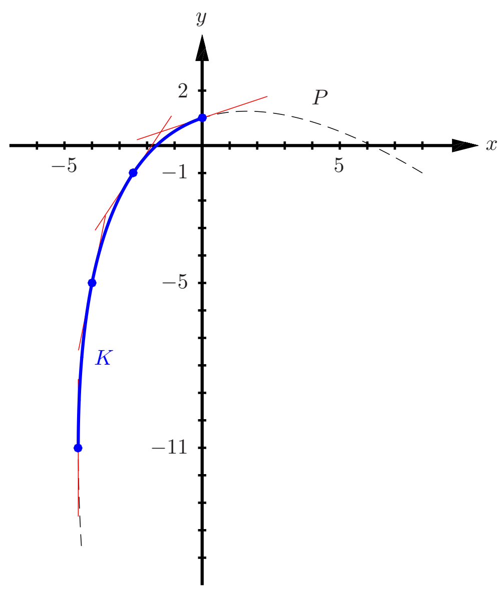
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 2z^2 - y - 3x$$

und die durch $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) \\ \mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve $K$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Für alle $t \in [0,3]$ ist

$$C'(t) = \begin{pmatrix} t-3 \\ -2t-1 \end{pmatrix}.$$




Mit Hilfe der auf $K$ gelegenen Punkte

$$C(0) = (0,1)^\intercal,\quad C(1) = (-\tfrac{5}{2},-1)^\intercal,$$
$$C(2) = (-4,-5)^\intercal,\quad C(3) = (-\tfrac{9}{2},-11)^\intercal$$

und der zugehörigen Tangentenrichtungen

$$C'(0) = (-3,-1)^\intercal,\quad C'(1) = (-2,-3)^\intercal,$$
$$C'(2) = (-1,-5)^\intercal,\quad C'(3) = (0,-7)^\intercal$$

ergibt sich die nebenstehende Skizze.

*Bemerkung:* $K$ ist Teil der Parabel

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 4xy + y^2 - 18x + 40y - 41 = 0\}.$$

Für die gesuchten Kurvenintegrale gilt wegen $f(C(t)) = \frac{1}{7}(14t+7, -7t+21)^\intercal$:

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_0^3 f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^3 \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t+3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} t-3 \\ -2t-1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t$$
$$= \int_0^3 4t^2 - 10t - 6\,\mathrm{d}\,t = \left[\tfrac{4}{3}t^3 - 5t^2 - 6t\right]_0^3 = -27 \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\int_K |f(s)|\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^3 |f(C(t))|\,|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \;=\; \int_0^3 \left|\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t+3 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} t-3 \\ -2t-1 \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^3 \left|\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t+3 \end{pmatrix}\right|^2 \mathrm{d}\,t \;=\; \int_0^3 5t^2-2t+10\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\tfrac{5}{3}\,t^3-t^2+10t\right]_0^3 \;=\; 66.\end{aligned}$$

**(b)** Für alle $t \in [0,\pi]$ ist

$$C'(t) \;=\; \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)+\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t) \\ \mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t\cos t \\ 2\mathrm{e}^t\sin t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Wegen $C'(t) \neq (0,\ldots,0)^\intercal$ ist $C$ regulär. Als Kurvenlänge ergibt sich gemäß 5.4.2

$$\begin{aligned}L(K) &= \int_0^\pi |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \;=\; \int_0^\pi \sqrt{4\mathrm{e}^{2t}(\cos t)^2 + 4\mathrm{e}^{2t}(\sin t)^2 + \mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^\pi \sqrt{5\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}\,t \;=\; \sqrt{5}\int_0^\pi \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \;=\; \sqrt{5}\left[\mathrm{e}^t\right]_0^\pi \;=\; \sqrt{5}\,(\mathrm{e}^\pi-1).\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral von $f$ längs $K$ hat nach Definition 5.4.1 den Wert

$$\begin{aligned}\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^\pi f(C(t))\,|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^\pi \left(2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t(\sin t-\cos t) - 3\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)\right)\sqrt{5}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \\ &= 2\sqrt{5}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}\,t - 2\int_0^\pi \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}\,t - \int_0^\pi \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}\,t\right).\end{aligned}$$

In **H 84 (d)** wurde (für $\alpha=-2$) gezeigt, dass

$$\int \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}\,t \;=\; \left[\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2t}(2\sin t-\cos t)\right].$$

Partielle Integration liefert

$$\int \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}\,t \;=\; \left[\mathrm{e}^{2t}\sin t\right] - 2\int \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}\,t \;=\; \left[\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2t}(\sin t+2\cos t)\right],$$

so dass insgesamt

$$\begin{aligned}\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= 2\sqrt{5}\left[\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3t} - \tfrac{2}{5}\,\mathrm{e}^{2t}(2\sin t-\cos t) - \tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2t}(\sin t+2\cos t)\right]_0^\pi \\ &= 2\sqrt{5}\left(\left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3\pi} - \tfrac{2}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi} + \tfrac{2}{5}\,\mathrm{e}^{2\pi}\right) - \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{5}\right)\right) \;=\; \tfrac{2}{3}\,\sqrt{5}\,(\mathrm{e}^{3\pi}-1)\end{aligned}$$

gilt. Da $f$ ein Potential für $\nabla f$ ist, ergibt sich nach Satz 5.3.10 außerdem

$$\begin{aligned}\int_K \nabla f(x)\bullet\mathrm{d}\,x &= f(C(\pi))-f(C(0)) \;=\; f(-\mathrm{e}^\pi,\mathrm{e}^\pi,\mathrm{e}^\pi)-f(1,-1,1) \\ &= (2\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^\pi+3\mathrm{e}^\pi)-0 \;=\; 2\,(\mathrm{e}^{2\pi}+\mathrm{e}^\pi).\end{aligned}$$

**Aufgabe H 105.** *Hyperbel und Hyperbelfunktionen*
Gegeben sei die Kurve $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Parametrisierung

$$C\colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(\cosh(t), \sinh(t)\big)^\intercal .$$

**(a)** Ist $K$ ist eine Teilmenge der Hyperbel $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ ?

**(b)** Ist $C$ regulär und doppelpunktfrei?

**(c)** Skizzieren Sie $H$ und $K$ in dasselbe Koordinatensystem.

**(d)** Berechnen Sie das Kurvenintegral der Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 6xy$ längs $K$.

**Lösungshinweise hierzu:**

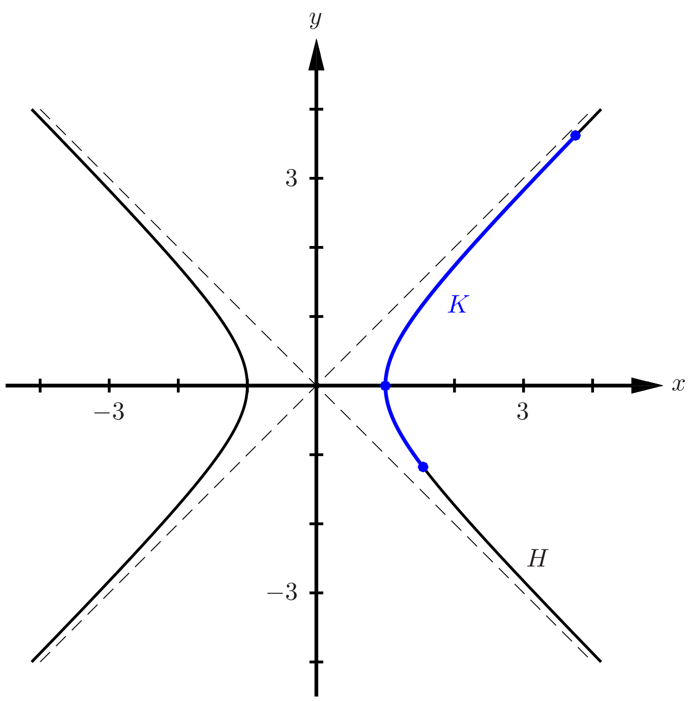
**(a)** Es ist $(C_1(t))^2 - (C_2(t))^2 = (\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$, für alle $t \in \mathbb{R}$, vgl. Beispiel 2.3.3 („hyperbolischer Pythagoras"). Somit erfüllen alle Punkte $C(t) = (C_1(t), C_2(t))^\intercal$ der Kurve $K$ die Gleichung der Hyperbel $H$, d. h. $K$ ist in $H$ enthalten.

**(b)** $C$ ist stetig differenzierbar, mit $C'(t) = (C_1'(t), C_2'(t))^\intercal = (\sinh t, \cosh t)^\intercal$. Wegen

$$|C'(t)| = \sqrt{(\sinh t)^2 + (\cosh t)^2} \geqq \sqrt{0 + (\cosh t)^2} = \cosh t > 0$$

ist $C'(t) \neq (0,0)^\intercal$, für alle $t \in [-1,2]$, d. h. $C$ ist regulär. Aus $C_2'(t) = \cosh t > 0$ folgt außerdem, dass $C_2$ streng monoton wachsend ist, so dass für $t_1 \neq t_2$ stets $C_2(t_1) \neq C_2(t_2)$ und damit $C(t_1) \neq C(t_2)$ gilt. $C$ ist also auch doppelpunktfrei.

**(c)** Die nachstehende Zeichnung zeigt die Hyperbel $H$ (schwarz) und die Kurve $K$ (blau). Die gestrichelten Linien sind die Asymptoten $y = \pm x$ von $H$.




$$C(2) \approx \begin{pmatrix} 3.7622 \\ 3.6269 \end{pmatrix},$$

$$C(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C(-1) \approx \begin{pmatrix} 1.5431 \\ -1.1752 \end{pmatrix}.$$

**(d)** Für das Kurvenintegral gilt nach Definition 5.4.1:

$$\begin{aligned} \int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_{-1}^{2} f(C(t))\,|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-1}^{2} 6(\cosh t)(\sinh t)\,\sqrt{(\sinh t)^2 + (\cosh t)^2}\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

Setze $x(t) := (\sinh t)^2 + (\cosh t)^2$. Nach Beispiel 2.2.12 kann dies zu

$$x(t) \;=\; \tfrac{1}{4}\,(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})^2 + \tfrac{1}{4}\,(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}) \;=\; \cosh(2t)$$

vereinfacht werden. Wegen

$$x'(t) = 2(\sinh t)(\cosh t) + 2(\cosh t)(\sinh t) = 4(\cosh t)(\sinh t)$$

ist nach der Substitutionsregel 3.3.1

$$\begin{aligned}\int 6(\cosh t)(\sinh t)\,\sqrt{(\sinh t)^2 + (\cosh t)^2}\;\mathrm{d}\,t \;&=\; \int \tfrac{6}{4}\,x'(t)\,\sqrt{x(t)}\;\mathrm{d}\,t \\ =\; \int \tfrac{3}{2}\,\sqrt{x}\;\mathrm{d}\,x \;&=\; \big[\,x^{3/2}\,\big] \;=\; \big[(\cosh(2t))^{3/2}\big],\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_K f(s)\;\mathrm{d}\,s \;&=\; \big[(\cosh(2t))^{3/2}\big]_{-1}^{2} \;=\; (\cosh 4)^{3/2} - (\cosh(-2))^{3/2} \\ &=\; (\cosh 4)^{3/2} - (\cosh 2)^{3/2} \qquad (\approx 135.4).\end{aligned}$$

**Aufgabe H 106.** *Lagrange*
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir betrachten das Ellipsoid

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\} .$$

Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader mit Ecken auf $E$ mit größtem Volumen.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir betrachten das Volumen des Quaders als Funktion des Eckpunktes $(x,y,z)$ im ersten Oktanten, d.h. $x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$. Es gilt für das Volumen des Quaders:

$$V(x,y,z) = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz.$$

Wir maximieren $V$ unter der Nebenbedinung

$$g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0.$$

Die Fälle $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ können wir ausschließen, da dann das Volumen Null ergibt und damit sicherlich nicht maximal ist.
Mit Hilfe der Methode von Lagrange erhalten wir also

$$8yz + \frac{2}{a^2}\lambda x = 0 \tag{11}$$

$$8xz + \frac{2}{b^2}\lambda y = 0 \tag{12}$$

$$8xy + \frac{2}{c^2}\lambda z = 0 \tag{13}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0. \tag{14}$$

Wir sehen direkt, dass $\lambda \neq 0$ gelten muss, da sonst $x, y$ oder $z$ verschwinden müsste, und diesen Fall haben wir bereits ausgeschlossen.

Wir multiplizieren (11) bis (13) mit $x$, $y$ bzw. $z$ (beachte: alle ungleich Null, siehe oben) und erhalten

$$\begin{aligned} 8xyz + \frac{2}{a^2}\lambda x^2 &= 0 \qquad (15)\\ 8xyz + \frac{2}{b^2}\lambda y^2 &= 0 \qquad (16)\\ 8xyz + \frac{2}{c^2}\lambda z^2 &= 0 \qquad (17)\\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 &= 0. \qquad (18)\end{aligned}$$

Nun addieren wir (15) bis (17) und bekommen

$$24xyz + 2\lambda\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right) = 0.$$

Die Klammer ergibt wegen (18) gerade Eins, damit folgt

$$24xyz + 2\lambda = 0 \Rightarrow xyz = -\frac{1}{12}\lambda.$$

Eingesetzt in (15) bis (17) liefert das

$$\begin{aligned} -\frac{8}{12}\lambda + 2\lambda\left(\frac{x}{a}\right)^2 &= 0\\ -\frac{8}{12}\lambda + 2\lambda\left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 0\\ -\frac{8}{12}\lambda + 2\lambda\left(\frac{z}{c}\right)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Mit $\lambda \neq 0$ und unter Berücksichtigung der Annahmen $a, b, c > 0$ und $x, y, z \geqq 0$ erhalten wir:

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Das Volumen des Quaders ist dann

$$V\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}\,abc.$$

**Aufgabe H 107.** *Ausgleichsgerade*

Gegeben sind die Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, wobei $n \geqq 2$.

**(a)** Seien $s_1 := \sum_{j=1}^n x_j$ und $s_2 := \sum_{j=1}^n x_j^2$. Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal$ und $(1, 1, \ldots, 1)^\intercal$ in Abhängigkeit von $s_1$ und $s_2$.
Folgern Sie, dass $s_1^2 < ns_2$ ist. Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & n \end{pmatrix}$.

**(b)** Für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir $G_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax + b$ und die Summe der Fehlerquadrate

$$E(a, b) := \sum_{j=1}^n (G_{a,b}(x_j) - y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (ax_j + b - y_j)^2 .$$

Bestimmen Sie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $E(a, b)$ minimal wird. Diesenfalls heißt der Graph von $G_{a,b}$ die Ausgleichsgerade der genannten Punkte.

**(c)** Zeichnen Sie die Punkte $(1,3)$, $(2,4)$, $(4,1)$ und ihre Ausgleichsgerade in dasselbe Koordinatensystem.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es ist

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)^\intercal \bullet (1,1,\dots,1)^\intercal = |(x_1,x_2,\dots,x_n)^\intercal||(1,1,\dots,1)^\intercal|\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n 1}} = \frac{s_1}{\sqrt{s_2}\sqrt{n}}.$$

Da $\cos\alpha \in [-1,1]$ gilt

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{s_1^2}{s_2 n} \leqq 1.$$

Es gilt dabei $s_1^2 = ns_2 \iff \cos\alpha \in \{1,-1\} \iff \alpha \in \{0,\pi\}$. Für $\alpha \in \{0,\pi\}$ wäre aber $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}(1,1,\dots,1)$, im Widerspruch zur Annahme, dass die $x_j$ paarweise verschieden sind. Also tritt der Fall der Gleichheit nicht auf, und wir haben $\frac{s_1^2}{s_2 n} < 1$ und damit $s_1^2 < ns_2$, wie behauptet.
Mit der Standardformel für die Invertierung von $2\times 2$–Matrizen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & n \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s_2 n - s_1^2}\begin{pmatrix} n & -s_1 \\ -s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

(die Ungleichung $s_1^2 < ns_2$ sichert, dass der Nenner nicht Null wird).

**(b)** Wir bestimmen den Gradienten von $E$ und lösen $\operatorname{grad} E(a,b) = 0$:

$$\operatorname{grad} E(a,b) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n 2(ax_j+b-y_j)x_j \\ \sum_{j=1}^n 2(ax_j+b-y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2as_2+2bs_1 & -2\sum_{j=1}^n x_j y_j \\ 2as_1+2nb & -2\sum_{j=1}^n y_j \end{pmatrix}$$
$$= 2\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n x_j y_j \\ \sum_{j=1}^n y_j \end{pmatrix}.$$

Also gilt (nach Anwendung der inversen Matrix):

$$\operatorname{grad} E(a,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{ns_2 - s_1^2}\begin{pmatrix} n\sum_{j=1}^n x_j y_j - s_1 \sum_{j=1}^n y_j \\ -s_1 \sum_{j=1}^n x_j y_j + s_2 \sum_{j=1}^n y_j \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich bei der gefundenen Lösung um ein Minimum, da die Hesse-Matrix $\mathrm{H}E\,(a,b) = 2\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & n \end{pmatrix}$ positiv definit ist (in der Tat ist die Determinante $4(s_2 n - s_1^2)$ positiv nach Teil (a), und die beiden Eigenwerte müssen positiv sein, weil die Spur $s_2 + n$ der Hesse-Matrix positiv ist).

**(c)** Eingesetzt in unsere Formel aus **(b)** erhalten wir

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1+2+4 = 7, \qquad s_2 = 1+4+16 = 21 \\
a &= \frac{1}{3\cdot 21 - 7^2}(3(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 4\cdot 1) - 7(3+4+1)) = -\frac{11}{14} \\
b &= \frac{1}{3\cdot 21 - 7^2}(-7(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 4\cdot 1) + 21(3+4+1)) = \frac{9}{2},
\end{aligned}
$$

und damit die Gerade $y = -\frac{11}{14}x + \frac{9}{2}$.

Die Punkte und die Ausgleichsgerade sind in folgender Abbildung dargestellt.