A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 40. *Häufungspunkte, Konvergenz von Folgen und Reihen*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

(a) $a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ **(b)** $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n^2+2n}{2n+4}\cdot\pi\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 3k \text{ mit } k\in\mathbb{N} \\ -\sqrt{3} & \text{falls } n = 6k-5 \text{ oder } 6k-4 \text{ mit } k\in\mathbb{N} \\ \sqrt{3} & \text{falls } n = 6k-2 \text{ oder } 6k-1 \text{ mit } k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Bemerkung: Anstatt $6k-5$, $6k-4$, $6k-2$ und $6k-1$ sind auch $6k+1$, $6k+2$, $6k+4$, und $6k+5$ möglich. Hier wurde obige Notation verwendet, um die Elemente a_1, a_2, a_4 und a_5 ebenfalls aufzuführen.

Die Häufungspunkte sind 0, $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$.

Die Teilfolge $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Häufungspunkt 0. Die Teilfolgen $(a_{6k-5})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{6k-4})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den Häufungspunkt $-\sqrt{3}$. Die Teilfolgen $(a_{6k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{6k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den Häufungspunkt $\sqrt{3}$.

Die Folge konvergiert nicht, da sie drei Häufungspunkte besitzt.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge darum konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht.

(b) Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^k}{2k} & \text{falls } n \text{ gerade mit } n = 2k \text{ und } k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Wegen $|a_n| \leqq \dfrac{1}{n}$ ist 0 der einzige Häufungspunkt und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kann man wie folgt schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

Die Folge $\left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$ ist eine monoton fallend Nullfolge. Daraus folgt nach Lemma 1.9.5, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe H 41. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz (im Teil (b) in Abhängigkeit vom Parameter $a\in\mathbb{R}^+$).

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} + \frac{n^{12}}{7^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\cosh(2n)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $u_n = 2^{-2n}$. Es ist $\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{1}{4}$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{4} < 1.$$

Nach 1.9.16 konvergiert folglich die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}$.

Sei $v_n = \dfrac{n^{12}}{7^n}$. Es ist $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{7}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{12}$ und daraus folgt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{7} < 1$.

Nach 1.9.13 konvergiert folglich die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{12}}{7^n}$.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} + \frac{n^{12}}{7^n}$ ist also konvergent als Summe von zwei konvergenten Reihen (Satz 1.9.3).

(b) Sei $u_n = \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Es ist $\sqrt[n]{|u_n|} = a + \dfrac{1}{n}$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = a.$$

Nach 1.9.16 konvergiert die Reihe für $a < 1$ und divergiert sie für $a > 1$. Für $a = 1$, erhält man die Folge $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, die gegen e konvergiert und somit keine Nullfolge ist. Darum divergiert die Reihe auch in diesem Fall.

(c) Sei $u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$. Wegen

$$|u_n| = \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}$$

ist die Folge $|u_n|$ monoton fallend mit

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} = 0$$

folgt nach Lemma 1.9.5, dass die Reihe konvergiert.

(d) Es ist $\dfrac{\mathrm{e}^n}{\cosh(2n)} = \dfrac{2\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{2n} + \mathrm{e}^{-2n}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^n} \cdot \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-4n}} < \dfrac{2}{\mathrm{e}^n}$. Die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ konvergiert wegen $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$. Nach 1.9.10 konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\cosh(2n)}$ ebenfalls.

Aufgabe H 42. *Geometrische Reihen*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{-3^{k+1}}{2^{2k}}$ **(b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k}\sqrt{(2\mathrm{e})^k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $a_k = \frac{-3^{k+1}}{2^{2k}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es ist $a_k = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$. Wir haben

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{2} a_k = -3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k + 3 \cdot \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{3}{4}\right)^k .$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{3}{4}$. Nach 1.8.4 haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| = \frac{3}{4} < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ nach 1.5.8. Daraus folgt dass die Reihe konvergiert mit

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{2^{2k}} = -3 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{81}{16}.$$

(b) Sei $a_k = \mathrm{e}^{-k}\sqrt{(2\mathrm{e})^k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es ist $a_k = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}^k$. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}^k$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$. Nach 1.8.4 haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}} < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ nach 1.5.8. Daraus folgt dass die Reihe konvergiert mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}^k = \frac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}}.$$

Aufgabe H 43. *Teleskopreihen*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ **(b)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$. Wir erhalten

$$S_n = \underbrace{\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)}_{k=3} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)}_{k=n} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Insbesondere konvergiert die Reihe.

(b) Sei $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right) = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$. Wir erhalten

$$S_n = \underbrace{\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)}_{k=3} + \cdots +$$

$$\underbrace{\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)}_{k=n} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Es ist $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.
Insbesondere konvergiert die Reihe.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen (wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie / und $*$) dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email (an Ihre studentische Emailadresse) erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0 bis 2 Punkte.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 44. *Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sig}(x) \cdot x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \operatorname{sig}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

(b) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass f im Punkt 0 stetig ist.

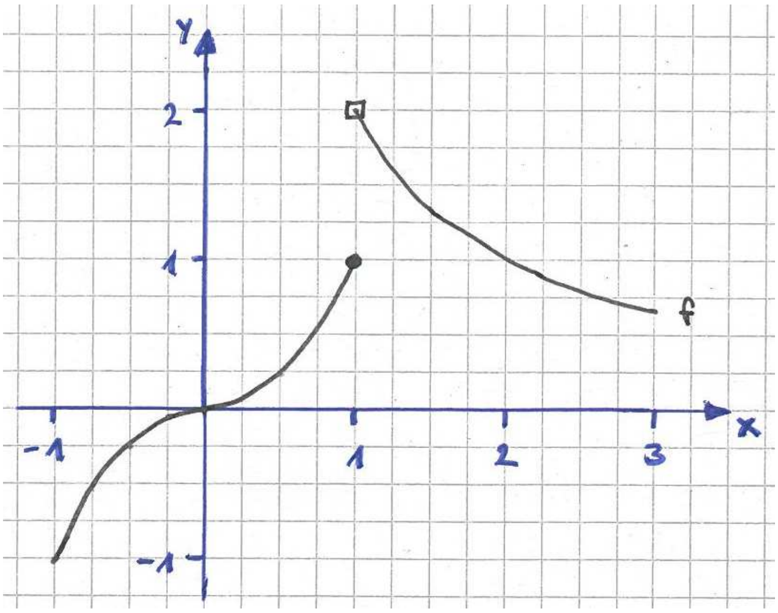
(c) Zeigen Sie, dass f im Punkt 1 unstetig ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in [-1,0) \\ x^2 & \text{für } x \in [0,1] \\ \frac{2}{x} & \text{für } x \in (1,3] \end{cases}.$$

Damit lässt sich f skizzieren:



(b) Da die Funktion stückweise definiert ist, machen wir eine Fallunterscheidung.

Der **erste Fall** betrachtet $0 < \varepsilon \leqq 1$, sodass der Funktionswert der Sprungstelle ($f(1) = 1$; siehe Skizze) nicht in unserem ε-Bereich liegt. Wir geben zwei Lösungsvarianten an:

Variante 1 Mittels Äquivalenzumformungen aus der gewünschten Ungleichung:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| < \varepsilon &\Leftrightarrow |\pm x^2 - 0| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x^2 < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow x \in (-\delta, \delta) \text{ mit } \delta = \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

Hinweis: Hier bei können wir auch aus der Rechnung $\varepsilon \leqq 1$ folgern:
Damit $f(x) = \pm x^2$ gilt, muss $x \in [-1, 1]$ erfüllen, also $\delta \leqq 1$ gelten. Aus $\varepsilon = \delta^2$ folgt nun $\varepsilon \leqq 1$

Variante 2 Man rät ein geschicktes δ aus der Skizze, z.B. wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in (-\delta, \delta)$

$$|f(x) - f(0)| = x^2 < \delta^2 = \varepsilon^2 \leqq \varepsilon \ .$$

Auch hier sehen wir wieder aus der Rechnung, dass $\delta, \varepsilon \leqq 1$ gelten muss.

Nun betrachten wir den **zweiten Fall** $\varepsilon > 1$, sodass der Funktionswert der Sprungstelle in unserem ε-Bereich liegt. Wähle hier $\delta = 1$. Dann gilt für alle $x \in (-\delta, \delta)$

$$|f(x) - f(0)| = x^2 < 1^2 = 1 < \varepsilon \ .$$

Somit existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Nach der ε-δ-Definition ist f folglich stetig in $x_0 = 0$.

(c) Sei die Folge $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ definiert durch $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Dann konvergiert a_n gegen 1 und die Folge $f(a_n) = \dfrac{2}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{2n}{n+1}$ konvergiert gegen $2 \neq f(1) = 1$. Somit ist f unstetig in $x_0 = 1$.

Aufgabe H 45. *Stetigkeit*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter. Wir betrachten die Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1} & \text{für } x < -1 \\[2ex] \dfrac{ax^3+1}{x^2+1} & \text{für } x \geqq -1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2 \mathrm{e}^x}}{b-x} & \text{für } x < b \\[2ex] -\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) & \text{für } x \geqq b \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to-1-0} f(x), \ \lim_{x\to-1+0} f(x), \ \lim_{x\to0-0} g(x), \ \lim_{x\to0+0} g(x)$$

(für die Funktion g in Abhängigkeit vom Parameter b).

(b) Für welche Werte des Parameters a ist f an der Stelle -1 stetig?

(c) Für welche Werte des Parameters b ist g an der Stelle 0 stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1-0} f(x) &= \lim_{x\to-1-0} \frac{\sin(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to-1-0} \frac{\sin(x+1)}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \left(\lim_{t\to0-0} \frac{\sin(t)}{t}\right) \cdot \left(\lim_{x\to-1-0} \frac{1}{x-1}\right) = 1 \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \ , \\ \lim_{x\to-1+0} f(x) &= \lim_{x\to-1+0} \frac{ax^3+1}{x^2+1} = \frac{1-a}{2} \ , \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0-0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to0-0} -\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) = -1 & \text{für } b < 0 \\ \lim_{x\to0-0} \dfrac{\sqrt{b^2\mathrm{e}^x}}{b-x} = \lim_{x\to0-0} 0 = 0 & \text{für } b = 0 \\ \lim_{x\to0-0} \dfrac{\sqrt{b^2\mathrm{e}^x}}{b-x} = 1 & \text{für } b > 0 \end{cases} ,$$

$$\lim_{x\to 0+0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0+0} -\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) = -1 & \text{für } b<0 \\ \lim_{x\to 0+0} -\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) = -1 & \text{für } b=0 \\ \lim_{x\to 0+0} \dfrac{\sqrt{b^2 \mathrm{e}^x}}{b-x} = 1 & \text{für } b>0 \end{cases} .$$

(b) f ist genau dann stetig in -1, wenn $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = f(-1) = \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$ gilt. Nach Aufgabenteil **(a)** und mit $f(-1) = \dfrac{1-a}{2}$ gilt dies genau dann, wenn $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1-a}{2}$, also genau für $a=2$.

(c) g ist genau dann stetig in 0, wenn $\lim\limits_{x\to 0-0} g(x) = g(0) = \lim\limits_{x\to 0+0} g(x)$ gilt. Nach Aufgabenteil **(a)** und mit

$$g(0) = \begin{cases} -1 & \text{für } b \leqq 0 \\ 1 & \text{für } b>0 \end{cases}$$

gilt dies genau für alle $b \neq 0$.

Aufgabe H 46. *Grenzwerte von Funktionen*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\tan(3x)+x^2}{2x}$

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4+5x^2+x^7-1}{x^4-7x^7+x} + x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\cos(x)+2}}{\ln(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-0} \frac{\tan(3x)+x^2}{2x} &= \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2\cos(3x)} + \frac{x}{2} \\ &= \left(\lim_{t\to 0-0} \frac{\sin(t)}{t}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0-0} \frac{3}{2\cos(3x)}\right) + \left(\lim_{x\to 0-0} \frac{x}{2}\right) \\ &= 1\cdot\frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4+5x^2+x^7-1}{x^4-7x^7+x} + x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^5}+1-\frac{1}{x^7}}{\frac{1}{x^3}-7+\frac{1}{x^6}} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^5}+1-\frac{1}{x^7}}{\frac{1}{x^3}-7+\frac{1}{x^6}}\right) + \left(\lim_{t\to 0-0} \frac{\sin(t)}{t}\right) \\ &= -\frac{1}{7}+1 = \frac{6}{7} . \end{aligned}$$

(c) Für $x>1$ gilt $0 < \dfrac{\mathrm{e}^{\cos(x)+2}}{\ln(x)} \leqq \dfrac{\mathrm{e}^3}{\ln(x)}$. Zudem gilt $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^3}{\ln(x)} = 0$. Mit dem Sandwich-Kriterium folgt somit $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\cos(x)+2}}{\ln(x)} = 0$

(d)

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+3x}}{(x^2+x)-(x^2+3x)}$$
$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{-2x}$$
$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{-2\sqrt{x}} = -\infty\,.$$

Aufgabe H 47. *Intervallhalbierungsmethode*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-x/3}+\sin(x)$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

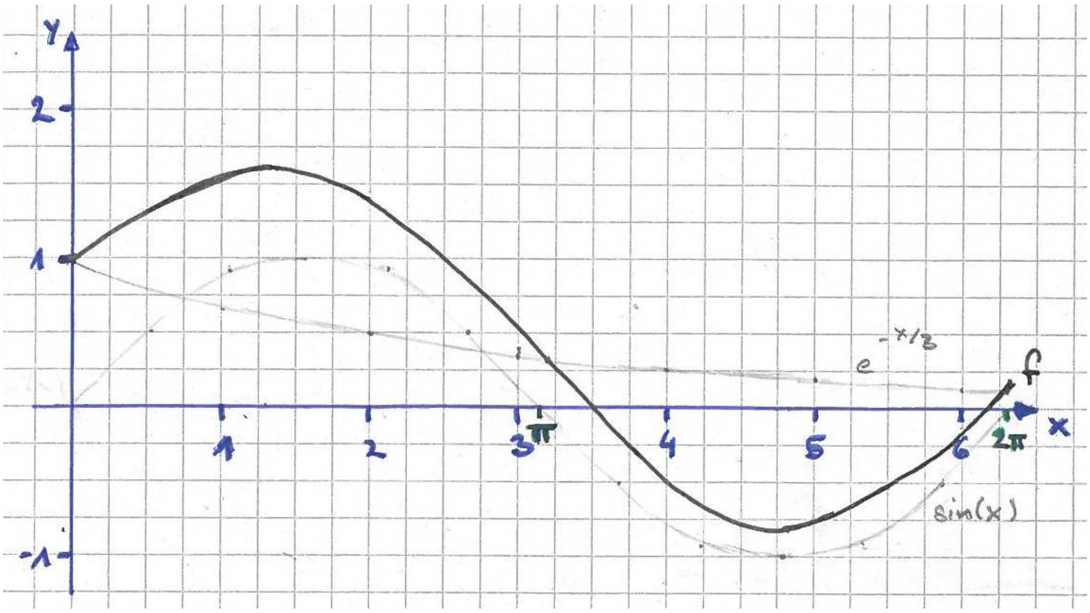
(b) Zeigen Sie, dass f im Intervall $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ genau eine Nullstelle besitzt.

(c) Finden Sie mittels der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall $I=[a,b]$, das diese Nullstelle enthält und $b-a<0{,}4$ erfüllt.

Hinweis: Funktionswerte dürfen mit einem Taschenrechner näherungsweise bestimmt werden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man kann f mittels einer Wertetabelle oder als Summe der (bekannten) Funktionen $x\mapsto \mathrm{e}^{-x/3}$ und $x\mapsto \sin(x)$ einzeichnen:



(b) Die Funktion f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen ebenfalls stetig und es gilt

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\mathrm{e}^{-\pi/6}}_{\geqq 0} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq 1 > 0$$

und

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \underbrace{\mathrm{e}^{-\pi/2}}_{\leqq \mathrm{e}^{-1}} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leqq e^{-1}-1 < 0\,.$$

Nach dem Nullstellensatz von Bolzano existiert somit eine Nullstelle im Intervall $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

Weiterhin ist die Funktion $x\mapsto\sin(x)$ im Intervall $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ streng monoton fallend.

Ebenso die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/3}$, da $x \mapsto \mathrm{e}^x$ streng monoton wächst. Folglich ist f ebenfalls streng monoton fallend und es folgt die Eindeutigkeit der Nullstelle.

(c) Wir setzen $a_1 = \frac{\pi}{2}$ und $b_1 = \frac{3\pi}{2}$. Dann gilt

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f(\pi) = \mathrm{e}^{-\pi/3} + \sin(\pi) = \mathrm{e}^{-\pi/3} > 0\ .$$

Somit setzen wir $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \pi$ und $b_2 = b_1 = \frac{3\pi}{2}$. Es gilt jetzt

$$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \underbrace{\mathrm{e}^{-5\pi/12}}_{<\mathrm{e}^{-1}} + \underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}_{=-\sqrt{2}/2} < \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}}}_{<1/2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0\ .$$

Daher setzen wir $a_3 = a_2 = \pi$ und $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{5\pi}{4}$. Nun gilt

$$f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) = f\left(\frac{9\pi}{8}\right) \approx -0,075 < 0\ .$$

Folglich setzen wir $a_4 = a_3 = \pi$ und $b_4 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{9\pi}{8}$.

Es gilt nun $b_4 - a_4 = \frac{\pi}{8} < \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4$. Das gesuchte Intervall ist daher $\left[\pi, \frac{9\pi}{8}\right]$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 26.4.–2.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 48. *Konvergenz von Potenzreihen*

Schreiben Sie $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit geeigneten $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.
Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius von $f(z)$.
Untersuchen Sie die Potenzreihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz in $z = \mathrm{i}$.

(a) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (5z-\mathrm{i})^{2k}$

(b) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}(\mathrm{i}z+2\mathrm{i}+1)^n$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (5z-\mathrm{i})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5^{2k}(z-\frac{\mathrm{i}}{5})^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = \frac{\mathrm{i}}{5}$ und Koeffizienten

$$a_n = \begin{cases} 5^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 5 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Somit ist $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 5$ und der Konvergenzradius ist $\rho = \frac{1}{5}$.

Wegen $\left|\mathrm{i} - \frac{\mathrm{i}}{5}\right| = \frac{4}{5} > \rho$ ist die Reihe f im Punkt i divergent.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}(\mathrm{i}z+2\mathrm{i}+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{n2^n}(z+2-\mathrm{i})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}(z+2-\mathrm{i})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = -2+\mathrm{i}$ und Koeffizienten

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{(-1)^n}{n2^n} & \text{für } n \neq 0 \end{cases}.$$

Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} & \text{für } n \neq 0 \end{cases}.$$

Somit ist $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$ und der Konvergenzradius ist $\rho = 2$.
Wegen $|\mathrm{i} - (-2+\mathrm{i})| = 2 = \rho$ lässt sich mittels des Konvergenzradius keine Aussage über die Konvergenz treffen. Daher betrachten wir

$$f(\mathrm{i}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}(2\mathrm{i})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} .$$

Diese Reihe ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, jedoch nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe H 49. *Formel von Euler und de Moivre*
Schreiben Sie $f(x)$ jeweils als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f(x) = (\cos(3x))^4 \sin(6x)$

(b) $f(x) = \cos(2x)\,(\sin(x))^2 + (\cos(5x))^3 + (\cos(x))^2 \cos(2x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\cos(3x))^4 \sin(6x) \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}}{2}\right)^4 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}12x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}12x}\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right) \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}18x} + \frac{4}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}12x} + \frac{5}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \frac{5}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x} - \frac{4}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}12x} - \frac{1}{32\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}18x} \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}18x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}18x}\right) + \frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}12x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}12x}\right) + \frac{5}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\sin(18x) + \frac{1}{4}\sin(12x) + \frac{5}{16}\sin(6x) .
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(2x)\,(\sin(x))^2 + (\cos(5x))^3 + (\cos(x))^2\cos(2x) \\
&= \cos(2x)\left((\sin(x))^2 + (\cos(x))^2\right) + (\cos(5x))^3 \\
&= \cos(2x) + (\cos(5x))^3 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{2} + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}15x} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}15x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\right) + \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}15x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}15x}\right) + \frac{3}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x}\right) \\
&= \cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(15x) + \frac{3}{4}\cos(5x) .
\end{aligned}$$

Aufgabe H 50. *Ableitungen*

(a) Sei $a \in (0, +\infty)$. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-a)\ln(x)$$

an der Stelle $x_0 = a$ mittels des Differenzenquotienten.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden reellwertigen Funktionen jeweils ein maximales Intervall auf dem sie durch die gegebenen Terme definiert sind.
Berechnen Sie die Ableitungen mittels der Regeln aus **2.2.1**, **2.2.3** und **2.2.5**:
(i) $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x^2\right)$ **(ii)** $h(x) = (x+5)^x$ **(iii)** $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(x)\cos(x)+1}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\ln(x)-0}{x-a} = \lim_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)\ .$$

(b) **(i)** Die Funktion g ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x^2\right)$. Die Ableitung erhält man mittels Anwendung der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x^2\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(x^2\right) \cdot 2x \\ &= 2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(x^2\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x^2\right)\ . \end{aligned}$$

(ii) Die Funktion h ist definiert auf $(-5, +\infty)$; $h : (-5, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto (x+5)^x = \mathrm{e}^{x\ln(x+5)}$. Die Ableitung erhält man mittels Anwendung der Produkt- und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\mathrm{e}^{x\ln(x+5)} = \mathrm{e}^{x\ln(x+5)} \cdot \left(\ln(x+5) + \frac{x}{x+5}\right) \\ &= (x+5)^x \cdot \left(\frac{x}{x+5} + \ln(x+5)\right)\ . \end{aligned}$$

(iii) Die Funktion j ist definiert auf $[0, +\infty)$; $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(x)\cos(x)+1}$.
Die Ableitung erhält man mittels Anwendung der Produkt- und der Quotientenregel: Hierfür gibt es folgende 2 Varianten:

1. Variante Man bestimmt die Ableitung von j direkt über die angegebene Form.

$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sin(x)\cos(x)+1) + \sqrt{x} \cdot (-\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{(\sin(x)\cos(x)+1)^2} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(x) + 1 - 2x\,(\cos(x))^2 + 2x\,(\sin(x))^2}{2\sqrt{x}\,(\sin(x)\cos(x)+1)^2}\ . \end{aligned}$$

2. Variante Man verwendet zunächst das Additionstheorem $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ und erhält somit die Darstellung $j(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sin(2x)+2}$ für j. Diese leitet man nun ab:

$$j'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(\sin(2x)+2) - 2\sqrt{x}\,(2\cos(2x))}{(\sin(2x)+2)^2} = \frac{\sin(2x) - 4x\cos(2x) + 2}{\sqrt{x}(\sin(2x)+2)^2}$$

Aufgabe H 51. *Kettenregel*

(a) Differenzieren Sie $\left((\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\right)(\exp(\sin(x^3 - 17x^2 + \cos(9x))))$.

(b) Es bezeichnen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktionen $g(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 2$ und $h(x) = x^5 + 2x^3 + x$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Ableitung von $h \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto h(g(x))$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man erhält die Ableitung durch mehrfache Anwendung der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \underbrace{\left((\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\right)}_{=1} \left(\exp\left(\sin\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right)\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \mathrm{e}^{\sin\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\sin\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right)} \cdot \cos\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right) \cdot \left(3x^2 - 34x - \sin(9x) \cdot 9\right) \\
&= \left(3x^2 - 34x - 9\sin(9x)\right) \cdot \cos\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right) \cdot \mathrm{e}^{\sin\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right)} \;.
\end{aligned}
$$

(b) Es gilt $(h \circ g)'(x) = (h' \circ g)(x) \cdot g'(x)$. Somit sind die Nullstellen von $(h \circ g)'$ genau die Nullstellen von $h' \circ g$ und $g'(x)$.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) \;, \\
h'(x) &= 5x^4 + 6x^2 + 1 \;.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $h'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere folgt $(h' \circ g)(x) = h'(g(x)) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also besitzt $h' \circ g$ keine Nullstellen. Für die Nullstellen von g' sehen wir, dass $1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$ und erhalten mittels Polynomdivision und der Mitternachtsformel

$$
\begin{aligned}
4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) &= 4(x-1)\left(x^2 - 2x - 3\right) \\
&= 4(x-1)(x+1)(x-3) \;.
\end{aligned}
$$

Also besitzt g' die Nullstellen $-1, 1$ und 3 und nach Obigem besitzt die Ableitung von $h \circ g$ genau die gleichen Nullstellen.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 3.5.–9.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 52. *Ableitungen*

Sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \arctan(x)\ln(x)$.

(a) Bestimmen Sie die maximale Teilmenge $D \subseteqq \mathbb{R}$, auf der f durch diesen Funktionsterm definiert werden kann.

(b) Wo ist f differenzierbar?

(c) Berechnen Sie f' und f''.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Wurzelfunktion ist auf $[0, +\infty)$ definiert, darum muss $x^2 - 4 \geqq 0$ sein. Diese letzte Funktion ist gleich null für $x = -2$ und $x = 2$ und ist $\geqq 0$, wenn $x \leqq -2$ oder $x \geqq 2$. Darum ist die Verkettung $\sqrt{x^2 - 4}$ auf $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ definiert.

Die Logarithmusfunktion ist auf $(0, +\infty)$ definiert, darum muss $x > 0$ sein.

Der Definitionsbereich von $\arctan$ ist $\mathbb{R}$.

Deswegen ist $D = [2, +\infty)$ die maximale Teilmenge, auf der f durch $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \arctan(x)\ln(x)$ definiert werden kann.

(b) Die Verkettung $\sqrt{x^2 - 4}$ ist auf $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ definiert. Aber, da die Wurzelfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, müssen wir die Punkte herausnehmen, an denen $x^2 - 4$ null ist. Das heißt, die Verkettung $\sqrt{x^2 - 4}$ ist nur auf $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ differenzierbar.

Tatsächlich sind die Logarithmusfunktion und $\arctan$ Funktionen auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar.

Darum ist die Funktion f auf dem Bereich $(2, +\infty)$ differenzierbar.

(c) Die Ableitung von f ist:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4}} + \frac{1}{1 + x^2} \cdot \ln(x) + \arctan(x) \cdot \frac{1}{x} \\
&= x(x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\ln(x)}{1 + x^2} + \frac{\arctan(x)}{x}.
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung von f ist:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{2} \cdot 2x(x^2 - 4)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{x} \cdot (1 + x^2) - \ln(x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} + \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} \\
&= (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2 - 4)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x(1 + x^2)} \\
&\quad - \frac{\ln(x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} + \frac{1}{x(1 + x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2} \\
&= -4(x^2 - 4)^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{x(1 + x^2)} - \frac{\ln(x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} - \frac{\arctan(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 53. *Ableitungen einer Funktionsschar*

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + d}$ mit $d > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von h.

(b) Bestimmen Sie das Verhalten von h und h' für x gegen $\pm\infty$.

(c) Bestimmen Sie für h' die Bereiche mit positiven bzw. negativen Funktionswerten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ableitung von f ergibt sich mittels der Quotientenregel:

$$h'(x) = \frac{(4x+1)\cdot(x^2+d) - (2x^2+x)\cdot 2x}{(x^2+d)^2} = \frac{-x^2+4dx+d}{(x^2+d)^2} \ .$$

(b) Es ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{d}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} h'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{4d}{x}+\frac{d}{x^2}}{\left(1+\frac{d}{x^2}\right)^2} = 0 \ .$$

(c) Zunächst bestimmen wir die Nullstellen von h' mit der Mitternachtsformel:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4dx + d \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-4d \pm \sqrt{(4d)^2 + 4d}}{-2} = 2d \mp \sqrt{4d^2+d} \ .$$

Wegen $d > 0$ ist die Diskriminante positiv$\big(4d^2 + d > 0\big)$ und somit besitzt h' immer zwei verschiedene Nullstellen. Zudem ist der Nenner von h' immer positiv $\big(x^2+d > 0$, also $(x^2+d)^2 > 0\big)$. Da $(x^2+d)^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^2+4dx+d = -\infty$, gilt, besitzt h' auf den Intervallen $(-\infty, 2d - \sqrt{4d^2+d})$ und $(2d + \sqrt{4d^2+d}, +\infty)$ negative Funktionswerte und auf dem Intervall $(2d-\sqrt{4d^2+d}, 2d+\sqrt{4d^2+d})$ positive Funktionswerte.

Bemerkung: Als alternative Begründung zur Grenzwertbetrachtung kann hierfür auch verwendet werden, dass der Zähler von h' eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Aufgabe H 54. *Differenzierbarkeit und Tangente*

Sei $(m,p) \in \mathbb{R}^2$ ein Parameterpaar mit $p \in (-2,2)$.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + m & \text{für } x \leqq 0 \\ \dfrac{2}{x^2+px+1} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $(m,p) \in \{(1,0), (0,-1)\}$.

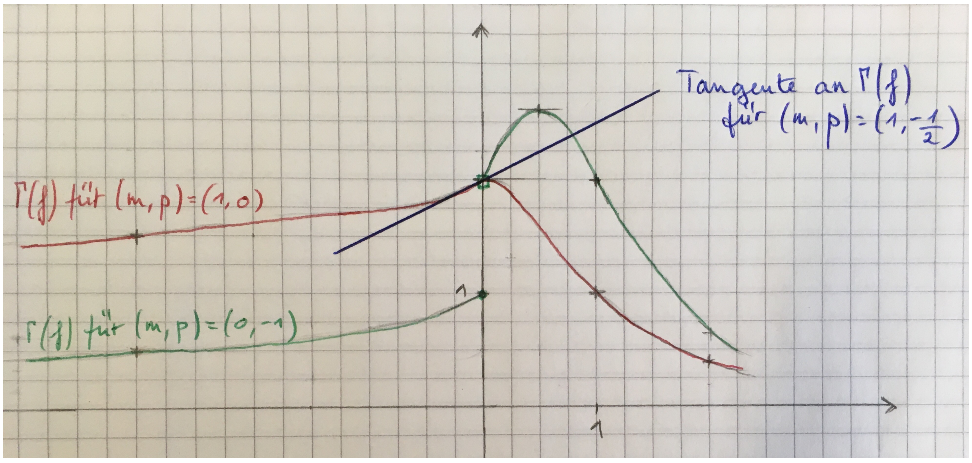
(b) Für welche Parameterpaare (m,p) ist f an der Stelle 0 stetig?

(c) Für welche Parameterpaare (m,p) ist f an der Stelle 0 differenzierbar?

(d) Bestimmen Sie für den in **(c)** bestimmten Wert von (m,p) die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0. Skizzieren Sie diese Tangente an den Graphen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hier sind die Skizze.



(b) Auf $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ ist f durch die Verknüpfung von Funktionen definiert, die auf ihrem gesamten Definitionsbereich auch stetig sind. Deswegen ist die Funktion f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig. Wir berechnen dann die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f an der Stelle 0:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + m = 1 + m = f(0)$$

und

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{2}{x^2+px+1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Die Funktion f ist an der Stelle 0 stetig nur wenn beide Grenzwerte den gleichen Wert $f(0)$ haben, das heißt, nur für $m = 1$ ist f auch an der Stelle 0 stetig.

(c) Die erste Bedingung an die Funktion f um an der Stelle 0 differenzierbar zu sein ist, dass sie an der Stelle 0 stetig ist. Folglich muss $m = 1$ gelten. Dann ist die Funktion f an der Stelle 0 differenzierbar wenn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten an der Stelle 0 existieren und dieselben sind. So berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1 - 2}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x}{x\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0-0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{2}{x^2+px+1} - 2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0+0} \frac{-2x^2-2px}{x(x^2+px+1)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-2x-2p}{x^2+px+1} = -2p.\end{aligned}$$

Das heißt, f ist an der Stelle 0 differenzierbar, falls $m = 1$ und $p = -\dfrac{1}{4}$ gilt.

(d) Die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0 ist dann $y = f'(0)\cdot(x-0) + f(0)$, das heißt

$$y = \frac{x}{2} + 2.$$

Aufgabe H 55. *Ableitung der Umkehrfunktion*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (\cosh(x))^{\sin(x)}$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wächst und bestimmen Sie damit ein Intervall $I \subseteqq \mathbb{R}$ so, dass $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to I$ bijektiv ist.

(c) Nach Aufgabenteil **(b)** gibt es eine Umkehrfunktion $f^{-1} : I \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zu f. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangenten an den Graphen von f^{-1} im Punkt $\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right)$.

Gibt es eine Tangente an den Graphen von f^{-1} im Punkt $(1, 0)$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zur Bestimmung der Ableitung schreiben wir f als natrürliche Exponentialfunktion und wenden die Ketten und die Produktregel an:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \mathrm{e}^{\sin(x)\ln(\cosh(x))} = \mathrm{e}^{\sin(x)\ln(\cosh(x))} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(\cosh(x)) + \sin(x) \cdot \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) \\ &= \left(\cos(x)\ln(\cosh(x)) + \frac{\sin(x)\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) (\cosh(x))^{\sin(x)} . \end{aligned}$$

(b) Zum Nachweis der Monotonie gibt es zwei Lösungsvarianten:

1. Variante Wir verwenden die Ableitung f' und zeigen, dass diese immer positiv ist (außer eventuell in den Randpunkten 0 und $\frac{\pi}{2}$: Sei $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dann gilt $\cos(x) > 0$, $\cosh(x) > 1$, $\sin(x) > 0$, $\sinh(x) > 0$ und es folgt

$$f'(x) = \left(\underbrace{\cos(x)}_{>0}\underbrace{\ln(\cosh(x))}_{>0} + \underbrace{\frac{\sin(x)\sinh(x)}{\cosh(x)}}_{>0}\right)\underbrace{(\cosh(x))^{\sin(x)}}_{>0} > 0$$

Somit ist f streng monoton wachsend.

2. Variante Wir verwenden die Definition von streng monoton wachsend: Seien $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $a < b$. Dann gilt $1 \leqq \cosh(a) < \cosh(b)$ und $0 \leqq \sin(a) < \sin(b)$, da $\cosh(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ und $\cosh$ und $\sin$ auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsen. Damit folgt

$$(\cosh(a))^{\sin(a)} \overset{(1)}{\leqq} (\cosh(b))^{\sin(a)} \overset{(2)}{<} (\cosh(b))^{\sin(b)} .$$

Dabei gilt in (1) Gleichheit genau dann, wenn $a = 0$ ist. In (2) ist keine Gleichheit möglich, da $\cosh(b) > 1$ gilt. Somit haben wir die strenge Monotonie von f nachgewiesen.

Nun gilt $f(0) = 1$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Somit ist $I = \left[1, \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ das gesuchte Intervall.

(c) Es ist $(f^{-1})'\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ die Steigung der Tangenten. Diese berechnen wir mittels Satz 2.3.1. Weiter ist $f^{-1}\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$ und

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0 + \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

und damit

$$f^{-1}\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\ .$$

Damit erhalten wir die Tangente

$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(x - \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot x + \frac{\pi}{2} - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\ .$$

Es ist $f^{-1}(1) = 0$ und $f'(0) = 0$. Somit lässt sich die Ableitung von f^{-1} an der Stelle 1 nicht mit Satz 2.3.1 bestimmen. Genauer ist f^{-1} in 1 nicht differenzierbar und hat eine senkrechte Tangente (es gilt $\lim\limits_{x\to 1}\left|(f^{-1})'(x)\right| = +\infty$). Diese senkrechte Tangente wird durch die Gleichung $x = 1$ beschrieben.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 10.5.–16.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 56. *Die Regel von l'Hospital*

Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin(x)\cos(x)}{x^3 \mathrm{e}^{-x}}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{ax^2 + \ln(x)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} x - \sin(x)\cos(x) = \lim_{x\to 0} x^3 \mathrm{e}^{-x} = 0,$$

also können wir die Regel von l'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{x^3 \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{(3x^2 - x^3)\mathrm{e}^{-x}}$$

falls der rechte Limes existiert. (Wir benützen hier $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ für die Ableitung.)

Im Folgenden benützen wir noch zweimal die Regel von l'Hospital (in beiden Schritten haben wir ein Problem der Form „$\frac{0}{0}$“) und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2\mathrm{e}^{-x} - x^3\mathrm{e}^{-x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)}{(6x - 6x^2 + x^3)\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(2x)}{(6 - 18x + 9x^2 - x^3)\mathrm{e}^{-x}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Beobachtung: man kann auch bemerken, dass $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = 1$. Dann kann man dasselben Gedankengang wie oben machen aber nur für $\dfrac{x - \sin(x)\cos(x)}{x^3}$ und die Ableitungen werden einfacher.

(b) Man beobachtet zuerst, dass, für $x \neq 0$, gilt

$$\frac{x^2}{ax^2 + \ln(x)} = \frac{1}{a + \frac{\ln(x)}{x^2}}.$$

Man kann dann die Regel von l'Hospital für den Term $\frac{\ln(x)}{x^2}$ benutzen, da $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Man erhält

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

und daraus folgt, dass $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{ax^2+\ln(x)} = \frac{1}{a}$ wenn $a \neq 0$.

Für $a = 0$ sieht man sofort, dass $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{ax^2+\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$ (da $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ und $\frac{\ln(x)}{x^2} > 0$ für $x > 1$).

Aufgabe H 57. *Mehr Grenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x(1-\mathrm{e}^x)}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man benutzt hier zweimal nacheinander die Regel von l'Hospital (in beiden Schritten haben wir ein Problem der Form „$\frac{0}{0}$"). Wir erhalten

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x(1-\mathrm{e}^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{1-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{-(2+x)\mathrm{e}^x} = -1.$$

Beobachtung: man kann auch bemerken, dass $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Dann braucht man nur einmal die Regel von l'Hospital um $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{1-\mathrm{e}^x}$ zu erklären.

(b) Es gilt

$$\frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)} = \frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}}.$$

Aus dem Sandwichsatz folgt $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0$. Wir erhalten dann

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Beachten Sie, dass die Regel von l'Hospital hier nicht gilt, da $\lim_{x\to+\infty} 1-\sin(x)$ und $\lim_{x\to+\infty} 1+\sin(x)$ nicht existieren.

Aufgabe H 58. *Taylorpolynome*

Wir betrachten die durch $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3$ gegebene Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Skizzieren Sie alle im Folgenden verlangten Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

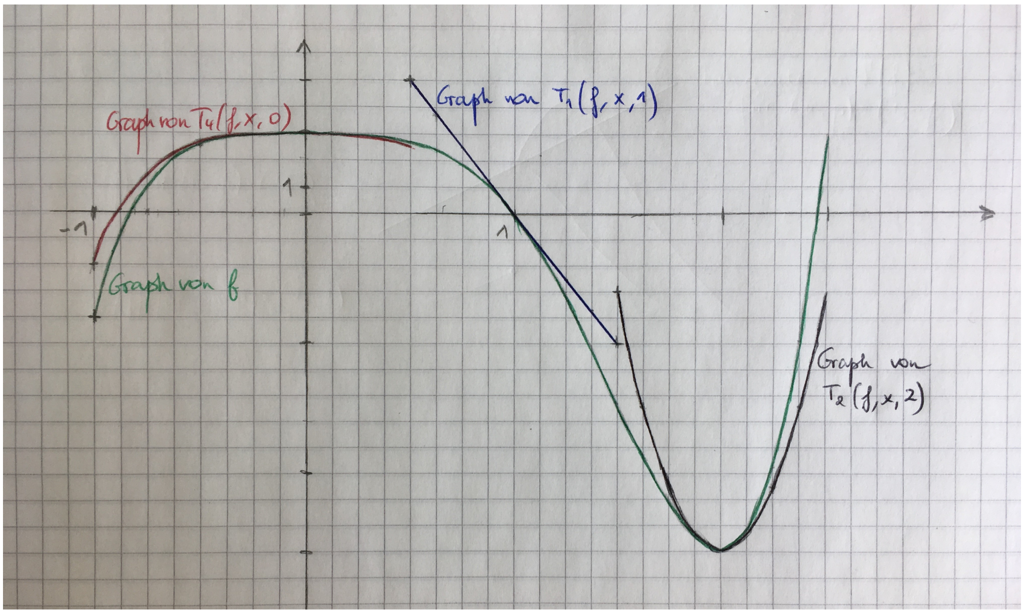
(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f^{(j)}(x)$ für $j\in\{0,1,2,3,4\}$ und skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f,x,0)$ und skizzieren Sie den Graphen von $T_4(f,x,0)$ auf dem Intervall $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_1(f,x,1)$ und skizzieren Sie den Graphen von $T_1(f,x,1)$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,2)$ und skizzieren Sie den Graphen von $T_2(f,x,2)$ auf dem Intervall $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

Lösungshinweise hierzu: Hier sind die Skizzen.



(a) Die vier ersten Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^5 - 5x^4 + 3, \\ f'(x) &= 10x^4 - 20x^3, \\ f''(x) &= 40x^3 - 60x^2, \\ f^{(3)}(x) &= 120x^2 - 120x, \\ f^{(4)}(x) &= 240x - 120. \end{aligned}$$

(b) $T_4(f,x,0) = 3 - \frac{120}{4!}x^4 = 3 - 5x^4$.

(c) $T_1(f,x,1) = -10(x-1)$.

(d) $T_2(f,x,2) = -13 + \frac{80}{2}(x-2)^2 = -13 + 40(x-2)^2$.

Aufgabe H 59. *Taylorreihen*

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)\cos(x)$$

(a) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f und g.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihen $T(f,x,1)$ und $T(g,x,0)$.

(c) Weisen Sie mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange die Übereinstimmung von $T(g,x,0)$ und $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ nach.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die ersten Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{x+1}, \\ f'(x) &= 2(x+1)^{-2}, \\ f''(x) &= -2 \times 2(x+1)^{-3}. \end{aligned}$$

Die n-te Ableitung, für $n \geqq 1$, ist

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} 2 \cdot n!(x+1)^{-n-1}.$$

Das gilt für $n = 1$, und der allgemeine Fall folgt durch Induktion da

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= f^{(n)\prime}(x) \\ &= (-1)^{n+1} 2 \cdot n! \cdot (-n-1) \cdot (x+1)^{-n-1-1} \\ &= (-1)^{n+2} 2 \cdot (n+1)!(x+1)^{-n-2}. \end{aligned}$$

Die ersten Ableitungen von $g(x) = \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ sind

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x), \\ g'(x) &= \cos(2x), \\ g''(x) &= -2\sin(2x), \end{aligned}$$

und wir berechnen, wieder durch Induktion, dass die n-te Ableitung gegeben ist durch

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \cos(2x), & n \text{ ungerade}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \sin(2x), & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Tatsächlich, falls n ungerade ist, ist $n+1$ gerade und es gilt

$$g^{(n+1)}(x) = g^{(n)\prime}(x) = -2 \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin(2x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^n \sin(2x)$$

und, falls n gerade ist, ist $n+1$ ungerade und es gilt

$$g^{(n+1)}(x) = g^{(n)\prime}(x) = 2 \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \cos(2x) = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \cos(2x).$$

(b) Wir haben $f(1) = 0$ und

$$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n+1} 2 \cdot n!}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2^n}$$

für $n \geqq 1$. Es folgt

$$T(f, x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{2^n \cdot n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(x-1)^n.$$

Für n gerade gilt $g^{(n)}(0) = 0$, und für $n = 2k+1$ ungerade erhalten wir

$$g^{(2k+1)}(0) = (-1)^k 2^{2k}.$$

Es folgt

$$T(g, x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(c) Das Restglied lautet

$$R_n(g, x, 0) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$. Da $|\cos(2\xi)| \leqq 1$ und $|\sin(2\xi)| \leqq 1$ erhalten wir

$$|R_n(g, x, 0)| \leqq \frac{2^n |x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|2x|^{n+1}}{2 \cdot (n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(siehe Beispiel 1.5.9) für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(g, x, 0) = g(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 60. *Unbestimmte Integrale*
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\int x \cos(2x) \,\mathrm{d}\, x$ **(b)** $\int 6x^8 \mathrm{e}^{x^3} \,\mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Hilfe partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int x \cos(2x) \,\mathrm{d}\, x &= \left[\frac{1}{2} x \sin(2x)\right] - \int \frac{1}{2} \sin(2x) \,\mathrm{d}\, x \\ &= \left[\frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x)\right].\end{aligned}$$

(b) Wir substituieren $u = x^3$, also ist $\mathrm{d}\, u = 3x^2 \,\mathrm{d}\, x$ und

$$\int 6x^8 \mathrm{e}^{x^3} \,\mathrm{d}\, x = \int 2u^2 \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}\, u.$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int 2u^2 \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}\, u &= \left[2u^2 \mathrm{e}^u\right] - \int 4u\mathrm{e}^u \,\mathrm{d}\, u \\ &= \left[2u^2 \mathrm{e}^u - 4u\mathrm{e}^u\right] + \int 4\mathrm{e}^u \,\mathrm{d}\, u \\ &= \left[(2u^2 - 4u + 4)\mathrm{e}^u\right].\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int 6x^8 \mathrm{e}^{x^3} \,\mathrm{d}\, x = \left[(2x^6 - 4x^3 + 4)\mathrm{e}^{x^3}\right].$$

Aufgabe H 61. *Partielle Integration*
Sei

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^n \,\mathrm{d}\, x.$$

Drücken Sie I_n durch I_{n-2} aus und berechnen Sie I_6 und I_7.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben $(\cos(x))^n = \cos(x)\,(\cos(x))^{n-1}$. Durch partielle Integration erhält man:

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[\sin(x)\,(\cos(x))^{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin(x)(-\sin(x))\,(\cos(x))^{n-2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(x))\,(\cos(x))^{n-2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} (\cos(x))^{n-2}\,\mathrm{d}\,x - (n-1)\int_0^{\pi/2} (\cos(x))^{n}\,\mathrm{d}\,x \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Es folgt $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(b) Wir berechnen

$$I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{3}I_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

und

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}.$$

Es folgt

$$I_6 = \frac{5\pi}{32}.$$

Ähnlich ist

$$I_7 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

und

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

Es folgt

$$I_7 = \frac{16}{35}.$$

Aufgabe H 62. *Extrema und Wendepunkte*

Wie betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 15\,x^2\,(x^2-4)$.

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f, die an der Stelle 1 gleich -17 ist.
Bestimmen Sie die Nullstellen von F.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von F.
Bestimmen Sie die Wendepunkte von F.

(c) Für jeden der in **(b)** bestimmten Extremal- und Wendepunkte, bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von F an diesem Punkt.

(d) Skizzieren Sie den Graph von F und die in **(c)** bestimmten Tangenten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Stammfunktionen von f sind durch das Integral

$$\int 15x^2(x^2-4)\,\mathrm{d}\,x = 3x^5 - 20x^3 + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

gegeben. Dann ist

$$-17 = F(1) = -17 + c,$$

also ist $c = 0$. Die gesuchte Stammfunktion ist dann $F(x) = 3x^5 - 20x^3$.

Die Nullstellen von $F(x) = x^3(3x^2 - 20)$ sind 0, $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ und $-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

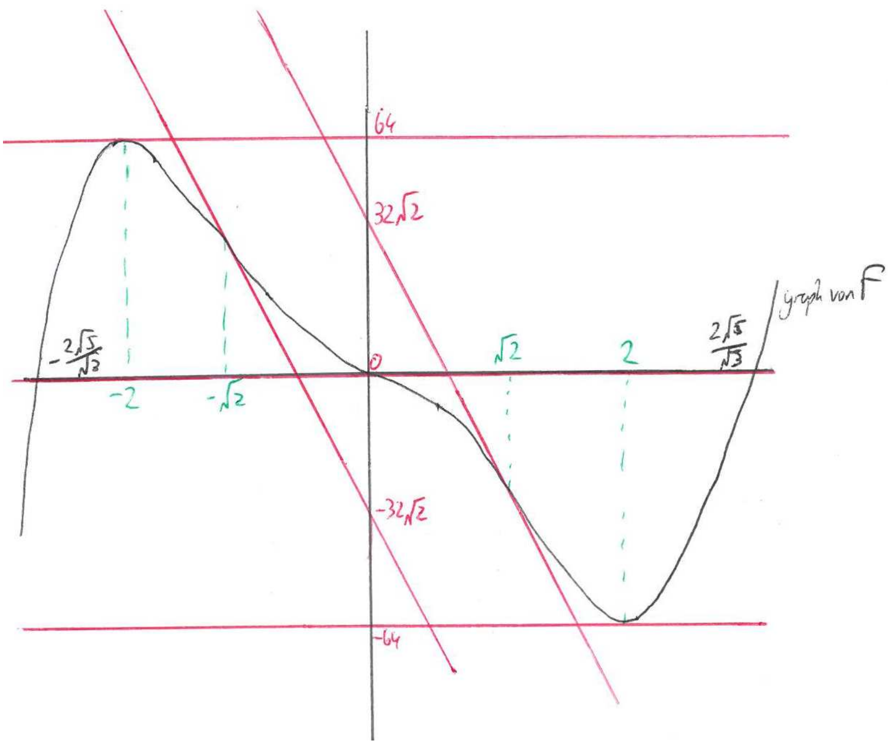
(b) Die Nullstellen von $F' = f$ sind 0, 2 und -2. An der Stelle $x = 0$ ist $F' = f$ negativ, also ist diese Stelle keine Extremstelle. Das Vorzeichen von F' ändert sich an den Stellen 2 und -2, also sind diese Stellen die Extremstellen von F. Die lokalen Extrema sind dann $(2, -64)$ und $(-2, 64)$.

Die Wendepunkte von F sind die Nullstellen von $F''(x) = f'(x) = 60x^3 - 120x$, also 0, $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

(c) Die Tangente an den Graphen von F an der Stelle $x = a$ ist durch $y = F(a) + F'(a)(x-a)$ gegeben. Also haben wir

$$\begin{aligned}
\text{an } 0: &\quad y = 0,\\
\text{an } 2: &\quad y = -64,\\
\text{an } -2: &\quad y = 64,\\
\text{an } \sqrt{2}: &\quad y = -28\sqrt{2} - 60(x - \sqrt{2}) = 32\sqrt{2} - 60x,\\
\text{an } -\sqrt{2}: &\quad y = 28\sqrt{2} - 60(x + \sqrt{2}) = -32\sqrt{2} - 60x.
\end{aligned}$$

(d) Hier die Skizze:



Aufgabe H 63. *Partielle Integration, Substitution*
Wie betrachten die folgende Funktion.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)(\sin(x))^2$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution eine Stammfunktion von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von f.

(c) Überprüfen Sie, ob

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{1}{6}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{3}(\sin(x))^2 + 5$$

auch eine Stammfunktion von f ist.

(d) Sei F die Stammfunktion von f, die an der Stelle 0 gleich 0 ist. Finden Sie eine lokale Extremstelle von F.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir substituieren $u = \sin(x)$, also ist $\mathrm{d}\,u = \cos(x)\,\mathrm{d}\,x$. Es folgt

$$\int \cos(x)(\sin(x))^2\,\mathrm{d}\,x = \int u^2\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{1}{3}u^3\right] = \left[\frac{1}{3}(\sin(x))^3\right],$$

also ist $\frac{1}{3}(\sin(x))^3$ eine Stammfunktion von f.

(b) Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int \cos(x)(\sin(x))^2\,\mathrm{d}\,x &= \left[(\sin(x))^3\right] - \int \sin(x)\cdot 2\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[(\sin(x))^3\right] - 2\int \cos(x)(\sin(x))^2\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

Es folgt

$$3\int \cos(x)(\sin(x))^2\,\mathrm{d}\,x = \left[(\sin(x))^3\right],$$

also ist $\frac{1}{3}(\sin(x))^3$ eine Stammfunktion von f.

(c) Beachten Sie, dass $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned}g(x) &= -\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}(\sin(x))^2 + \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{3}(\sin(x))^2 + 5 \\ &= -\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{31}{6}.\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$g'(x) = -\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(x).$$

Mit Hilfe der Formeln von de Moivre und Euler erhalten wir

$$\begin{aligned}f(x) = \cos(x)(\sin(x))^2 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})}{-8} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{-8} \\ &= -\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(x) \\ &= g'(x).\end{aligned}$$

Also ist g eine Stammfunktion von f.

(d) Eine allgemeine Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = \frac{1}{3}(\sin(x))^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$. Weil unsere gesuchte Stammfunktion

$$0 = \frac{1}{3}(\sin(0))^3 + c = c$$

erfüllt, gilt $F(x) = \frac{1}{3}(\sin(x))^3$.

Die Extremstellen von F sind die Nullstellen von $F' = f$, an denen sich das Vorzeichen von F' ändert. Wir berechnen

$$0 = f(x) = \cos(x)(\sin(x))^2 \iff x \in \left\{ \frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

d.h. die Nullstellen von f sind die von $\cos(x)$ bzw. $\sin(x)$. An den Nullstellen von $\sin(x)$ ändert sich das Vorzeichen von F' nicht, aber das Vorzeichen von F' ändert sich an den Nullstellen von $\cos(x)$. Darum sind die Extremstelle von F

$$\left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 64. *Partialbruchzerlegung und Integration*

Sei

$$f(x) = \frac{x^5 + 11x^3 + 2x^2 + 17x - 21}{x^3 - x^2 + 9x - 9}.$$

(a) Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von f aus (notfalls nach Polynomdivision mit Rest).

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Erst führt man die Polynomdivision durch:

$$\begin{aligned} x^5 + 11x^3 + 2x^2 + 17x - 21 &= x^2(x^3 - x^2 + 9x - 9) + x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 17x - 21 \\ &= (x^2 + x)(x^3 - x^2 + 9x - 9) + 3x^3 + 2x^2 + 26x - 21 \\ &= (x^2 + x + 3)(x^3 - x^2 + 9x - 9) + 5x^2 - x + 6. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$f(x) = x^2 + x + 3 + \frac{5x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 9x - 9}.$$

Da $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$ sieht die reelle Partialbruchzerlegung wie folgt aus

$$\frac{5x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 9x - 9} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 9}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Also gilt

$$5x^2 - x + 6 = a(x^2 + 9) + (bx + c)(x - 1).$$

Für $x = 1$ erhalten wir

$$10 = 10a,$$

d.h. $a = 1$. Für $x = 0$ erhalten wir

$$6 = 9a - c = 9 - c,$$

d.h. $c = 3$. Schließlich setzen wir $x = -1$ (zum Beispiel) und erhalten

$$12 = 10a + 2b - 2c = 4 + 2b.$$

Daraus folgt $b = 4$ und

$$f(x) = x^2 + x + 3 + \frac{1}{x - 1} + \frac{4x + 3}{x^2 + 9}.$$

Beachten Sie, dass man auch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ -b + c &= -1 \\ 9a - c &= 6 \end{aligned}$$

lösen kann, um die Konstanten a, b und c zu bestimmen.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int x^2+x+3+\frac{1}{x-1}+\frac{4x+3}{x^2+9}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+\int \frac{4x}{x^2+9}+\frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+\int 2\cdot\frac{2x}{x^2+9}+\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+2\ln|x^2+9|+\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c,\end{aligned}$$

mit $c\in\mathbb{R}$. Also ist

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x-1|+2\ln(x^2+9)+\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

eine Stammfunktion von f. (Merken Sie, dass x^2+9 immer positiv ist.)

Aufgabe H 65. *Partialbruchzerlegung und Integration*
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x-10}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}\,x.$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen erst die reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^2}{(x-2)^3}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{c}{(x-2)^3}.$$

Also gilt

$$x^2=a(x-2)^2+b(x-2)+c.$$

Für $x=2$ erhalten wir $4=c$. Damit ergibt sich

$$x^2=ax^2+(b-4a)x+(4a-2b+4).$$

Es folgt $a=1$ und $4a-2b+4=0$, also $b=4$ und wir erhalten

$$\frac{x^2}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^3}.$$

Das Integral ist dann

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}\right].\end{aligned}$$

(b) Wir führen erst die reelle Partialbruchzerlegung durch. Da $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$ gilt, verwenden wir den folgenden Ansatz:

$$\frac{x-10}{x^2+x-12}=\frac{a}{x+4}+\frac{b}{x-3}.$$

Also gilt

$$x-10=a(x-3)+b(x+4).$$

Für $x=-4$ erhalten wir

$$-14=-7a,$$

d.h. $a=2$, und für $x=3$ erhalten wir

$$-7=7b,$$

d.h. $b=-1$. Das Integral ist dann

$$\begin{aligned}\int \frac{x-10}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2}{x+4}-\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[2\ln|x+4|-\ln|x-3|\right].\end{aligned}$$

Aufgabe H 66. *Obersumme und Untersumme*

Sei $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\dfrac{8-x^3}{1+x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung der Ableitung f' und finden Sie das Maximum von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Wir betrachten die Partition $Q=\left\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}$ des Intervalls $[-1,1]$.
Stellen Sie die Obersumme $\overline{S}(f,Q)$ graphisch als Flächeninhalt dar.
Berechnen Sie $\underline{S}(f,Q)$ und $\overline{S}(f,Q)$.

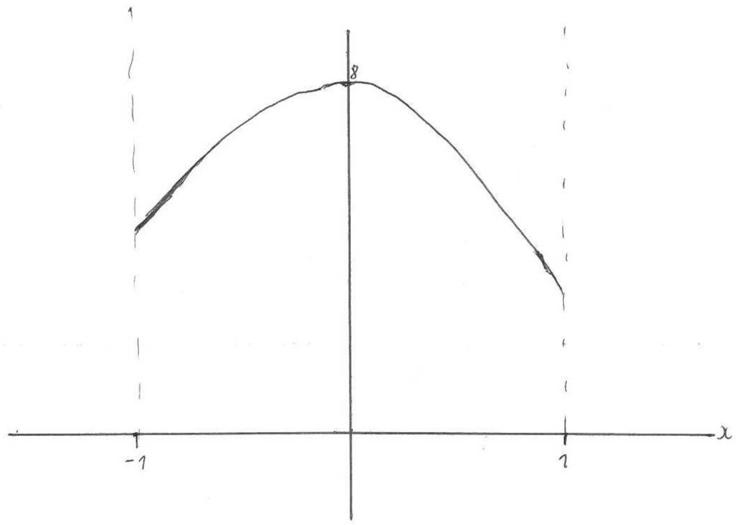
(d) Schließen Sie daraus eine obere und eine untere Schranke für den Wert von π.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-3x^2\cdot(1+x)^2-(8-x^3)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\\ &=\frac{-x^4-3x^2-16x}{(1+x^2)^2}\\ &=\frac{-x(x^3+3x+16)}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Auf $[-1,1]$ ist $(1+x^2)^2>0$ und $x^3+3x+16\geqq(-1)^3+3(-1)+16=12>0$. Also ist die Vorzeichenverteilung von f' gleich wie die von $-x$, d.h. $f'(x)>0$ für $x<0$, $f'(0)=0$, und $f'(x)<0$ für $x>0$. Daraus folgt, dass das Maximum von f ist $f(0)=8$. Hier die Skizze:



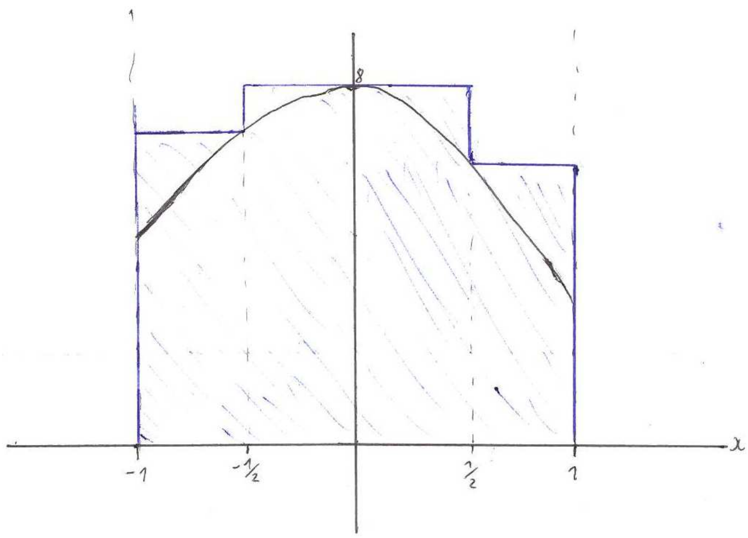
(b) Polynomdivision gibt

$$-x^3+8 = -x(x^2+1)+x+8,$$

also ist

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{8-x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{-1}^{1} -x+\frac{x+8}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1}^{1} -x+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+8\cdot\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+8\arctan(x)\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)+8\arctan(1)\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)+8\arctan(-1)\right) \\
&= 8\arctan(1)-8\arctan(-1) \\
&= 8\cdot\frac{\pi}{4}-8\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

(c) $\overline{S}(f,Q)$ ist die folgende Flächeninhalt



Wir berechnen

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,Q) &= \left(-\frac{1}{2}+1\right) f(-1) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) f(1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2} + 1\cdot\frac{63}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\\ &= \frac{103}{10}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,Q) &= \left(-\frac{1}{2}+1\right) f\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) f(0) + \left(1-\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2} + 1\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot\frac{63}{10}\\ &= \frac{72}{5}.\end{aligned}$$

(d) Wir haben

$$\underline{S}(f,Q) = \frac{103}{10} \leqq \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 4\pi \leqq \frac{72}{5} = \overline{S}(f,Q),$$

also ist

$$2{,}575 = \frac{103}{40} \leqq \pi \leqq \frac{18}{5} = 3{,}6.$$

Aufgabe H 67. *Integrale und Flächeninhalte*

Die Funktionen $f, g, h\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) = 2\,, \qquad g(x) = |3-x| \qquad \text{und} \qquad h(x) = \sqrt{|x-1|}.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen dieser Funktionen.

(b) Skizzieren Sie die Graphen.

(c) Skizzieren Sie die Fläche, die von den Graphen von f und g, von der Geraden $x = 2$ und von der Geraden $x = 4$ eingeschlossen wird.

Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. Begründen Sie das Resultat durch eine geometrische Überlegung.

(d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des krummlinig berandeten Vielecks, das von den Graphen von g und h und von der y-Achse eingeschlossen wird.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Beachten Sie, dass

$$g(x) = \begin{cases} 3-x, & x\in[0,3],\\ x-3, & x\in[3,5],\end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\in[0,1],\\ \sqrt{x-1}, & x\in[1,5].\end{cases}$$

Wir vergleichen f und g. Auf $[0,3]$ ist $f(x) = 2$ und $g(x) = 3-x$, und

$$3-x = 2 \iff x = 1.$$

Auf $[3,5]$ ist $f(x) = 2$ und $g(x) = x-3$, und

$$x-3 = 2 \iff x = 5.$$

Also finden wir die Schnittpunkte $(1,2)$ und $(5,2)$ zwischen $\Gamma(f)$ und $\Gamma(g)$.
Jetzt vergleichen wir f und h. Auf $[0,1]$ ist $f(x)=2$ und $h(x)=\sqrt{1-x}$, und

$$\sqrt{1-x}=2 \iff 1-x=4 \iff x=-3,$$

was unmöglich ist ($-3\notin[0,1]$). Auf $[1,5]$ ist $f(x)=2$ und $h(x)=\sqrt{x-1}$, und

$$\sqrt{x-1}=2 \iff x-1=4 \iff x=5.$$

Also finden wir nur den Schnittpunkt $(5,2)$ zwischen $\Gamma(f)$ und $\Gamma(h)$.
Schließlich vergleichen wir g und h. Auf $[0,1]$ ist $g(x)=3-x$ und $h(x)=\sqrt{1-x}$, und

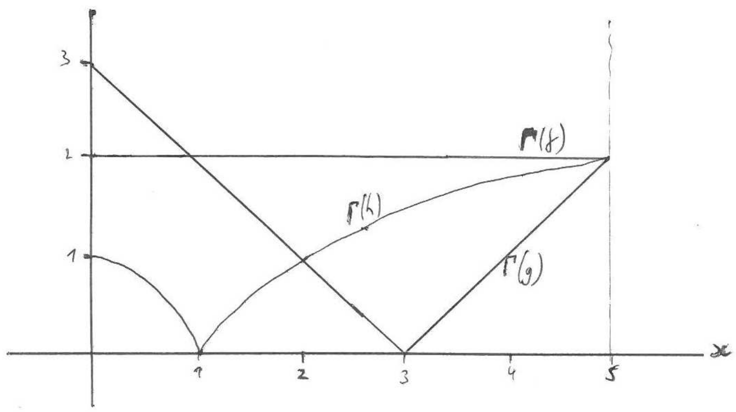
$$\sqrt{1-x}=3-x \iff 1-x=9-6x+x^2 \iff x^2-5x+8=0.$$

Die Diskriminante dieses Polynoms ist -7, also gibt es keine reelle Lösung. Auf $[1,5]$ ist $g(x)=|3-x|$ und $h(x)=\sqrt{x-1}$, und

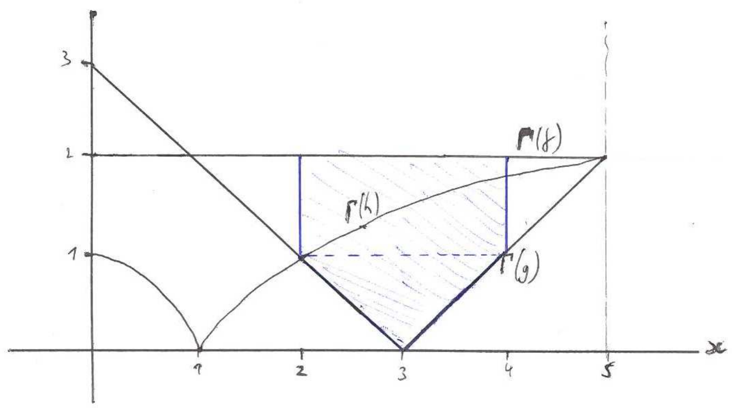
$$\sqrt{x-1}=|3-x| \iff x-1=9-6x+x^2 \iff x^2-7x+10=0,$$

also erhalten wir die Lösungen $x=2$ und $x=5$. Wir erhalten dann die Schnittpunkte $(2,1)$ und $(5,2)$ zwischen $\Gamma(g)$ und $\Gamma(h)$.
Alle zusammen sind die Schnittpunkte $(1,2)$, $(5,2)$ und $(2,1)$.

(b) Hier die Skizze:



(c) Die Skizze von der Fläche ist die folgende.



Der Inhalt ist der des Vierecks mit Ecken $(2,1)$, $(4,1)$, $(2,2)$ und $(4,2)$, zusammen mit der des Dreiecks mit Ecken $(2,1)$, $(4,1)$ und $(3,0)$. Also ist dieser Inhalt

$$(2 \times 1) + \frac{1}{2}(1 \times 2) = 2 + 1 = 3.$$

(d) Beachten Sie, dass $g(x) - h(x) \geqq 0$ auf $[0,2]$, und $g(x) - h(x) \leqq 0$ auf $[2,4]$. Also bestimmen wir den gesuchten Inhalt durch

$$I = \int_0^2 g(x) - h(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_2^5 h(x) - g(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

Mit Beachtung der Definitionen von g und h, berechnen wir das Integral durch

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 3 - x - \sqrt{1-x} \,\mathrm{d}\, x + \int_1^2 3 - x - \sqrt{x-1} \,\mathrm{d}\, x \\ &\qquad + \int_2^3 \sqrt{x-1} - (3-x) \,\mathrm{d}\, x + \int_3^5 \sqrt{x-1} - (x-3) \,\mathrm{d}\, x \\ &= \left[3x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\ &\qquad + \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - 3x + \frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_3^5 \\ &= \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{9}{2} - \left(-\frac{10}{3}\right)\right) + \left(\frac{47}{6} - \left(\frac{9}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\ &= \frac{29}{6}. \end{aligned}$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 68. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{\arctan(2x)}{4x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion $\dfrac{\arctan(2x)}{4x^2+1}$ ist auf dem Intervall $(-\infty,2]$ stetig, das Problem ist also die untere Grenze $-\infty$. Es gilt, mit der Substitution $u=\arctan(2x)$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{2}{(2x)^2+1}$, dass

$$\int \frac{\arctan(2x)}{4x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{u}{2}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{u^2}{4}\right] = \left[\frac{(\arctan(2x))^2}{4}\right]$$

sodass

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{2} \frac{\arctan(2x)}{4x^2+1}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to-\infty}\left[\frac{(\arctan(2x))^2}{4}\right]_{\beta}^{2} \\ &= \frac{(\arctan(4))^2}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{\beta\to-\infty}(\arctan(2\beta))^2}_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{(\arctan(4))^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

(b) Erst beobachten wir, dass mit der Substitution $u=x+1$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}=1$ Folgendes gilt:

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(u)^2}\,\mathrm{d}\,u.$$

Der Integrand ist auf dem Intervall $(0,\infty)$ stetig, aber an der Stelle 0 nicht definiert. Die Problemstellen sind also die beiden Grenzen 0 und $+\infty$, darum teilen wir das Integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u = \int_{0}^{1} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u.$$

Aus den Beispielen 3.7.8 und 3.7.9 der Vorlesung wissen wir, da $2>1$, dass das erste Integral nicht existiert und dass das zweite existiert (und positiv ist). Dann

$$\lim_{\beta\to-1}\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to0}\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u \geqq \lim_{\beta\to0}\int_{\beta}^{1} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u = +\infty$$

somit ist $\displaystyle\lim_{\beta\to-1}\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = +\infty$ und das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ existiert nicht.

Aufgabe H 69. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{4}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion $\frac{x}{\mathrm{e}^x}$ ist auf dem Intervall $[1,+\infty)$ stetig, das Problem ist also die obere Grenze $+\infty$. Mit Hilfe partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^{\beta} + \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^{\beta} + \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^{\beta}\\ &= \lim_{\beta\to+\infty} -\underbrace{\beta\mathrm{e}^{-\beta}}_{\to 0}+\mathrm{e}^{-1}-\underbrace{\mathrm{e}^{-\beta}}_{\to 0}+\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}\,.\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Regel von l'Hospital angewendet:

$$\lim_{\beta\to+\infty}\beta\mathrm{e}^{-\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta}{\mathrm{e}^{\beta}} = \lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta}} = 0.$$

(b) Erst führen wir die Partialbruchzerlegung des Integrands aus:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}$$

mit $a,b\in\mathbb{R}$. Wir kriegen dann das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a+b &= 0\\ a-b &= 4\end{aligned}$$

das heißt $a=2$ und $b=-2$. Die Funktion $\frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$ ist auf dem Intervall $[2,+\infty)$ stetig, das Problem ist also die obere Grenze $+\infty$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{4}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta}\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to+\infty}\left[2\ln|x-1|-2\ln|x+1|\right]_2^{\beta}\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[2\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}2\ln\underbrace{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)}_{\to 1}-2\ln\left(\frac{1}{3}\right) = 2\ln(3).\end{aligned}$$

Aufgabe H 70. *Majoranten, Grenzwert und Vergleichskriterien*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+3}{x^5}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\cos(\pi x)+1)\cdot\sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ und $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}\,x$

(d) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{1+k^2}\right)$ auf Konvergenz.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\int_0^2 \frac{x^2+3}{x^5}\,\mathrm{d}\,x \geqq \int_0^2 \frac{x^2}{x^5}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^2 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$$

wobei beide Integranden stetig und positiv auf dem Intervall $(0,2]$ sind. Da nach Beispiel 3.7.8 das Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ eine divergente Minorante ist, divergiert unser Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+3}{x^5}\,\mathrm{d}\,x$ ebenfalls (Satz 3.7.5).

(b) Da für $x \in [1,\infty)$

$$-1 \leqq \cos(\pi x) \leqq 1 \qquad \text{und} \qquad 1 \leqq 1 + \frac{1}{x} \leqq 2$$

erhält man

$$0 \leqq (\cos(\pi x)+1) \leqq 2 \qquad \text{und} \qquad 0 \leqq \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqq \ln(2).$$

Der Integrand ist dann stetig und positiv auf dem Intervall $[1,+\infty)$ und es gilt

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\cos(\pi x)+1)\cdot\sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \leqq \int_1^{+\infty} \frac{2\ln(2)\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{+\infty} \frac{2\ln(2)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}\,x$$

das nach Beispiel 3.7.8 eine konvergente Majorante ist. Mittels des Majoranten-Kriteriums 3.7.5 können wir dann schließen, dass $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\cos(\pi x)+1)\cdot\sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$ konvergent ist.

(c) Es gilt

$$0 \leqq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \leqq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

das nach Beispiel 3.7.8 eine konvergente Majorante ist. Mittels des Majoranten-Kriteriums 3.7.5 konvergiert auch $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

Auf dem Intervall $[1,+\infty)$ sind $\dfrac{1}{1+x^2}$ und $\sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ beide stetig und positiv da

$$x^2 \geqq 1 \implies 0 \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq \frac{1}{2} \leqq \frac{\pi}{2} \implies \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \geqq 0.$$

Wir können hierfür das Grenzwert-Kriterium verwenden. Man kann die Substitution $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (da $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$) machen und dann gilt nach 1.12.5

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(y)}{y}\right) = 1.$$

Nach 3.7.11 (1) folgt, dass $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}\,x$ und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}\,x$ das gleiche Konvergenzverhalten haben und wir haben schon gesehen dass $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}\,x$ konvergiert.

(d) Da $\frac{1}{1+x^2}$ monoton fallend auf dem Intervall $[1, +\infty)$ ist und $\sin(x)$ monoton steigend auf dem Intervall $(0, 1/2]$ ist, ist $\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ monoton fallend und positiv auf $[1, +\infty)$. Dank Satz 3.8.1 konvergiert dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{1+k^2}\right)$.

Aufgabe H 71. *Potenzreihen: geschlossene Darstellung*

Wir betrachten die durch Potenzreihen gegebenen Funktionen

$$f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \text{und} \qquad g\colon (-\rho', \rho') \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

(a) Berechnen Sie die Konvergenzradien ρ und ρ' und Reihendarstellungen für die Stammfunktionen F von f bzw. G von g, die $F(0) = 0 = G(0)$ erfüllen.

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für F.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Ermitteln Sie daraus eine geschlossene Darstellung für G und dann für g.
Hinweis: $x^n = x \cdot x^{n-1}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{1}{n}\right| = 1,$$

also ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{1} = 1$.

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right| = 1,$$

also ist der Konvergenzradius $\rho' = \frac{1}{1} = 1$.

Summandenweises Integrieren für f ergibt

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Man bestimmt c aus der Gleichheit $0 = F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0^n + c = c$, deswegen erhält man

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Summandenweises Integrieren für g ergibt

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Man bestimmt c aus der Gleichheit $0 = G(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 0^n + c = c$, deswegen erhält man

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

(b) Innerhalb des Konvergenzbereichs gilt $|x| < 1$, daher handelt es sich um eine konvergente geometrische Reihe und es gilt

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - x^0 = \frac{1}{1-x} - 1.$$

(c) Direkt Ableiten ergibt

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(d) Man bemerkt, dass sich G auf die Reihendarstellung von f zurückführen lässt:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Daraus folgt

$$g(x) = G'(x) = \frac{1 \cdot (1-x)^2 - x \cdot (1-x) \cdot 2 \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 72. *Potenzreihen: geschlossene Darstellung*

Wir betrachten die durch eine Potenzreihe gegebene Funktion

$$f\colon (3-\rho, 3+\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(2x-6)^k.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ.

(b) Finden Sie eine Reihendarstellung für die Ableitung f' von f.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot 2^k \cdot (x-3)^k,$$

also ist $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x-3)^k$ mit $a_k = \dfrac{(-2)^k}{k}$. Dann haben wir

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|-2\frac{k}{k+1}\right| = 2,$$

also ist $\rho = \frac{1}{2}$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot 2k(2x-6)^{k-1} \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2x-6)^{k-1}. \end{aligned}$$

(c) Die Reihe

$$f'(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(2x-6)^{k-1} = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}(2x-6)^{\ell}$$

ist eine geometrische Reihe, sodass

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{1-(-1)(2x-6)} = \frac{2}{5-2x}.$$

(d) Die Abbildung f ist die eindeutige Stammfunktion von f' mit der Eigenschaft $f(3) = 0$. Eine allgemeine Stammfunktion ist in der Klasse

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{2}{5-2x}\,\mathrm{d}\,x = [-\ln|5-2x|].$$

Wegen $-\ln|5-2\cdot 3| = -\ln(1) = 0$ ist $f(x) = -\ln|5-2x|$. Man kann noch bemerken, dass $5-2x<0$ für $x \in (3-\rho, 3+\rho) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ gilt. Also ist $f(x) = -\ln(2x-5)$.

Aufgabe H 73. *Funktion in mehreren Veränderlichen*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\neq -y\right\} \to \mathbb{R}\colon (x,y)\mapsto \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

(a) Zeichnen Sie in ein gemeinsames Koordinatensystem die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t\in\{-4,-2,2,4\}$.

(b) Bestimmen Sie den achsenparallelen Schnitt $\left\{(x,\frac{1}{2},f(x,\frac{1}{2}))\,\middle|\, x\in\mathbb{R}, x\neq -\frac{1}{2}\right\}$ von f.

(c) Skizzieren Sie diesen Schnitt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für die Niveaulinien N_2 führen wir folgende Rechnung für $x\neq -y$ durch.

$$\begin{aligned} f(x,y)=2 &\Leftrightarrow x^2-2x-2y+y^2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+1-2y+y^2-2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2 \end{aligned}$$

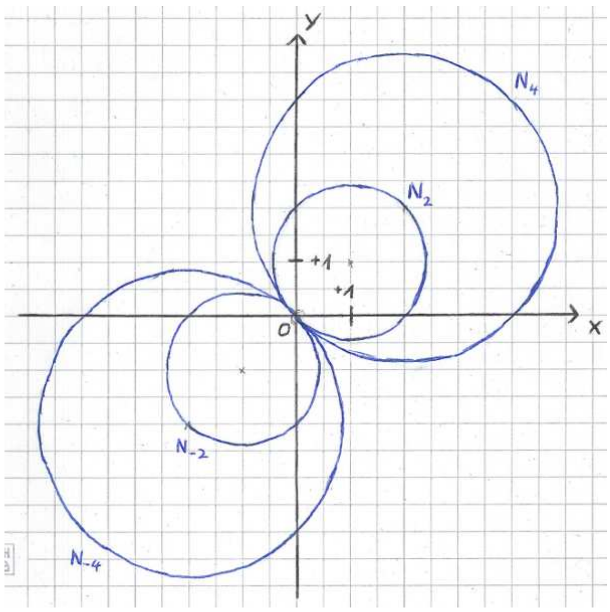
Für die Niveaulinien N_4 führen wir folgende Rechnung für $x\neq -y$ durch.

$$\begin{aligned} f(x,y)=4 &\Leftrightarrow x^2-4x-4y+y^2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+4-4y+y^2-8=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8 \end{aligned}$$

Analog rechnen wir für N_{-2} und N_{-4}:

$$\begin{aligned} f(x,y)=-2 &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=2 \\ f(x,y)=-4 &\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=8 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Skizze für die Niveaulinien. Der Punkt $(0,0)$ ist nicht im Definitionsbereich enthalten und daher auch kein Element der Niveaulinien.



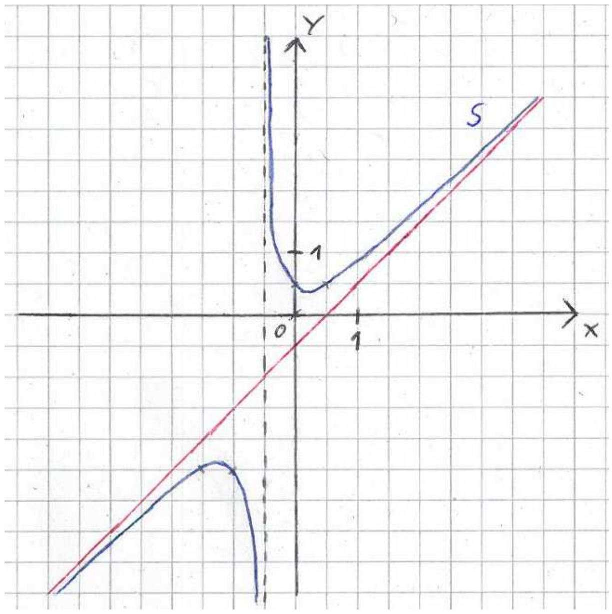
(b) Für den achsenparallelen Schnitt führen wir folgende Rechnung für $x \neq -\frac{1}{2}$ mittels Polynomdivision durch.

$$\frac{x^2+\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{4x^2+1}{4x+2} = x - \frac{1}{2} + \frac{2}{4x+2} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1}$$

Damit ist der achsenparallelen Schnitt gegeben durch

$$\left\{ (x, \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1}) \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\, x \neq -\frac{1}{2} \right\}.$$

(c) Nach Teil (b) müssen wir die Menge $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1},\, x \neq -\frac{1}{2}\right\}$ zeichnen. Mit rot ist außerdem die Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x - \frac{1}{2}\right\}$ eingezeichnet.



Aufgabe H 74. *Modell: Unstetigkeit*
Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69**.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Das in der Präsenzübung benutzte Modell des Graphen von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/04

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x, \lambda x)$ stetig?

(b) Sei $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$. Ist f bei $(0,0)$ stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$g(x) = f(x, \lambda(x)) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0, \\ \dfrac{2\lambda^2x^3}{x^2+\lambda^4x^4}, & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Also ist für $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{2\lambda^2 x}{1+\lambda^4 x^2}$$

stetig, als ein Quotient von stetigen Abbildungen ungleich Null. Da $\lim\limits_{x\to 0} 2\lambda^2 x = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(1+\lambda^4 x^4) = 1$, ist g auch im Punkt 0 stetig.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0).$$

Wir fassen zusammen, dass g für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,0)$. Wir berechnen

$$f(a_n) = \frac{2\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = 1,$$

also ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$. Das ist nicht gleich $f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(0,0) = 0$, also ist f nicht stetig in $(0,0)$.

Aufgabe H 75. *Modell: Funktion in mehreren Veränderlichen*

Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69** und **Aufgabe H 74** und dazu die Funktionenschar $g_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x,r)$ (mit $r \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$). Den Graphen von g_r kann man jeweils sehen als den Schnitt der Ebene $E\colon y = r$ mit dem Graphen von f.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von g_2.

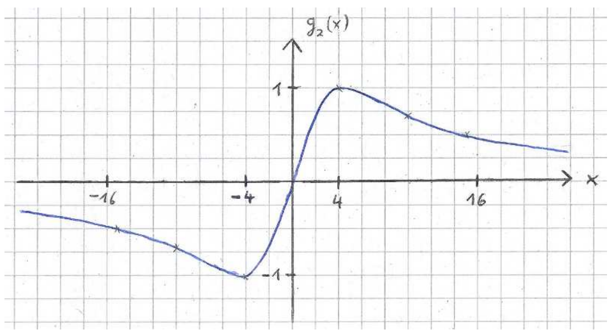
(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von g_r und deren Funktionswerte in Abhängigkeit von r.

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} g_r(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} g_r(x)$.

(d) Bestimmen Sie jeweils den größten und kleinsten Wert, den f auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir skizzieren $g_2(x) = f(x,2) = \dfrac{8x}{x^2+16}$.



(b) Wir bestimmen die Ableitung von $g_r(x)$ in Abhängigkeit von r.

$$g_r'(x) = \frac{2r^2(x^2+r^4) - 4x^2r^2}{(x^2+r^4)^2} = \frac{2r^6 - 2x^2r^2}{(x^2+r^4)^2}$$

Die kritischen Stellen von g_r sind dann die Lösungen der Gleichung $g_r'(x) = 0$. Wegen $r \neq 0$ gilt

$$g_r'(x) = 0 \Leftrightarrow 2r^6 - 2x^2r^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = r^4$$

Damit sind die kritischen Stellen von g_r gegeben durch $x_1 = r^2$ und $x_2 = -r^2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} g_r(r^2) &= \frac{2r^4}{r^4 + r^4} = 1 \\ g_r(-r^2) &= \frac{-2r^4}{r^4 + r^4} = -1. \end{aligned}$$

(c) Wir erhalten mit Satz 1.11.8.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} g_r(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2xr^2}{x^2 + r^4} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} g_r(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2xr^2}{x^2 + r^4} = 0. \end{aligned}$$

(d) Sei zuerst $y = 0$. Dann ist $f(x, y) = f(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten den Fall $y \neq 0$ mit Hilfe der Funktionenschar g_r für $r = y$. Wegen $r \neq 0$ ist $g_r(x)$ stetig. Nach Teil (b) ist

$$g_r'(x) = \frac{2r^6 - 2x^2r^2}{(x^2 + r^4)^2}.$$

Wegen $r \neq 0$ ist $2r^2 > 0$ und $(x^2 + r^4)^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir die folgende Vorzeichenverteilung der Ableitung von g_r.

$$\begin{aligned} g_r'(x) &< 0, & x &< -r^2 \\ g_r'(x) &> 0, & -r^2 < x &< r^2 \\ g_r'(x) &< 0, & r^2 &< x \end{aligned}$$

Also besitzt g_r an der Stelle $x = -r^2$ ein lokales Minimum und an der Stelle $x = r^2$ ein lokales Maximum. Wegen der Stetigkeit von g_r und da

$$g_r(-r^2) < \lim_{x\to+\infty} g_r(x) = \lim_{x\to-\infty} g_r(x) < g_r(r^2).$$

ist daher $g_r(-r^2) = -1$ der kleinste Wert und $g_r(r^2) = 1$ der größte Wert den g_r auf $\mathbb{R}$ annimmt.
Wegen $g_r(x) = f(x, y)$ für $y \neq 0$ und wegen $f(x, 0) = 0$ ist damit auch -1 der kleinste Wert und 1 der größte Wert den f auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 76. *Partielle Ableitungen*

Bestimmen Sie für die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 \sin(x_1^2 + x_2x_3)$$

die folgenden partiellen Ableitungen.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ **(b)** $f_{x_3x_2}(x)$ **(c)** $\mathrm{D}^{(1,2,1)} f(x)$ **(d)** $\mathrm{D}^{(0,1,1)} \mathrm{D}^{(1,1,0)} f(x)$

Lösungshinweise hierzu: Wir verwenden überall, dass f und alle seine partiellen Ableitungen stetig sind, da sie Polynome in x_1, x_2, x_3 und Sinus oder Cosinus von solchen Polynomen sind. Es folgt, dass der Satz von Schwarz für f und alle seine partiellen Ableitungen gilt.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1^2x_3\cos(x_1^2 + x_2x_3)$.

(b) Nach dem Satz von Schwarz gilt, dass

$$f_{x_3x_2}(x) = f_{x_2x_3}(x) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x),$$

also haben wir

$$f_{x_3x_2}(x) = x_1^2\cos(x_1^2 + x_2x_3) - x_1^2x_2x_3\sin(x_1^2 + x_2x_3).$$

(c) Mit dem Satz von Schwarz können wir $\mathrm{D}^{(1,2,1)} f(x) = \partial_{x_1}\partial_{x_2} f_{x_3x_2}(x)$ schreiben, und berechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_2} f_{x_3x_2}(x) &= -x_1^2x_3\sin(x_1^2 + x_2x_3) - x_1x_3\sin(x_1^2 + x_2x_3) - x_1^2x_2x_3^2\cos(x_1^2 + x_2x_3)\\
&= -2x_1^2x_3\sin(x_1^2 + x_2x_3) - x_1^2x_2x_3^2\cos(x_1^2 + x_2x_3)\\
\partial_{x_2}\partial_{x_1} f_{x_3x_2}(x) &= -4x_1x_3\sin(x_1^2 + x_2x_3 - 4x_1^3x_3\cos(x_1^2 + x_2x_3)\\
&\qquad - 2x_1x_2x_3^2\cos(x_1^2 + x_2x_3) + 2x_1^3x_2x_3^2\sin(x_1^2 + x_2x_3)\\
&= 2x_1x_3\left((x_1^2x_2x_3 - 2)\sin(x_1^2 + x_2x_3) - (2x_1^2 + x_2x_3)\cos(x_1^2 + x_2x_3)\right).
\end{aligned}$$

(d) Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}^{(0,1,1)} \mathrm{D}^{(1,1,0)} f(x) = \mathrm{D}^{(1,2,1)} f(x)\\
&\qquad = 2x_1x_3\left((x_1^2x_2x_3 - 2)\sin(x_1^2 + x_2x_3) - (2x_1^2 + x_2x_3)\cos(x_1^2 + x_2x_3)\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe H 77. *Topologische Eigenschaften*

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

$$M_1 = [-1, 1] \times [1, 2), \quad M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y + 1)^2 < 4\right\},$$
$$M_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq |x|\right\}, \quad M_4 = M_1 \cap M_3, \quad M_5 = M_2 \cap M_3.$$

(a) Skizzieren sie die Teilmengen M_1, M_2 und M_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie für M_1, M_2 und M_3 die inneren Punkte und die Randpunkte.

(c) Welche der Mengen M_1, M_3, M_4 und M_5 ist

(i) abgeschlossen?

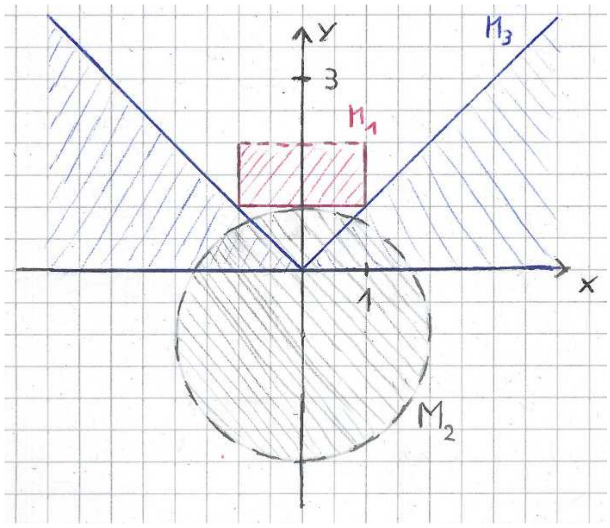
(ii) beschränkt?

(iii) kompakt?

(iv) konvex?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gestrichelten Linien sind jeweils nicht Teil der Menge.



(b) Es beschreibt M_1 die Fläche des Rechtecks mit Eckpunkten $(-1,2)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ und $(1,2)$ in $\mathbb{R}^2$, wobei die Kante zwischen den Punkten $(-1,2)$ und $(1,2)$ fehlt. Somit sind die inneren Punkte von M_1 gegeben durch die inneren Punkte des Rechteks, also $M_1^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 < x < 1,\ 1 < y < 2\right\}$. Ebenso sind die Randpunkte von M_1 gegeben durch die Randpunkte des Rechtecks.

$$\partial M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| = 1,\ 1 \leqq y \leqq 2\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 1,\ y = 1 \text{ oder } y = 2\right\}$$

Die Menge M_2 beschreibt das Innere eines Kreises mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,-1)$. Daher ist $M_2^\circ = M_2$ und

$$\partial M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 = 4\right\}.$$

Die Menge M_3 beschreibt ein nach links geöffnetes und ein nach rechts geöffnetes Dreieck. Die inneren Punkte und Randpunkte sind somit

$$M_3^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < y < |x|\right\}$$
$$\partial M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = |x|\right\}.$$

(c) Wir betrachten zuerst die Menge M_1. Es ist $M_1 \subseteqq U_3(0)$, daher ist M_1 beschränkt. Nach Teil (b) ist $\partial M_1 \nsubseteqq M_1$, daher ist M_1 nicht abgeschlossen und kann somit auch nicht kompakt sein. Als Rechteck ist M_1 konvex.

Die Menge M_2 ist ebenfalls enthalten in $U_3(0)$, daher ist auch M_2 beschränkt. Nach Teil (b) ist $\partial M_2 \nsubseteqq M_2$, daher ist M_2 nicht abgeschlossen und also auch nicht kompakt. Als Kreis ist M_2 konvex.

Die Menge M_3 ist nicht beschränkt. Die Folge $(n,0)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in M_3 mit

$$\lim_{n->\infty} |(n,0)| = \lim_{n->\infty} n = +\infty.$$

Egal wie groß $S \in \mathbb{R}$ gewählt wird, können daher nie alle Punkte dieser Folge in $U_S(0)$ liegen, also auch nicht $M_3 \subseteqq U_S(0)$. Nach Teil (b) ist $\partial M_3 \subseteqq M_3$, daher ist $M_3 = \overline{M_3} = M_3 \cup \partial M_3$ abgeschlossen. Da M_3 unbeschränkt ist, kann M_3 nicht kompakt sein. Weiterhin ist M_3 nicht konvex. Die beiden Punkte $(-1,1)$ und $(1,1)$ liegen in M_3, jedoch deren Mittelpunkt $(0,1)$ nicht.

Die Menge $M_4 = M_1 \cap M_3 = \{(-1,1),\, (1,1)\}$ besteht nur aus zwei verschiedenen Punkten. Daher ist M_4 beschränkt und abgeschlossen, also auch kompakt. Jedoch ist M_4 nicht konvex, da z.B. der Mittelpunkt $(0,1)$ der beiden Punkte nicht in M_4 liegt.

Die Menge M_5 ist beschränkt, da $M_5 = M_2 \cap M_3 \subseteqq M_2 \subseteqq U_3(0)$ wie oben. Aber M_5 ist nicht abgeschlossen, da $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 = 4,\ 0 < y < |x|\right\} \subseteqq \partial M_5$, aber $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 = 4,\ 0 < y < |x|\right\} \nsubseteqq M_2 \cap M_3 = M_5$. Damit ist M_5 auch nicht kompakt. Schließlich ist M_5 nicht konvex. Die Punkte $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ liegen in M_5, jedoch deren Mittelpunkt $(0, \frac{1}{2})$ nicht.

Aufgabe H 78. *Modell: Schmiegquadriken*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell eines Ausschnitts des Graphen von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/05
In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_2 = (0,0)$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_3 = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_2 und P_3 sowie die Gestalt dieser Quadriken.

(d) Ist die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_2 beschränkt? Ist sie konvex?

Lösungshinweise hierzu: Aus den Präsenzübungen kennen wir den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) \\ -\cos(x)\sin(y) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x)\cos(y) & \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x)\sin(y) & -\cos(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

(a) Es gilt

$$f(0,0) = 1 \qquad \operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} T_2\left(f, (x,y), (0,0)\right) &= f(0,0) + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \operatorname{grad} f(0,0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\intercal} \mathrm{H}f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$f(\tfrac{\pi}{2}, 0) = 0 \qquad \operatorname{grad} f(\tfrac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}f(\tfrac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} T_2\left(f, (x,y), (\tfrac{\pi}{2}, 0)\right) &= f(\tfrac{\pi}{2}, 0) + \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \bullet \operatorname{grad} f(\tfrac{\pi}{2}, 0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix}^{\intercal} \mathrm{H}f(\tfrac{\pi}{2}, 0) \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\pi}{2} - x \end{aligned}$$

(c) Nach Teil (a) ist die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_2 gegeben durch

$$Q_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+2z-2=0\right\}.$$

Mit der Substitution $z' := z - 1$ kommen wir auf die euklidische Normalform von Q:

$$x^2 + y^2 + 2z' = 0$$

Mit Hilfe der Liste der affinen Normalformen (vgl. HM1) kann man nun die Gestalt der Schmiegquadrik bestimmen: Q ist ein elliptisches Paraboloid.

Nach Teil (b) ist die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_3 gegeben durch

$$Q_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = \frac{\pi}{2} - x\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + z = \frac{\pi}{2}\right\}.$$

In diesem Fall ist die Schmiegquadrik zu einer Ebene ausgeartet.

(d) Die Schmiegquadrik Q_2 an f an der Stelle P_2 ist unbeschränkt:
Die Folge $(n, n, 1-n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in Q_2 und es gilt

$$\lim_{n->\infty} |(n,n,1-n^2)| = \lim_{n->\infty} \sqrt{n^2+n^2+(1-n^2)^2} = \lim_{n->\infty} \sqrt{1+n^4} = +\infty.$$

Egal wie groß $S \in \mathbb{R}$ gewählt wird, können daher nie alle Punkte dieser Folge in $U_S(0)$ liegen, also auch nicht $Q_2 \subsetneqq U_S(0)$.

Die Schmiegquadrik Q_2 an f an der Stelle P_2 ist nicht konvex:
Die beiden Punkte $(1,1,0)$ und $(-1,1,0)$ liegen in Q_3, jedoch deren Mittelpunkt $(0,1,0)$ nicht.

Aufgabe H 79. *Richtungsableitung, Ableitung längs eines Vektors*

Bestimmen Sie jeweils den Gradienten $\nabla f(P)$ und die Ableitung $\partial_v f(P)$ längs v.

(a) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$, $P = (\pi, -\pi)$, $v = (1,-1)$.

(b) $f(x,y,z) = xy\,\mathrm{e}^{-yz^3}$, $P = (1,2,0)$, $v = (1,1,0)$.

(c) $f(x,y,z) = xy\,\mathrm{e}^{-yz^3}$, $P = (1,2,0)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{\ln(2+x^2+y^2\cos(x))}{1+z^2}$, $P = (\pi,1,2)$, $v = (3,2,1)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_v f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Wir berechnen

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{-yz^3} \\ x\mathrm{e}^{-yz^3} - xyz^3\mathrm{e}^{-yz^3} \\ -3xy^2z^2\mathrm{e}^{-yz^3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_v f(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

(c) Mit der Berechnung in Teil (b) erhalten wir

$$\partial_v f = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_{(1,1,0)} f = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(d) Wir berechnen

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x - y^2\sin(x)}{(1+z^2)(2+x^2+y^2\cos(x))} \\ \dfrac{2y\cos(x)}{(1+z^2)(2+x^2+y^2\cos(x))} \\ -\dfrac{2z\ln(2+x^2+y^2\cos(x))}{(1+z^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\pi}{5(1+\pi^2)} \\ -\dfrac{2}{5(1+\pi^2)} \\ -\dfrac{4\ln(1+\pi^2)}{25} \end{pmatrix}$$

$$\partial_v f(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\pi}{5(1+\pi^2)} \\ -\dfrac{2}{5(1+\pi^2)} \\ -\dfrac{4\ln(1+\pi^2)}{25} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{30\pi - 20 - 4(1+\pi^2)\ln(1+\pi^2)}{25(1+\pi^2)}$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 80. *Kritische Stellen und ihr Typ*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2 - x^2 - 1)\,(x^2 + (y-1)^2 - 4)$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-3,3] \times [-2,4]$.

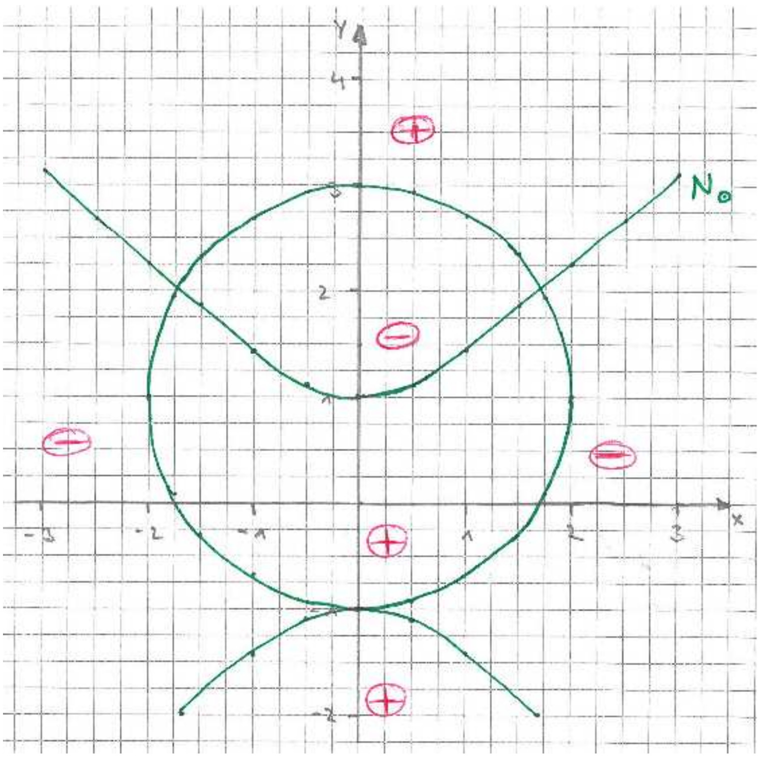
(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $f(x,y) = 0$ gilt genau denn, wenn $y^2 = x^2 + 1$ oder $x^2 + (y-1)^2 = 4$ gilt. Die Gleichung $y^2 = x^2 + 1$ beschreibt eine Hyperbel und die Gleichung $x^2 + (y-1)^2 = 4$ einen Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,1)$. Für Punkte oberhalb des oberen oder unterhalb des unteres Hyperbelastes ist der Term $y^2 - x^2 - 1$ positiv, zwischen den Hyperbelästen negativ. Der Term $x^2 + (y-1)^2 - 4$ ist innerhalb des Kreises negativ und außerhalb positiv. Damit ergibt sich die Vorzeichenverteilung entsprechend der nachfolgenden Skizze:



(b) Es gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x\,(x^2 - y - 1) \\ 4y^3 + 2x^2 - 6y^2 - 8y + 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 + 4y + 4 & 4x \\ 4x & 12y^2 - 12y - 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus der ersten Koordinate des Gleichungssystems $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ erhält man die Bedingung $x = 0$ oder $x^2 - y - 1 = 0$. Daher unterscheiden wir folgende Fälle:

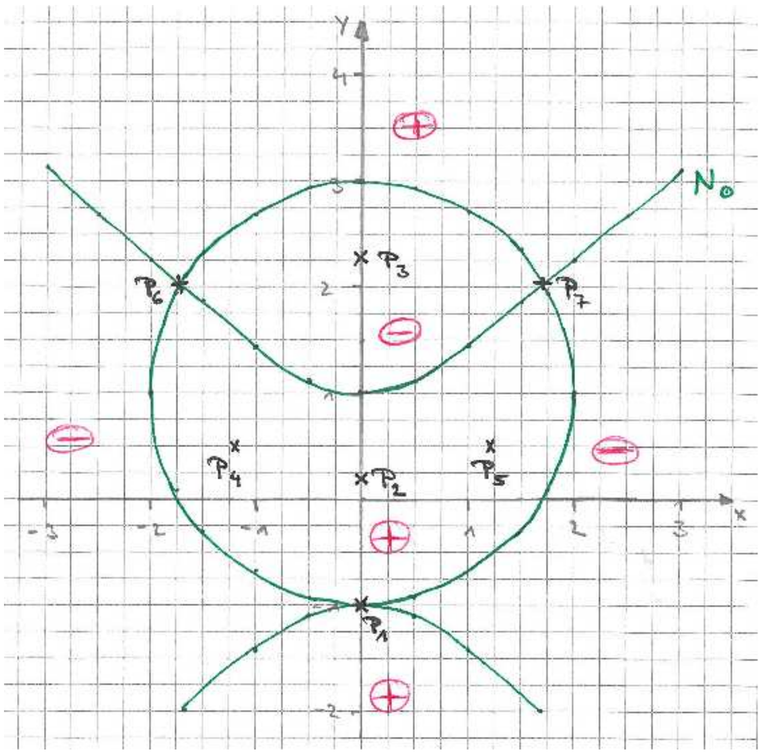
$x = 0$**:** Aus der zweiten Koordinate erhält man dann $4y^3 - 6y^2 - 8y + 2 = 0$. Mittels Einsetzen erhält man die Nullstelle $y = -1$ und durch Polynomdivision $2(y+1)(2y^2 - 5y + 1) = 0$. Die weiteren Nullstellen $y = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ erhalten wir mit der Mitternachtsformel.

$x \neq 0$**:** Dann gilt $x^2 = y+1$. Durch Einsetzen in die zweite Koordinate des Gleichungssystems erhält man $4y^3 - 6y^2 - 6y + 4 = 0$. Man erhält wieder mittels Einsetzen die Nullstelle $y = -1$ und durch Polynomdivision $2(y+1)(2y^2 - 5y + 2) = 0$. Die weiteren Nullstellen $y = \dfrac{5 \pm 3}{4}$ erhalten wir ebenso mit der Mitternachtsformel. Damit ergeben sich die zugehörigen x-Werte $x = 0$ zu $y = -1$ (Widerspruch zur Annahme $x \neq 0$), $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ zu $y = \dfrac{1}{2}$ und $x = \pm\sqrt{3}$ zu $y = 2$.

Damit liegen folgende kritischen Punkte der Funktion f vor:

$$P_1 = (0, -1)\ , \qquad P_2 = \left(0, \frac{5 - \sqrt{17}}{4}\right)\ , \quad P_3 = \left(0, \frac{5 + \sqrt{17}}{4}\right)\ ,$$

$$P_4 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)\ , \quad P_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)\ , \qquad P_6 = \left(-\sqrt{3}, 2\right)\ , \qquad P_7 = \left(\sqrt{3}, 2\right)\ .$$



(d) P_1 ist ein Sattelpunkt. Dies ist aus der Vorzeichenverteilung ersichtlich, da es sowohl positive als auch negative an P_1 angrenzende Bereiche gibt. Das gleiche gilt für P_6 und P_7.

P_3 ist ein lokales Minimum. Dies ist wieder aus der Vorzeichenverteilung mit Hilfe des Satzes vom Minimum und Maximum ersichtlich: Der in der Vorzeichenverteilung negativ gekennzeichnete Bereich, in dem P_3 liegt, zusammen mit seinem Rand ist eine kompakte Menge. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum nimmt die Funktion

f daher auf dieser Menge ihr Minimum und Maximum an. Das Maximum ist 0 und wird auf dem Rand angenommen. Das Minimum wird daher an einer kritischen Stelle im Inneren angenommen. Als einzige Möglichkeit hierfür kommt P_3 in Betracht.

Das Argument für P_3 lässt sich nicht auf P_2 übertragen, da hier im selben Bereich ebenfalls die kritischen Punkte P_4 und P_5 liegen. Für diese Punkte verwenden wir die Hesse-Matrix zur Typbestimmung:

$$\mathrm{H}f\,(P_2) = \begin{pmatrix} 9-\sqrt{17} & 0 \\ 0 & \frac{17}{2}-\frac{9\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f\,(P_4) = \begin{pmatrix} -12 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & -11 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{H}f\,(P_5) = \begin{pmatrix} -12 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & -11 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(\mathrm{H}f\,(P_2)) = 153 - 49\sqrt{17} < 0$ ist $\mathrm{H}f\,(P_2)$ indefinit und daher P_2 ein Sattelpunkt.

Wegen $\det(\mathrm{H}f\,(P_4)) = \det(\mathrm{H}f\,(P_5)) = 108 > 0$ und $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{H}f\,(P_4)) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{H}f\,(P_5)) = -23 < 0$ sind P_4 und P_5 lokale Maxima.

Aufgabe H 81. *Extremwerte unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2y^2 - 3y^2 + z^2 + z$ und $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0\right\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$.

(a) Stellen Sie das Gleichungssystem gemäß der Multiplikatormethode nach Lagrange auf.

(b) Bestimmen Sie damit die Kandidaten für die Extremstellen von f auf M.

(c) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f in M.

(d) Sei $N := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0 = h(x,y,z)\right\} \subseteqq M$ mit $h(x,y,z) = y^2$. Bestimmen Sie den maximalen Wert, den f auf N annimmt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Gleichunssystem ergibt sich mit $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y - 6y \\ 2z+1 \end{pmatrix}$ und $\operatorname{grad} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 8z \end{pmatrix}$ aus $\operatorname{grad} f(x,y,z) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z) = 0$ und $g(x,y,z) = 0$:

$$2x\left(y^2+\lambda\right) = 0 \tag{1}$$
$$2y\left(x^2+\lambda-3\right) = 0 \tag{2}$$
$$2\,(4\lambda+1)\,z + 1 = 0 \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \tag{4}$$

(b) Aus (1) folgt $x = 0$ oder $\lambda = -y^2$. Aus (2) folgt $y = 0$ oder $\lambda = 3 - x^2$. Daraus ergeben sich folgende Fälle:

$x = 0$ **und** $y = 0$**:** Dann folgt $z = \pm 1$ aus (4) und mit (3) folgt dann $\lambda = \dfrac{-2 \mp 1}{8}$.

$x = 0$ **und** $y \neq 0$**:** Dann gilt $\lambda = 3 - x^2 = 3$. Aus (3) folgt $z = -\frac{1}{26}$ und mit (4) gilt $y = \pm 2\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{26}\right)^2} = \pm\frac{15\sqrt{3}}{13}$.

$x \neq 0$ **und** $y = 0$**:** Dann gilt $\lambda = -y^2 = 0$. Aus (3) folgt $z = -\frac{1}{2}$ und mit (4) gilt $x = \pm 2\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{3}$.

$x \neq 0$ und $y \neq 0$: Dann gilt $x^2 = 3-\lambda$ und $y^2 = -\lambda$. Aus (3) folgt dann $8\lambda+2 \neq 0$ und damit $z = -\frac{1}{8\lambda+2}$. Durch Einsetzen dieser Relationen in (4) erhält man nach Multiplikation mit $(8\lambda + 2)^2$ die Gleichung $2\lambda\,(16\lambda^2 + 16\lambda + 5) = 0$. Wegen $\lambda = -y^2 \neq 0$ gilt $16\lambda^2+16\lambda+5 = 0$ und man erhält mit der Mitternachtsformel $\lambda = \frac{-16\pm\sqrt{-64}}{32} \notin \mathbb{R}$. Also führt dieser Fall zu keinen (reellen) Lösungen.

Somit sind die Kandidaten für die Extremstellen

$$P_1 = (0,0,1)\ , \qquad P_2 = (0,0,-1)\ , \qquad P_3 = \left(0, -\frac{15\sqrt{3}}{13}, -\frac{1}{26}\right)\ ,$$

$$P_4 = \left(0, \frac{15\sqrt{3}}{13}, -\frac{1}{26}\right)\ , \quad P_5 = \left(\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right)\ , \quad P_6 = \left(\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right)\ .$$

(c) Es gilt $f(P_1) = 2$, $f(P_2) = 0$, $f(P_3) = f(P_4) = -\frac{625}{52}$ und $f(P_5) = f(P_6) = -\frac{1}{4}$. Somit ist $\max\limits_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z) = 2$ das Maximum von f auf M und $\min\limits_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z) = -\dfrac{625}{52}$ das Minimum von f auf M, da M eine kompakte Menge ist (vgl. Satz vom Minimum und Maximum).

(d) Es gilt $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, das heißt es gilt $y = 0$ für $(x,y,z)^\intercal \in N$. Somit hat $\mathrm{J}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \\ 8z & 0 \end{pmatrix}$ nie vollen Rang für $(x,y,z)^\intercal \in N$ und die Multiplikatormethode nach Lagrange für mehrere Nebenbedingungen ist nicht anwendbar.

Da $N \subseteqq M$ eine Teilmenge ist, ist der maximale Wert von f auf N kleiner oder gleich dem Maximum von f auf M. Es gilt aber $(0,0,1) \in N$. Damit folgt

$$2 = f(0,0,1) \leqq \max_{(x,y,z)\in N} f(x,y,z) \leqq \max_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z) = 2\ .$$

Daher ist $\max\limits_{(x,y,z)\in N} f(x,y,z) = 2$ das Maximum von f auf N.

Aufgabe H 82. *Extremwertesuche auf einem Kompaktum*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2+y^2)$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x^2 + y^2$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Bereich $U_3(0)$.

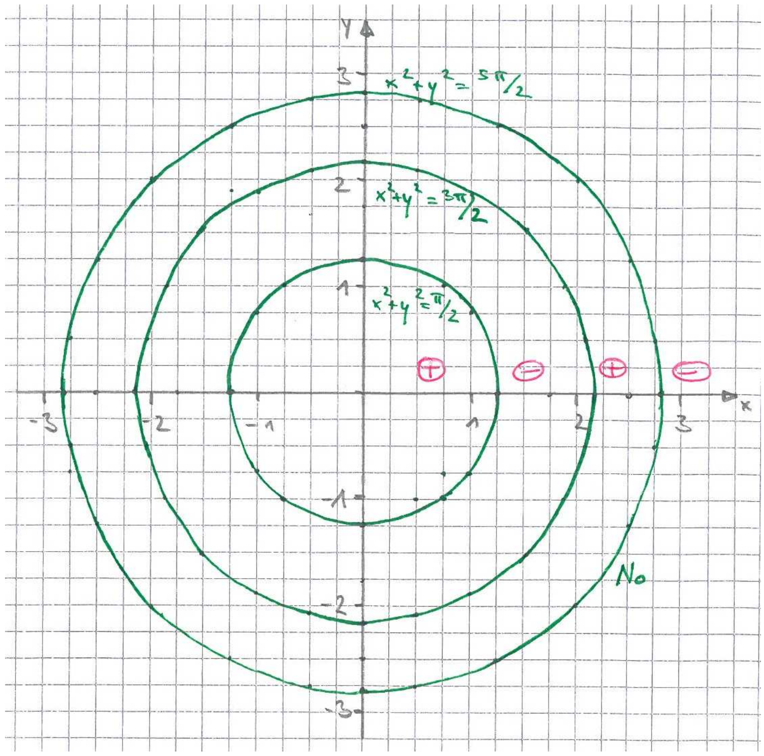
(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein. Bestimmen Sie jeweils den Typ.

(c) Bestimmen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren das Maximum und das Minimum von f auf $B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) = \frac{3\pi}{2}\right\}$.

(d) Bestimmen Sie die Extremwerte, die f auf der Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) \leqq \frac{3\pi}{2}\right\}$ annimmt und geben Sie jeweils eine zugehörige Stelle $(x,y) \in M$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\cos(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{\pi}{2}+k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dadurch werden konzentrische Kreise um den Ursprung mit Radius $\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ beschrieben. Die Vorzeichenverteilung ergibt sich im Wechsel positiv und negativ (entsprechend der Cosinus-Funktion) mit positiven Werten im innersten konzentrischen Kreis:

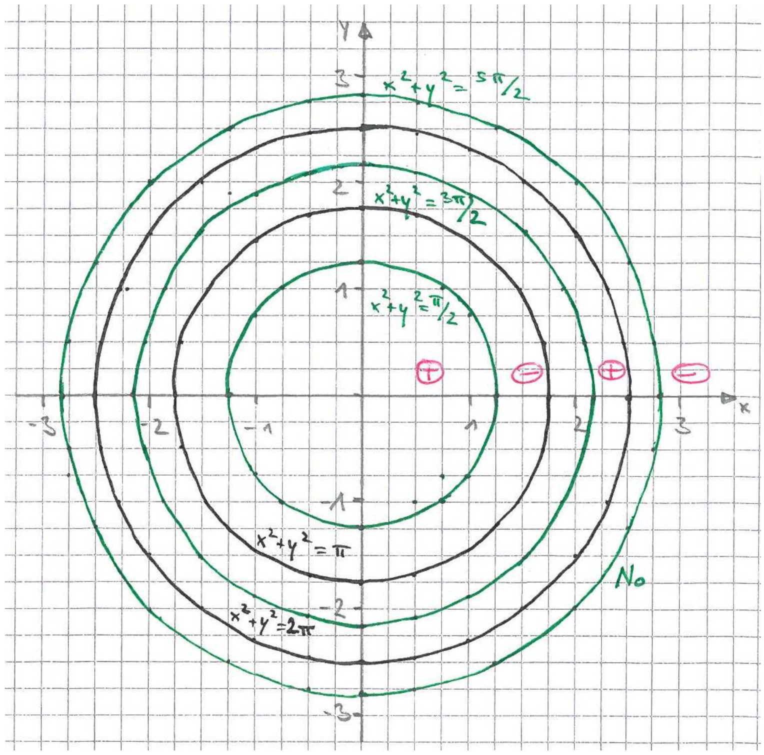


(b) Es ist $\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x\sin(x^2+y^2) \\ -2y\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix} = 0$. Wir machen die Fallunterscheidung

$\sin(x^2+y^2) = 0$**:** Dann gilt $x^2+y^2 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$.

$\sin(x^2+y^2) \neq 0$**:** Dann muss $x = y = 0$ gelten, was im Widerspruch zu $\sin(x^2+y^2) \neq 0$ steht.

Die kritischen Stellen sind also alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$. Dadurch werden konzentrische Kreise um den Ursprung mit Radius $\sqrt{k\pi}$ beschrieben.



Zur Bestimmung des Typs hilft weder die Vorzeichenverteilung (mehrere kritische Punkte in jedem Kreisring, daher hilft der Satz vom Minimum und Maximum nicht direkt weiter) noch die Hesse-Matrix ($\det(\mathrm{H}f) = 0$) Es gilt jedoch

$$\cos(x^2 + y^2) = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Wegen $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \cos(x^2 + y^2) = 1$ und $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \cos(x^2 + y^2) = -1$ sind die Punkte auf Kreisen mit Radius $\sqrt{k\pi}$ Maxima, wenn k gerade ist, und Minima, wenn k ungerade ist.

(c) Wir verwenden die Nebenbedingung $g'(x, y) = 3x^2+y^2-\frac{3\pi}{2} = 0$. Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem aus $\operatorname{grad} f(x, y) + \lambda \operatorname{grad} g'(x, y) = 0$ und $g'(x, y) = 0$:

$$2x\left(3\lambda - \sin(x^2 + y^2)\right) = 0 \tag{5}$$
$$2y\left(\lambda - \sin(x^2 + y^2)\right) = 0 \tag{6}$$
$$3x^2 + y^2 - \frac{3\pi}{2} = 0 \tag{7}$$

Aus (5) folgt $x = 0$ oder $3\lambda-\sin(x^2+y^2) = 0$. Aus (6) folgt $y = 0$ oder $\lambda-\sin(x^2+y^2) = 0$. Daraus ergeben sich folgende Fälle:

$x = 0$**:** Dann gilt $y = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$ mit (7) und aus (6) folgt $\lambda = \sin(x^2 + y^2) = -1$.

$x \neq 0 \wedge y = 0$**:** Dann gilt $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ mit (7) und aus (5) folgt $\lambda = \frac{1}{3}\sin(x^2+y^2) = \frac{1}{3}$.

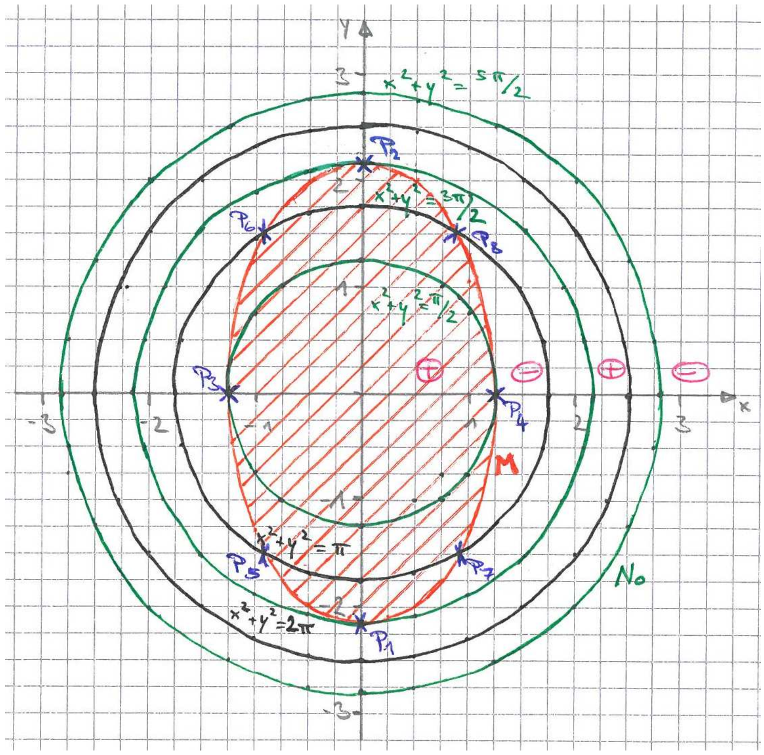
$x \neq 0 \wedge y \neq 0$**:** Dann gilt $3\lambda = \sin(x^2 + y^2) = \lambda$ mit (5) und (6), also $\lambda = 0$ und $x^2 + y^2 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$. Damit folgt aus (7) $0 \leqq 2x^2 = \frac{3\pi}{2} - k\pi$ und wir erhalten $k \in \{0, 1\}$.
Für $k = 0$ folgt $x = y = 0$ aus $x^2 + y^2 = k\pi = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also folgt $k = 1$ und man erhält $2x^2 = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$, also $x = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und damit $y = \pm\frac{\sqrt{3\pi}}{2}$ aus (7).

Somit sind die Kandidaten für die Extremstellen

$$P_1 = \left(0, -\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right), \quad P_2 = \left(0, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right), \quad P_3 = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right),$$
$$P_4 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right), \quad P_5 = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right), \quad P_6 = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right),$$
$$P_7 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right), \quad P_8 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right).$$

Es gilt $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = f(P_4) = 0$ und $f(P_5) = f(P_6) = f(P_7) = f(P_8) = -1$. Somit ist $0 = \max\limits_{(x,y)\in B} f(x, y)$ das Maximum von f auf B und $-1 = \min\limits_{(x,y)\in B} f(x, y)$ das Minimum von f auf B

(d) Die Extremwerte von f auf M lassen sich über die Extremwerte im Inneren M° von M (vgl. Aufgabenteil **(a)**) und die Extremwerte auf dem Rand $\partial M = B$ von M (vgl. Aufgabenteil **(b)**) ermitteln. Das Maximum von f auf M° ist 1 in Punkt $(0, 0) \in M^\circ$ und das Minimum ist -1 beispielsweise in $(0, \sqrt{\pi}) \in M^\circ$. Nach Aufgabenteil **(b)** ist 0 das Maximum auf ∂M und -1 das Minimum. Somit wird das Maximum $1 = \max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y)$ von f auf M im Punkt $(0, 0)$ angenommen. Das Minimum $-1 = \min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y)$ wird beispielsweise in den Punkten $(0, \pm\sqrt{\pi})$, P_5, P_6, P_7 oder P_8. Zur Veranschaulichung wir hier in obige Skizze noch die Menge M eingezeichnet. Dies ist nicht für die Lösung dieser Aufgabe gefordert:



Aufgabe H 83. *Modell: Extrema unter Nebenbedingungen*

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$, sowie $M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y^2 = 0\right\}$ und $N := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\right\}$.

Das in der Präsenzübung benutzte Modell von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06/

(a) Skizzieren sie die Nullstellenmenge N_0 und die Vorzeichenverteilung von f sowie die Mengen M und N im Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$.

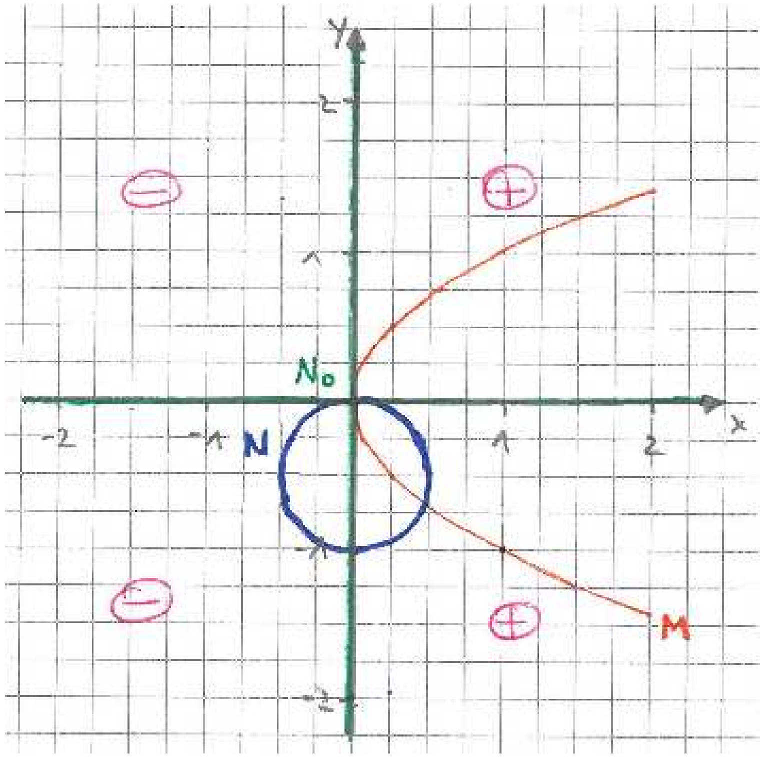
(b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf M und ermitteln sie jeweils deren Typ.

(c) Parametrisieren Sie M durch eine Funktion $c\colon \mathbb{R} \to M$. Prüfen Sie die Existenz von Extremwerten von f auf M, indem Sie die Funktion $f \circ c$ untersuchen.

(d) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf N und ermitteln sie jeweils deren Typ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$, also beschreibt N_0 genau die beiden Koordinatenachsen. Für $x > 0$ und $y \neq 0$ gilt $f(x,y) > 0$ und für $x < 0$ und $y \neq 0$ gilt $f(x,y) < 0$. Weiter beschreibt M eine Normalparabel, bei der x als Funktion von y beschrieben wird (also in Richtung der positiven x-Achse geöffnet ist). N beschreibt einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Damit ergibt sich die folgende Skizze:



(b) Es ist $g_M(x,y) = x - y^2$. Aus $\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g_M(x,y) = 0$ und $g(x,y) = 0$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$y^2 + \lambda = 0 \tag{8}$$
$$2y(x - \lambda) = 0 \tag{9}$$
$$x - y^2 = 0 \tag{10}$$

Aus (9) folgt $y = 0$ oder $x = \lambda$.

Ist $y = 0$, so folgt $x = 0$ aus (10) und $\lambda = 0$ aus (8).

Ist $y \neq 0$, also $\lambda = x$, so folgt $x = y^2 = -x$ mit (8) und (10). Somit gilt $x = \lambda = 0$ und es folgt $y = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Folglich ist der einzige Kandidat der Punkt $(0,0)$ und aus der Vorzeichenverteilung ist ersichtlich, dass es sich hierbei um ein Minimum handelt: $f(0,0) = 0$ und wegen $x = y^2 > 0$ für $y \neq 0$ ist ansonsten $f(x,y) > 0$ auf M.

(c) M lässt sich parametrisieren durch die Kurve $c : \mathbb{R} \to M : t \mapsto (t^2, t)$. Damit gilt $(f \circ c)(t) = t^4$. Wir bestimmen nun die Extremstellen von $f \circ c$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f \circ c)(t) = 4t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,(f \circ c)(t)\bigg|_{t=-1} = -4 < 0 < 4 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,(f \circ c)(t)\bigg|_{t=1} \Rightarrow (f \circ c) \text{ hat bei } t = 0 \text{ ein Minimum.}$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (f \circ c)(t) = +\infty \Rightarrow (f \circ c) \text{ nimmt auf } M \text{ kein Maximum an.}$$

Somit besitzt f auf M kein Maximum und nimmt sein Minimum $\min\limits_{(x,y) \in M} f(x,y) = (f \circ c)(0) = 0$ im Punkt $c(0) = (0,0)$ an.

(d) Es ist $g_N(x,y) = x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Aus $\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g_N(x,y) = 0$ und

$g(x,y) = 0$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$y^2 + 2\lambda x = 0 \tag{11}$$

$$2xy + 2\lambda\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{12}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \tag{13}$$

Ist $y = 0$, so folgt $\lambda = 0$ aus (12) und $x = 0$ aus (13).
Ist $y = -\frac{1}{2}$, so folgt $x = 0$ aus (12) und $x \neq 0$ aus (11). Somit führt dies zu keiner Lösung.
Sei nun $y \notin \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$. Dann gilt $x \neq 0 \neq \lambda$ mit (11). Daher folgt $\lambda = -\frac{y^2}{2x}$ aus (11) und $\lambda = -\frac{xy}{y+\frac{1}{2}}$ aus (12). Durch Gleichsetzen und Multiplikation mit den Nennern erhalten wir

$$-2x^2y = -y^2\left(y + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4x^2 = y(2y+1)\ .$$

Setzen wir diese Identität in die mit 4 multiplizierte Gleichung (13) ein, so erhalten wir

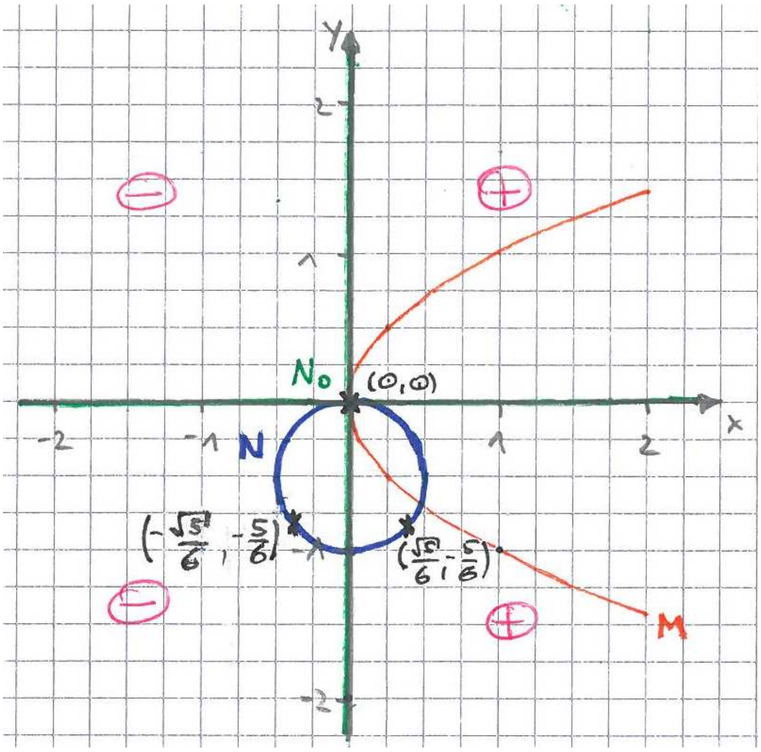
$$6y^2 + 5y = 0 \overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} y = -\frac{5}{6}\ .$$

Aus (13) ergibt sich damit $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{6}$. Damit ist $\lambda = -\frac{y^2}{2x} = \mp\frac{5\sqrt{5}}{6}$.
Aus der Vorzeichenverteilung ist direkt ersichtlich, dass der Punkt $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f eingeschränkt auf N ist. Weiter gilt

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right) = -\frac{25\sqrt{5}}{216}\ , \qquad f\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right) = \frac{25\sqrt{5}}{216}\ .$$

Da N kompakt und f stetig ist, besitzt f nach dem Satz vom Minimum und Maximum sowohl ein Maximum als auch ein Minimum auf N. Da hierfür nur die Punkte $\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ und $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ in Frage kommen, nimmt f sein Minimum $-\frac{25\sqrt{5}}{216} = \min\limits_{(x,y)\in N} f(x,y)$ im Punkt $\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ und sein Maximum $\frac{25\sqrt{5}}{216} = \max\limits_{(x,y)\in N} f(x,y)$ im Punkt $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, -\frac{5}{6}\right)$ an.

Abschließend nochmal die Skizze aus Aufgabenteil **(a)** mit eingetragenen kritischen Punkten auf M und N. Dies ist nicht für die Lösung dieser Aufgabe gefordert:



Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 5.7.–11.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 84. *Rotation und Potentiale*

Berechnen Sie jeweils die Rotation der folgenden Vektorfelder. Welche besitzen ein Potential?

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x^3y - y^2z + z^2 \\ x^4 - 2xyz \\ 2xz - xy^2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z\,\mathrm{e}^x \sin(y) \\ z\,\mathrm{e}^x \cos(y) \\ \mathrm{e}^x \sin(y) \end{pmatrix}$

(c) $f_3 \colon D \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{xy}{z} \\ x\ln(z) \\ x^2z \end{pmatrix}$ für $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z > 0\right\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, besitzt f_1 ein Potential.

(b) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, besitzt f_3 ein Potential.

(c) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f_3 = \begin{pmatrix} -\frac{x}{z} \\ -\frac{xy}{z^2} - 2xz \\ \ln(z) - \frac{x}{z} \end{pmatrix}$$

Da dieses Vektorfeld nicht null ist, besitzt f_3 kein Potential.

Aufgabe H 85. *Divergenz, Rotation und Jacobi-Matrix*

Sei $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\sin(y^2) \\ xz\cos(y) \\ x\,\mathrm{e}^{yz} \end{pmatrix}$ und $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^y + z \\ y^2\cos(z) \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f und g.

(b) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation von f.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{J}(g \circ f)\,(\pi, 0, 1)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\mathrm{J}f\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(y^2) & 2xy\cos(y^2) & 0 \\ z\cos(y) & -xz\sin(y) & x\cos(y) \\ \mathrm{e}^{yz} & xz\,\mathrm{e}^{yz} & xy\,\mathrm{e}^{yz} \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{J}g\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{y} & x\,\mathrm{e}^{y} & 1 \\ 0 & 2y\cos(z) & -y^2\sin(z) \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen

$$\operatorname{div} f = \sin(y^2) - xz\sin(y) + xy\,\mathrm{e}^{yz},$$
$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} xz\,\mathrm{e}^{yz} - x\cos(y) \\ -\mathrm{e}^{yz} \\ z\cos(y) - 2xy\cos(y^2) \end{pmatrix}$$

(c) Wir nutzen die Kettenregel:

$$\mathrm{J}(g\circ f)\,(\pi,0,1) = \mathrm{J}g\,(f(\pi,0,1))\cdot \mathrm{J}f\,(\pi,0,1)\,.$$

Also berechnen wir

$$f(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{J}g\,(0,\pi,\pi) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\pi} & 0 & 1 \\ 0 & -2\pi & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{J}f\,(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \pi \\ 1 & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\mathrm{J}(g\circ f)\,(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ -2\pi & 0 & -2\pi^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 86. *Laplace-Operator*

Welche der folgenden Abbildungen sind harmonisch?

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3y - xy^3\,.$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 - 2z^2 + \cos^2(x) + 2y^2\sin^2(x)\,.$

(c) $f_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{x}\sin(y) + \mathrm{e}^{y}\cos(z)\,.$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 6xy,$$
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -6xy,$$

also gilt $\Delta f_1 = 6xy - 6xy = 0$ und f_1 ist harmonisch.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= 2x - 2\cos(x)\sin(x) + 4y^2\sin(x)\cos(x) \\
&= 2x + (2y^2-1)\sin(2x), \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} &= 2 + 2(2y^2-1)\cos(2x), \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} &= 4\sin^2(x), \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} &= -4,
\end{aligned}$$

also ist

$$\Delta f_2 = -2 + 2(2y^2-1)\cos(2x) + 4\sin^2(x) = 4(y^2-1)\cos(2x).$$

Im letzten Schritt verwenden wir $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
Diese Abbildung ist nicht konstant Null, z.B. für $x = 0$ und $y = 2$, also ist f_2 nicht harmonisch.

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} &= \mathrm{e}^x\sin(y), \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} &= -\mathrm{e}^x\sin(y) + \mathrm{e}^y\cos(z), \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} &= -\mathrm{e}^y\cos(z),
\end{aligned}$$

also ist $\Delta f_3 = 0$ und f_3 ist harmonisch.

Aufgabe H 87. *Parametrisierung von Kurven*

Bestimmen Sie eine stückweise reguläre Parametrisierung der folgenden Kurven.

(a) Der Streckenzug von $(0,0)^\intercal$ über $(-3,-2)^\intercal$ und $(-1,-4)^\intercal$ nach $(0,0)^\intercal$.

(b) Das Stück eines (im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen) Kreises um $(3,2)^\intercal$ von $(3,-1)^\intercal$ nach $(6,2)^\intercal$.

(c) Das Stück eines (im mathematisch negativen Sinn, also im Uhrzeigersinn durchlaufenen) Kreises um $(3,2)^\intercal$ von $(6,2)^\intercal$ nach $(3,-1)^\intercal$.

(d) Die Kurve $K = \left\{(x,y,z) \in Q \,\middle|\, x = y,\ z \geqq 0\right\}$ von $(1,1,0)^\intercal$ nach $(-1,-1,0)^\intercal$, wobei $Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z = 2\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten zuerst jeden der drei Streckenabschnitte einzeln und erhalten zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
D_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t &\mapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(1-t) + \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}t = \begin{pmatrix}-3t\\-2t\end{pmatrix} \\
D_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}^2 \colon t &\mapsto \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}(2-t) + \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}(t-1) = \begin{pmatrix}2t-5\\-2t\end{pmatrix} \\
D_3 \colon [2,3] \to \mathbb{R}^2 \colon t &\mapsto \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}(3-t) + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(t-2) = \begin{pmatrix}t-3\\4t-12\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zusammengesetzt erhalten wir als mögliche Parametrisierung für den Streckenzug

$$C_1\colon [0,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} -3t \\ -2t \end{pmatrix}, & t \in [0,1] \\ \begin{pmatrix} 2t-5 \\ -2t \end{pmatrix}, & t \in [1,2] \\ \begin{pmatrix} t-3 \\ 4t-12 \end{pmatrix}, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

(b) Die Kurve ist ein Viertel eines Kreises um $(3,2)^\intercal$ mit Radius 3. Ein Kreis um $(3,2)^\intercal$ mit Radius 3 und Startpunkt $(6,2)^\intercal$ ist parametrisiert durch

$$\tilde{C}_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t)+3 \\ 3\sin(t)+2 \end{pmatrix}.$$

Mögliche Parametrisierungen der Kurve sind also gegeben durch

$$C_2\colon \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t)+3 \\ 3\sin(t)+2 \end{pmatrix} \text{ oder}$$
$$C_3\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\sin(t)+3 \\ -3\cos(t)+2 \end{pmatrix}.$$

(c) Ausgehend von der Parametrisierung C_3 in (b), erhalten wir eine mögliche Parametrisierungen der Kurve durch Substitution von t durch $\frac{\pi}{2} - t$. Dies ergibt wegen $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$ und $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ folgende Parametrisierung.

$$C_4\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t)+3 \\ -3\sin(t)+2 \end{pmatrix}.$$

(d) Als Ansatz für eine reguläre Parametrisierung der Kurve schreiben wir

$$C_5\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit noch zu bestimmenden und von t abhängigem $(x,y,z)^\intercal \in Q$. Wegen $x = y$, $C_5(0) = (1,1,0)^\intercal$ und $C_5(1) = (-1,-1,0)^\intercal$ setzen wir

$$x = (1-2t) = y.$$

Aus $x^2 + y^2 + z = 2$ folgt damit, dass $z = 2 - 2x^2 = 2 - 2(1-2t)^2 = 8t(1-t)$ sein muss. Wir erhalten daher die folgende Parametrisierung der Kurve.

$$C_5\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-2t \\ 8t(1-t) \end{pmatrix}$$

Online-Aufgabe.
Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 88. *Kurvenintegrale von Vektorfeldern*

Sei $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y^2 = z^2,\ 0 \leqq z \leqq 2,\ y \geqq 0\right\}$.
Berechnen Sie die Kurvenintegrale der folgenden Vektorfelder längs der Kurve K von $(0,0,0)$ nach $(4,2,2)$.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x^2y \\ -5xyz \\ y\,\mathrm{e}^z \end{pmatrix}$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^x + z \\ \mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix}$.

(*Hinweis:* Vergleichen Sie mit Aufgabe P80.)

Lösungshinweise hierzu:

Wir parametrisieren K durch $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t \end{pmatrix}$. Also ist $C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^2 f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^2 \begin{pmatrix} 7t^5 \\ -5t^4 \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^2 14t^6 - 5t^4 + t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[2t^7 - t^5\right]_0^2 + \int_0^2 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \\
&= 224 + \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \\
&= 224 + 2\mathrm{e}^2 - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^2 \\
&= 225 + \mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

(b) Durch $h(x,y,z) = y\mathrm{e}^x + xz$ wird ein Potential für das Vektorfeld g gegeben (siehe Aufgabe P80b). Also berechnen wir

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = h(4,2,2) - h(0,0,0) = 2\mathrm{e}^4 + 8.$$

Bemerkung: Wenn man versucht, dieses Kurvenintegral mit Hilfe der Parametrisierung C zu berechnen, muss man eine Funktion integrieren, die den Term e^{t^2} involviert — dadurch ist es sehr schwer direkt zu berechnen. Nutzen Sie Ihr Potential!

Aufgabe H 89. *Länge einer Kurve und Kurvenintegral*

Sei K die Kurve $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \cosh(x),\ 0 \leqq x \leqq 2\right\}$.

(a) Bestimmen Sie die Länge von K.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto y\cosh(x)$. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

Lösungshinweise hierzu: Eine reguläre Parametrisierung von K ist durch

$$C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (t, \cosh(t))^\intercal$$

gegeben. Wir berechnen

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Die Länge von K ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_K 1 \,\mathrm{d}\,s &= \int_0^2 \sqrt{1+\sinh^2(t)}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^2 \cosh(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= [\sinh(t)]_0^2 \\ &= \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}. \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^2 \sinh(t)\cosh(t)\sqrt{1+\sinh^2(t)}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^2 \cosh(t)\sinh^2(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{1}{3}\sinh^3(t)\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{\mathrm{e}^6 - 3\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-6}}{24}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 90. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + (\alpha - 1)x_2 \\ x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + \alpha(x_2 - 1) \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Kreises K durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat und geben Sie für diese α ein Potential an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a) für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Umlaufintegral $\oint_K g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bestimmung der Rotation:

$$\operatorname{rot} g_\alpha = \frac{\partial\,(g_\alpha)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\,(g_\alpha)_1}{\partial x_2} = \left(x_1x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + \mathrm{e}^{x_1x_2}\right) - \left(x_1x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + \mathrm{e}^{x_1x_2} + (\alpha-1)\right) = 1-\alpha$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist die Existenz eines Potentials äquivalent zu $\operatorname{rot} g_\alpha = 0$. Damit existiert genau dann ein Potential, wenn $\alpha = 1$ ist.
Wir bestimmen ein Potential von g_1.
Es ist $(g_1)_1(x_1, x_2) = x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}$, also

$$U(x_1, x_2) = \int (g_1)_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\,x_1 = \int x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}\,\mathrm{d}\,x_1 = \mathrm{e}^{x_1x_2} + c(x_2).$$

Aus der Bedingung $U_{x_2}(x_1, x_2) = (g_1)_2(x_1, x_2)$ ergibt sich

$$x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + c_{x_2}(x_2) = x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + (x_2 - 1)$$

und somit $c_{x_2}(x_2) = x_2 - 1$. Daraus folgt, dass $c(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2$ ist. Ein mögliches Potential ist also gegeben durch

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto \mathrm{e}^{x_1x_2} + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2.$$

(b) Da K ein geschlossener Weg über ein Vektorfeld ist, welches ein Potential besitzt, ergibt sich sofort

$$\int_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0.$$

Es bleibt noch $\int_K g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für $\alpha \neq 1$ zu berechnen. Dazu bestimmen wir zuerst C':

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$g_\alpha(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2) + (\alpha - 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Das lässt sich benutzen, um die Berechnung des Integrals zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int_K g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_K \left(g_1(x) + (\alpha - 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}\right) \bullet \mathrm{d}\,x \\
&= \underbrace{\int_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x}_{=\,0} + \int_K (\alpha - 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\,x \\
&= (\alpha - 1)\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(t) - 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= (\alpha - 1)\int_0^{2\pi} -4(\sin(t))^2 + 4\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= (\alpha - 1)\left[-2(t - \sin(t)\cos(t)) + 2(\sin(t))^2 - 2\sin(t)\right]_0^{2\pi} \\
&= -4\pi(\alpha - 1)
\end{aligned}$$

Aufgabe H 91. *Zirkulation und Ausfluss*

Für ein Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine geschlossene Kurve K in $\mathbb{R}^2$ mit stückweise regulärer Parametrisierung $C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$, nennen wir

$$Z(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

die *Zirkulation* von f längs K und

$$A(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t$$

den *Ausfluss* von f durch K.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6xy \\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ und sei K der Rand des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, im mathematisch positiven Sinn orientiert. Berechnen Sie

(a) die Zirkulation $Z(f,K)$ von f längs K.

(b) den Ausfluss $A(f,K)$ von f durch K.

Lösungshinweise hierzu: Wir parametrisieren K in drei Stücken

$$C_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$C_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix},$$
$$C_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen sind

$$C_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_3'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

durch eine Vierteldrehung erhalten wir jeweils die für den Ausfluss benötigten Vektoren orthogonal dazu als

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_1'(t) = \begin{pmatrix} C_{12}'(t) \\ -C_{11}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_2'(t) = \begin{pmatrix} C_{22}'(t) \\ -C_{21}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_3'(t) = \begin{pmatrix} C_{32}'(t) \\ -C_{31}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Wir haben

$$Z(f,K) = \int_0^1 f(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 f(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 f(C_3(t)) \bullet C_3'(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= 0, \\
\int_0^1 f(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 6t(1-t) \\ \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 6t^2 - 6t + \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[2t^3 - 3t^2 - \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t\right]_0^1 \\
&= 2\mathrm{e} - 3, \\
\int_0^1 f(C_3(t)) \bullet C_3'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \mathrm{e}^{1-t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 -1 - \mathrm{e}^{1-t} \,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[-t + \mathrm{e}^{1-t}\right]_0^1 \\
&= -1 - \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Also ist $Z(f, K) = \mathrm{e} - 4$ die Summe dieser drei Integrale.

(b) Auf eine ähnliche Art und Weise, berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t &= \int_0^1 -\mathrm{e}^t - 1 \,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[-\mathrm{e}^t - t\right]_0^1 \\
&= -\mathrm{e} \\
\int_0^1 \begin{pmatrix} 6t(1-t) \\ \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t &= \int_0^1 6t - 6t^2 + \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[3t^2 - 2t^3 - \mathrm{e}^{1-t} + \mathrm{e}^t\right]_0^1 \\
&= 2\mathrm{e} - 1 \\
\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \mathrm{e}^{1-t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t &= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $A(f, K) = \mathrm{e} - 1$.