A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

15. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 57. *Potenzreihe*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n}(\alpha-4)^n$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ kann man eine Aussage über das Konvergenzverhalten mit Hilfe des Quotienten- bzw. Wurzelkriteriums treffen, für welche nicht?

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe für $\alpha \in \left\{\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben die Reihe als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3^n}{2n}(\alpha-4)^n$. Dann betrachten wir zum Beispiel (dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\alpha \neq 4$ ist, denn in diesem Fall ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es liegt trivialerweise Konvergenz vor)

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{3^{n+1}}{2(n+1)}|\alpha-4|^{n+1} \cdot \frac{2n}{3^n|\alpha-4|^n} \\ &= 3|\alpha-4| \cdot \frac{n}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 3|\alpha-4|.\end{aligned}$$

Mit dem Quotientenkriterium können wir dann folgern, dass die Reihe für alle α konvergiert, für die gilt $|3(\alpha-4)| < 1$, also $\alpha \in \left(\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right)$. Divergenz folgt, wenn $|3(\alpha-4)| > 1$, also wenn $\alpha > \frac{13}{3}$ oder $\alpha < \frac{11}{3}$. Im Falle $\alpha = \frac{11}{3}$ bzw. $\alpha = \frac{13}{3}$ kann man mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage treffen.

Alternativ können wir auch das Wurzelkiterium verwenden. Dazu betrachten wir

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{2n}|\alpha-4|^n} = 3|\alpha-4|\frac{1}{\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 3|\alpha-4|.$$

Damit können wir wieder auf Konvergenz schließen, wenn $|3(\alpha-4)| < 1$ ist, sowie auf Divergenz, wenn $|3(\alpha-4)| > 1$ ist. Im Falle $|3(\alpha-4)| = 1$ ist mit dem Wurzelkriterium keine Konvergenzaussage möglich.

(b) Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha = \frac{11}{3}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{2n}}_{=:b_n}.$$

Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alterniert und $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe im Falle $\alpha = \frac{11}{3}$ nach dem Leibnizkriterium.

Nun sei $\alpha = \frac{13}{3}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bekanntermaßen divergiert, liegt im Falle $\alpha = \frac{13}{3}$ keine Konvergenz vor.

Aufgabe H 58. *Konvergenzkriterien*

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

(a) Weisen Sie Konvergenz nach, indem Sie eine geeignete konvergente Majorante angeben.

(b) Weisen Sie Konvergenz nach, indem Sie das Wurzelkriterium verwenden.

(c) Zeigen Sie, dass mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe getroffen werden kann.

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben im Folgenden $a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar $0 < a_n \leqq \frac{1}{2^n}$. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergiert (geometische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$), konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium.

(b) Wir betrachten

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{4} & \text{, falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daher ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$ und es liegt nach dem Wurzelkriterium Konvergenz vor.

(c) Es ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{2^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}} & \text{, falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{4^n}{2^{n+1}} = 2^{n-1} & \text{, falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daher ist

$$0 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 < \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$$

und somit nach dem Quotientenkriterium keine Konvergenzaussage möglich.

Aufgabe H 59. *Reihenwerte bestimmen*

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe aus Aufgabe **H 58**, indem Sie diese in geeigneter Weise als Summe zweier geometrischer Reihen schreiben.

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}-\frac{n}{n+1}\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$. Dann ist $a_{2k} = \frac{1}{4^{2k}} = \frac{1}{16^k}$ und $a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{26}{15}.\end{aligned}$$

(b) Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$. Dann ist die gesuchte Reihe von der Form $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+2}-a_n)$, also eine Teleskopreihe (vgl. **P 55**). Durch Betrachtung der N-ten Partialsummen erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(a_{n+2}-a_n) &= (a_3-a_1)+(a_4-a_2)+(a_5-a_3)+(a_6-a_4)+\dots\\ &\qquad \dots + (a_{N+2}-a_N)+(a_{N+3}-a_{N+1})+(a_{N+4}-a_{N+2})\\ &= a_{N+4}+a_{N+3}-a_2-a_1\\ &= \frac{N+4}{N+5}+\frac{N+3}{N+4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\\ &\xrightarrow{N\to\infty} 1+1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Aufgabe H 60. *Konvergenzuntersuchung*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n \cdot (n!)^2}$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7(3^n+5^n)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $a_n = \dfrac{(2n)!}{5^n \cdot (n!)^2}$. Wir betrachten

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2n+2)!}{5^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}\cdot\frac{5^n(n!)^2}{(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{5\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\\ &= \frac{4n^2+6n+2}{5\cdot(n^2+2n+1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{5} < 1.\end{aligned}$$

Daher liegt nach dem Quotientenkriterium (absolute) Konvergenz vor.

(b) Sei $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \geqq \frac{1}{2\sqrt{4n}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{4n}.\end{aligned}$$

Da aber die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ divergiert, divergiert auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Minorantenkriterium.

Alternative: Die Reihe ist eine Teleskopreihe. Die N-te Partialsumme ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{N+1}-\sqrt{N})\\ &= \sqrt{N+1}-1 \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.\end{aligned}$$

Daher ist die Reihe divergent.

(c) Sei $a_n = \dfrac{7^n}{n^7(3^n+5^n)}$. Dann ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{7}{\sqrt[n]{n^7}\cdot\sqrt[n]{3^n+5^n}}.$$

Es ist

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leqq \sqrt[n]{3^n+5^n} \leqq \sqrt[n]{2\cdot 5^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 5,$$

sodass nach dem Sandwichsatz $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n} = 5$ gilt. Zusammen mit $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^7}$ ergibt sich dann, dass $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{7}{5} > 1$. Daher ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium divergent.

(d) Sei $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$. Dann ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}\Bigg]^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

Daher ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2-x+1}+\cos(x)}{\sqrt{4x^2-2x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}x^3}{2\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{x}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\frac{-2}{x} \leqq \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x} \leqq \frac{2}{x}$$

und mit Satz 1.5.6

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Es folgt

$$0 \leqq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x} \leqq 0,$$

daher

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x} = 0.$$

(b) Es gilt

$$\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2} = \frac{(x^2-1)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{-3}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2}}.$$

Weil $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2}) = +\infty$ gilt, ist

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2}} = 0.$$

(c) Weil $\cos(x)$ begrenzt ist, und $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-2x} = +\infty$, gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{4x^2-2x}} = 0.$$

(Vergleichen Sie mit Teil (a).) Es folgt, dass

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-x+1}+\cos(x)}{\sqrt{4x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-x+1}}{\sqrt{4x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{3x^2-x+1}{4x^2-2x}}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{4x^2-2x} = \frac{3}{4}$$

(siehe Satz 1.11.8), und so

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-x+1}+\cos(x)}{\sqrt{4x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{3x^2-x+1}{4x^2-2x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(siehe Satz 1.12.1(7)).

(d) Es gilt

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} x^3}{2\mathrm{e}^{2x} + \sqrt{x}} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-x} x^3}{2 + \mathrm{e}^{-2x}\sqrt{x}}.$$

Weil $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} x^3 = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x}\sqrt{x} = 0$ gilt, ist

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} x^3}{2\mathrm{e}^{2x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{-x} x^3}{2 + \mathrm{e}^{-2x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H 62. *Einseitige Grenzwerte*

Untersuchen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ für

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}} + \dfrac{2x^2+x+3}{4x^2+1}$,

(b) $f(x) = \dfrac{\tan(x) + x^2\cos(x) + 1}{3x^2\sin(x)}$.

Hinweise: Sie sollen die Regel von l'Hospital *nicht* anwenden!

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Abbildung $x \mapsto \dfrac{2x^2+x+3}{4x^2+1}$ ist in 0 stetig, also

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{2x^2+x+3}{4x^2+1} = \lim_{x\to 0-0} \frac{2x^2+x+3}{4x^2+1} = \frac{2\cdot 0^2+0+3}{4\cdot 0^2+1} = 3.$$

Daher müssen wir nur die Grenzwerte von $x \mapsto \dfrac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}}$ untersuchen. Zunächst bemerken wir, dass $\sqrt{x^2} = |x|$ gilt. Also ist für $x > 0$

$$\frac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}} = \frac{3x^2}{2\sin(x)x} = \frac{3x}{2\sin(x)}.$$

Also gilt

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{3x}{2\sin(x)} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0+0} \frac{x}{\sin(x)} = \frac{3}{2}$$

(vergleichen Sie mit Beispiel 1.12.5), und so ist

$$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}} + \frac{2x^2+x+3}{4x^2+1} \right) = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}.$$

Analog ist für $x < 0$

$$\frac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}} = -\frac{3x}{2\sin(x)}$$

und damit

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{-3x}{2\sin(x)} = -\frac{3}{2},$$

und

$$\lim_{x\to 0-0} \left(\frac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}} + \frac{2x^2+x+3}{4x^2+1} \right) = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}.$$

(b) Für $\dfrac{\pi}{2} > x > 0$ gilt $\tan(x) > 0$ und $x^2\cos(x) > 0$. Also ist

$$\frac{\tan(x) + x^2\cos(x) + 1}{3x^2\sin(x)} > \frac{1}{3x^2\sin(x)}.$$

Da $\lim_{x\to 0} 3x^2\sin(x) = 0$ ist, muss $\dfrac{1}{3x^2\sin(x)}$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ streben. Im Fall $\dfrac{\pi}{2} > x > 0$ gilt $3x^2\sin(x) > 0$ und damit

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{3x^2\sin(x)} = +\infty.$$

Also ist auch

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\tan(x) + x^2\cos(x) + 1}{3x^2\sin(x)} = +\infty.$$

Für $-\dfrac{1}{2} < x < 0$ ist $\tan(x) < 0$ und $\dfrac{1}{4} > x^2\cos(x) > 0$. Also ist

$$\frac{\tan(x) + x^2\cos(x) + 1}{3x^2\sin(x)} < \frac{5}{12x^2\sin(x)}.$$

Da für $-\dfrac{1}{2} < x < 0$ die Ungleichung $12x^2\sin(x) < 0$ gilt, ist

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{3x^2\sin(x)} = -\infty$$

und damit auch

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\tan(x) + x^2\cos(x) + 1}{3x^2\sin(x)} = -\infty.$$

Aufgabe H 63. *Stetigkeit*

Sei $p \geqq 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^3 - 2x^2 - x + 2)}{1 - x} & \text{für } x < 1, \\ \sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 7x + 1} & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ in Abhängigkeit von p.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit von p.

(c) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle 1 stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x \geqq 1$ ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 7x + 1} \\ &= \frac{(x^2 + px) - (x^2 + 7x + 1)}{\sqrt{x^2 + px} + \sqrt{x^2 + 7x + 1}} \\ &= \frac{(p - 7)x - 1}{\sqrt{x^2 + px} + \sqrt{x^2 + 7x + 1}}. \end{aligned}$$

Jetzt multiplieren wir Zähler und Nenner mit $\frac{1}{x}$,

$$f(x) = \frac{(p - 7) - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{p}{x}} + \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

zu erhalten. Also ist

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(p - 7) - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{p}{x}} + \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{p - 7}{2}.$$

(b) Für $x < 1$ ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2) = 0$ ist. Dieses Polynom hat nur eine Nullstelle, die kleiner als 1 ist, nämlich $x = -1$.

Für $x \geqq 1$ ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn

$$\sqrt{x^2 + px} = \sqrt{x^2 + 7x + 1}$$

ist.

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 + px = x^2 + 7x + 1.$$

Also muss $(p - 7)x = 1$ gelten. Für $p = 7$ ist diese Gleichung nicht lösbar; für $p \neq 7$ folgt $x = \frac{1}{p-7}$. Da wir $x \geqq 1$ angenommen haben, ist dies genau dann eine weitere Nullstelle von f , wenn $\frac{1}{p-7} \geqq 1$ ist, also $7 < p \leqq 8$.

(c) Es gilt

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \left(\sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 7x + 1} \right) = \sqrt{1 + p} - 3,$$

weil die Abbildung $x \mapsto \sqrt{x^2+px} - \sqrt{x^2+7x+1}$ stetig ist. Andererseits gilt

$$\frac{2(x^3-2x^2-x+2)}{1-x} = -2x^2+2x+4$$

für $-1 < x < 1$, also ist

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (-2x^2+2x+4) = 4.$$

Also ist f genau dann stetig, wenn $4 = \sqrt{1+p} - 3$ ist, also für $p = 48$.

Aufgabe H 64. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \left(\sin(\frac{1}{x})\right)^2 & \text{für } x < 0, \\ x^2 + 2x + 1 & \text{für } x \geqq 0. \end{cases}$

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass f im Punkt 2 stetig ist.

(b) Finden Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils mit Grenzwert 0 derart, dass gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$.

(c) Ist f stetig im Punkt 0? Erklären Sie Ihre Antwort.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Für $0 < \delta < 1$ und $x \in [2, 2+\delta)$ ist

$$|f(x)-f(2)| = |x^2+2x-8| = |(x+4)(x-2)| = (x+4)(x-2) < (6+\delta)\delta = 6\delta+\delta^2 < 7\delta.$$

Damit ist $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $0 < \delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ und $x \in [2, 2+\delta)$. Andererseits gilt für $0 < \delta < 1$ und $x \in (2-\delta, 2]$

$$|f(x) - f(2)| = |(x+4)(x-2)| = -(x+4)(x-2) < (6-\delta)\delta < 6\delta,$$

also ist $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $0 < \delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$ und $x \in (2-\delta, 2]$.
Damit folgt, dass $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ ist für alle $\delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ und $x \in (2-\delta, 2+\delta)$. Also ist f an der Stelle 2 stetig.

(b) Sei $a_n := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(0) = 1.$$

Sei $b_n = \frac{1}{n\pi}$. Wieder ist $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. In diesem Fall haben wir

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

(c) Wäre f im Punkt 0 stetig, so würde $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(0)$ für alle Folgen c_n mit $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ gelten. In Teil **(b)** haben wir jedoch zwei Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, für die $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n)$ verschiedenen sind. Also können diese zwei Werte nicht beide gleich $f(0)$ sein, und f ist am Punkt 0 nicht stetig. (Explizit ist $f(0) = 1$, und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = 0 \neq 1$ verletzt das Kriterium für Stetitgkeit.)

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 65. *Zwischenwertsatz*

Begründen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Gleichung $x^3 - x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = 0$ hat mindestens zwei verschiedene Lösungen, die im Intervall $(0, 2)$ liegen.

(b) Die Gleichung $\dfrac{13x + 12}{x^4 - 1} = 1$ hat eine Lösung im Intervall $(-1, 1)$.

(c) Die Gleichung $\mathrm{e}^x + \ln(x) = 3$ hat genau eine Lösung in $\mathbb{R}^+$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}$ ist stetig und es gilt $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = -\frac{1}{2}$ und $f(2) = \frac{13}{2} - \sqrt{2} > 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano hat f daher jeweils mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$ sowie im Intervall $(1, 2)$ und die Aussage ist gezeigt.

(b) Die Funktion $g\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{13x + 12}{x^4 - 1}$ ist stetig und es gilt $f(0) = -12$. Zudem gilt

$$\lim_{x \to -1+0} g(x) = +\infty.$$

Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes gibt es daher ein $x_0 \in (-1, 0)$ so, dass $g(x_0) = 1$.

(c) Die Funktion $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x + \ln(x)$ ist stetig und es gilt $h(1) = \mathrm{e} < 3$ und $h(2) = \mathrm{e}^2 + \ln(2) > 3$. Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes gibt es daher ein $x_0 \in (1, 2)$ so, dass $h(x_0) = 3$. Diese Lösung ist zudem eindeutig, da die Funktion h streng monoton steigend ist.

Aufgabe H 66. *Minimum und Maximum*

Gegeben ist das Polynom $q(x) = x^5 - 8x^2 + 4$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$f(x) = |q(x)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $(-2, 2)$ eine Minimalstelle x_- hat mit $f(x_-) < 4$.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x) \geqq 4$ für alle $|x| \geqq 2$.

(c) Nimmt f auf $\mathbb{R}$ ein Minimum an? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion f ist stetig und nimmt daher auf dem Intervall $[-2, 2]$ ein Minimum an nach dem Satz von Weierstraß aus der Vorlesung. Sei x_- eine entsprechende Minimalstelle. Da $f(-2) = 60$, $f(2) = 4$ und $f(1) = 3$ gilt, liegt x_- im offenen Intervall $(-2, 2)$ mit $f(x_-) < 4$.

(b) Schreibe zunächst $q(x) = x^2(x^3 - 8) + 4$. Für $x \geqq 2$ gilt dann

$$f(x) = |x^2(x^3 - 8) + 4| = x^2(x^3 - 8) + 4 \geqq 4,$$

da $x^2 \geqq 4$ und $x^3 - 8 \geqq 0$. Für $x \leqq -2$ gilt $x^2 \geqq 4$ und $x^3 - 8 \leqq -16$, sodass $x^2(x^3 - 8) \leqq -64$, d.h.

$$f(x) = |x^2(x^3 - 8) + 4| \geqq 60 > 4.$$

(c) Mit Teil (b) folgt unmittelbar, dass das lokale Minimum aus Teil (a) zugleich ein globales Minimum ist.

Aufgabe H 67. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-1)^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+1)^n}{n+3}$

Zeichnen Sie jeweils den Konvergenzkreis und entscheiden Sie, welche der Reihen an welchen der folgenden Stellen konvergieren: $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 2$, $z_3 = \frac{\mathrm{i}}{2}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Potenzreihe hat den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und die Koeffizienten $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1.$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 1.

(b) Die Potenzreihe hat den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und die Koeffizienten $a_n = \dfrac{n}{2^n}$. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 2.

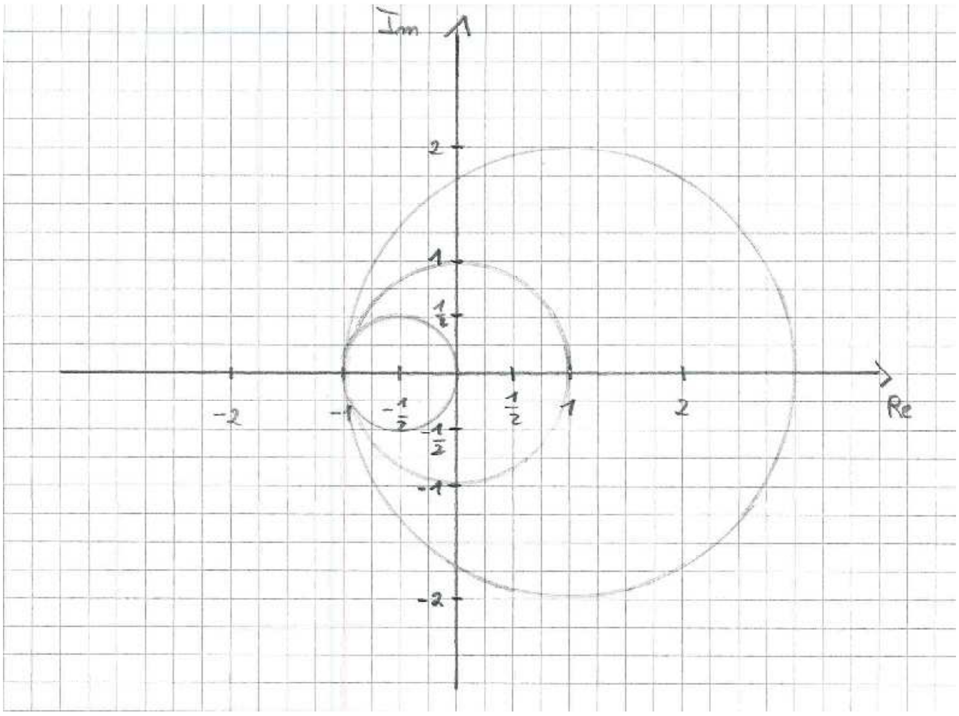
(c) Die Potenzreihe lässt sich umschreiben zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(z+\frac{1}{2})^n}{n+3}$$

und hat den Entwicklungspunkt $z_0 = -\frac{1}{2}$ und die Koeffizienten $a_n = \dfrac{2^n}{n+3}$. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+4}}{\frac{2^n}{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+3)}{2^n\cdot(n+4)} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{n+3}{n+4} = 2.$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$.



An $z_1 = \frac{1}{2}$ konvergieren demnach ausschließlich die Potenzreihen aus Teil (a) und Teil (b). An $z_2 = 2$ konvergiert ausschließlich die Potenzreihe aus Teil (b). An $z_3 = \frac{\mathrm{i}}{2}$ konvergieren wiederum ausschließlich die Potenzreihen aus Teil (a) und Teil (b).

Aufgabe H 68. *Die komplexe Exponentialfunktion*

Gegeben ist die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \exp(z) = \mathrm{e}^z$.

(a) Bestimmen Sie $|\exp(r + \mathrm{i}\varphi)|$ und $\arg(\exp(r + \mathrm{i}\varphi))$ für $r, \varphi \in \mathbb{R}$.
(Beachten Sie, dass das Argument im Intervall $[0, 2\pi)$ liegen muss.)

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(c) Bestimmen Sie eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ so, dass die Einschränkung $\exp|_S\colon S \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ mit $\exp|_S(z) = \exp(z)$ bijektiv ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\exp(r + \mathrm{i}\varphi) = \exp(r)\exp(\mathrm{i}\varphi) = \mathrm{e}^r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)).$$

Daher gilt $|\exp(r + \mathrm{i}\varphi)| = \mathrm{e}^r$ und $\arg(\exp(r + \mathrm{i}\varphi)) = \varphi'$, wobei φ' der eindeutige Wert in $[0, 2\pi)$ ist, für den $\sin(\varphi) = \sin(\varphi')$ bzw. $\cos(\varphi) = \cos(\varphi')$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $\varphi' = \varphi + 2k\pi$.

(b) Wir nutzen Teil (a). Da $\mathrm{e}^r \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) \neq 0$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, liegt 0 nicht im Bild der Exponentialfunktion. Sei nun $z \neq 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Wir schreiben $z = s(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ für $s \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Sei $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathrm{e}^r = s$. Dann gilt mit obiger Formel aus Teil (a), dass $\exp(r + \mathrm{i}\varphi) = z$ und somit $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(c) Wir definieren die Menge

$$S := \{z \in \mathbb{C} | z = r + \mathrm{i}\varphi \text{ mit } r \in \mathbb{R} \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Analog zu Teil (b) folgt, dass die Einschränkung $\exp|_S\colon S \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ surjektiv ist. Seien nun $z_1 = r_1 + \mathrm{i}\varphi_1$ und $z_2 = r_2 + \mathrm{i}\varphi_2$ in S mit $\exp|_S(z_1) = \exp|_S(z_2)$, d.h.

$$\mathrm{e}^{r_1}(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)) = \mathrm{e}^{r_2}(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)).$$

Da jeder komplexen Zahl Argument und Betrag eindeutig zugeordnet werden können, folgt $\varphi_1 = \varphi_2$ und $\mathrm{e}^{r_1} = \mathrm{e}^{r_2}$. Die e-Funktion ist zudem injektiv, sodass $r_1 = r_2$. Somit ist die Einschränkung $\exp|_S$ injektiv, also auch bijektiv.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 69. *Randuntersuchung*

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}} z^n$. Untersuchen Sie die Potenzreihe an den folgenden Stellen auf Konvergenz.

$$z_1 = \sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{2}, \quad z_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{i}, \quad z_4 = 1 + \mathrm{i}.$$

Lösungshinweise hierzu:

- Sei $z = \sqrt{2}$, dann betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}} (\sqrt{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Da gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq n$ für $n \in \mathbb{N}$ und die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bekanntlich divergent ist, ist die Potenzreihe an der Stelle $z = \sqrt{2}$ nach dem Minorantenkriterium divergent.

- Sei $z = -\sqrt{2}$. Dann wir die Potenzreihe zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}} (-\sqrt{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Da die Reihe alterniert und der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{n}}$ monoton fallend gegen Null konvergiert, konvergiert die Potenzreihe an der Stelle $z = -\sqrt{2}$ nach dem Leibnizkriterium.

- Wir verwenden hier folgendes allgemeine Resultat:

Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$ beide konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}.$$

(Das lässt sich zum Beispiel so einsehen: Setzen wir

$$b_n = \begin{cases} a_{2k} & \text{, falls } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{, falls } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

so hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dasselbe Konvergenzverhalten und denselben Grenzwert wie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}$ – es werden schließlich nur weitere Nullen addiert. Analog hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ a_{2k+1} & \text{, falls } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

dasselbe Konvergenzverhalten und denselben Grenzwert wie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$.
Da $b_n + c_n = a_n$, folgt nach dem Grenzwertsatz für Reihen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert und gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}.)$$

Sei $z = \sqrt{2}\,\mathrm{i}$ und $a_n = \frac{1}{\sqrt{n2^n}}(\sqrt{2}\,\mathrm{i})^n$. Dann ist

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\,\mathrm{i} & \text{, falls } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2k}} & \text{, falls } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Da die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$ bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ beide nach dem Leibnizkriterium konvergieren (alternierend, Folge der Beträge ist jeweils eine monotone Nullfolge), ist auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}}(\sqrt{2}\,\mathrm{i})^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{2k}} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

konvergent.

- Um schließlich den Fall $z = 1 + \mathrm{i}$ zu behandeln, ist es zweckmäßig, Polarkoordinaten zu verwenden. Es ist dann

$$\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})^n &= \left(\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4))\right)^n \\
&= \sqrt{2}^n(\cos(n\pi/4) + \mathrm{i}\sin(n\pi/4)) \\
&= \sqrt{2}^n \cdot \begin{cases} \cos(k\pi) + \mathrm{i}\sin(k\pi) & \text{, falls } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ \cos(k\pi + \pi/4) + \mathrm{i}\sin(k\pi + \pi/4) & \text{, falls } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ \cos(k\pi + \pi/2) + \mathrm{i}\sin(k\pi + \pi/2) & \text{, falls } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ \cos(k\pi + 3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(k\pi + 3\pi/4) & \text{, falls } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \\
&= \sqrt{2}^n \cdot \begin{cases} (-1)^k & \text{, falls } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k\frac{1}{2}\sqrt{2} + (-1)^k\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i} & \text{, falls } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ (-1)^k\mathrm{i} & \text{, falls } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ (-1)^{k+1}\frac{1}{2}\sqrt{2} + (-1)^k\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i} & \text{, falls } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die Potenzreihe in folgender Weise als Summe nach dem Leibnizkriterium konvergenter Reihen schreiben (und ist somit selbst konvergent):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}}(1+\mathrm{i})^n = &\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{4k}} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4k+1}} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4k+1}} \\
&+ \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{4k+2}} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4k+3}} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4k+3}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 70. *Konvergenz von Potenzreihen*

Für $\alpha \in \{3, -4\}$ sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\mathrm{i})^n + \alpha^n}{n^\alpha + 1} (z - 2 + \mathrm{i})^n$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -4$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es sei $a_n = \frac{(3\mathrm{i})^n + 3^n}{n^3+1}$. Dann ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|(3\mathrm{i})^n + 3^n|}{n^3+1}} = 3 \frac{\sqrt[n]{|\mathrm{i}^n + 1|}}{\sqrt[n]{n}^3 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^3}}}.$$

Da $|\mathrm{i}^n + 1| \in \{0, \sqrt{2}, 2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 3.$$

(Achtung: Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert nicht, da die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte 0 und 3 besitzt!). Der Konvergenzradius ist also gegeben durch $\rho = \frac{1}{3}$. Den Entwicklungspunkt lesen wir ab als $2 - \mathrm{i}$. Damit ist klar, dass die Reihe im Inneren des Kreises um $2 - \mathrm{i}$ mit dem Radius $\frac{1}{3}$ (absolut) konvergiert und außerhalb divergiert.

Jetzt bleibt noch das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises zu betrachten, also auf der Menge $K_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 2 + \mathrm{i}| = \frac{1}{3}\}$.

Bemerkung: Im Allgemeinen kann es beliebig schwer werden, das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rand des Konvergenzkreises zu bestimmen. In (wichtigen) Spezialfällen genügt es aber, die Reihe der Beträge zu betrachten.

Wenn $z \in K_3$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(3\mathrm{i})^n + 1}{n^3+1} (z - 2 + \mathrm{i})^n \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 2}{n^3} \Big(\underbrace{|z - 2 + \mathrm{i}|}_{\overset{z \in K_3}{=} \frac{1}{3}} \Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ bekanntlich konvergiert, ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(3\mathrm{i})^n+1}{n^3+1} (z - 2 + \mathrm{i})^n \right|$ konvergent. Das bedeutet aber gerade, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\mathrm{i})^n+1}{n^3+1} (z - 2 + \mathrm{i})^n$ für jedes $z \in K_3$ absolut konvergiert. Das wiederum impliziert die Konvergenz für jedes $z \in K_3$.

Wir haben also insgesamt, dass die Potenzreihe genau dann konvergiert, wenn $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 2 + \mathrm{i}| \leqq \frac{1}{3}\}$.

(b) Sei nun $a_n = \frac{(3\mathrm{i})^n + (-4)^n}{n^{-4}+1}$. Dann gilt unter Verwendung von $|w + z| \leqq |w| + |z|$ bzw. $|w + z| \geqq ||w| - |z||$, dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 4 \cdot \frac{\sqrt[n]{\left|\left(\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)^n + (-1)^n\right|}}{\sqrt[n]{n^{-4} + 1}} \leqq 4 \cdot \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}}{1} \leqq 4 \cdot \sqrt[n]{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4,$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 4 \cdot \frac{\sqrt[n]{1 - \frac{3}{4}}}{\sqrt[n]{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Nach dem Sandwichsatz ist damit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4$ und der Konvergenzradius somit $\rho = \frac{1}{4}$. Der Entwicklungspunkt ist wie in **(a)** $2-\mathrm{i}$. Damit ist geklärt, dass die Potenzreihe im Innern des Kreises um $2-\mathrm{i}$ und mit Radius $\frac{1}{4}$ (absolut) konvergiert und außerhalb des Kreises divergiert.

Nun bleibt noch der Rand zu untersuchen, d.h. die Menge $K_{-4} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2+\mathrm{i}| = \frac{1}{4}\}$. Wir betrachten wieder die Beträge der Reihenglieder. Es ist

$$\begin{aligned}
|a_n(z-2+\mathrm{i})^n| &= \frac{|(3\mathrm{i})^n + (-4)^n|}{n^{-4}+1}\Big(\underbrace{|z-2+\mathrm{i}|}_{\overset{z\in K_{-4}}{=}\frac{1}{4}}\Big)^n \\
&= \frac{\left|\left(\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)^n + (-1)^n\right|}{n^{-4}+1} \\
&\geqq \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} \geqq \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Folge $(a_n(z-2+\mathrm{i})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $z \in K_{-4}$ keine Nullfolge ist (denn der Abstand zu 0 beträgt immer mindestens $\frac{1}{8}$). Daher kann auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-2+\mathrm{i})^n$ für $z \in K_{-4}$ nicht konvergieren.

Insgesamt ergibt sich damit, dass die Potenzreihe genau für $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2+\mathrm{i}| < \frac{1}{4}\}$ konvergiert.

Aufgabe H 71. *Ableitungen und Differenzierbarkeit*

(a) Bestimmen Sie jeweils Intervalle $I \subseteqq \mathbb{R}$ von maximaler Größe so, dass die folgenden Ausdrücke Funktionen von I nach $\mathbb{R}$ definieren. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen dieser Funktionen.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad g(x) = \ln\left(1-x^4\right).$$

(b) Bestimmen Sie ein Intervall $I \subseteqq \mathbb{R}$ von maximaler Größe so, dass der Ausdruck

$$f(x) = \sqrt{(2x-3)\cdot(2-x)^3}$$

eine Funktion von I nach $\mathbb{R}$ definiert. Untersuchen Sie diese Funktion auf Differenzierbarkeit. Betrachten Sie dabei insbesondere die Randpunkte des Definitionsbereiches.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ausdruck $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ist nicht definiert für $\sqrt{4-x^2} = 0$ und $4-x^2 < 0$. Wir erhalten daher als Definitionsbereich $I = (-2, 2)$. Mit der Kettenregel bestimmen wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = -\frac{1}{4-x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot\left(4-x^2\right)' \\ &= -\frac{1}{2\left(4-x^2\right)^{3/2}}\cdot(-2x) = \frac{x}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung erhalten wir mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f''(x) = \left(\frac{x}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}\right)' &= \frac{x'\left(4-x^2\right)^{3/2} - x\left(\left(4-x^2\right)^{3/2}\right)'}{\left(\left(4-x^2\right)^{3/2}\right)^2} \\ &= \frac{\left(4-x^2\right)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{2}\left(4-x^2\right)^{1/2}\cdot(-2x)}{\left(4-x^2\right)^3} \\ &= \left(4-x^2\right)^{-3/2} + 3x^2\left(4-x^2\right)^{-5/2} = \frac{4+2x^2}{(4-x^2)^{5/2}}\,. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $g(x) = \ln\left(1-x^4\right)$ ist nicht definiert für $1-x^4 \leqq 0$. Als Definitionsbereich erhalten wir daher $I = (-1, 1)$. Mit der Kettenregel folgt

$$g'(x) = \left(\ln\left(1-x^4\right)\right)' = \frac{1}{1-x^4}\cdot\left(1-x^4\right)' = \frac{1}{1-x^4}\cdot\left(-4x^3\right) = \frac{4x^3}{x^4-1}.$$

Wir berechnen $g''(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel

$$\begin{aligned} g''(x) = \left(\frac{4x^3}{x^4-1}\right)' &= \frac{\left(4x^3\right)'\cdot\left(x^4-1\right) - \left(4x^3\right)\cdot\left(x^4-1\right)'}{\left(x^4-1\right)^2} = \frac{12x^2\left(x^4-1\right) - 16x^6}{\left(x^4-1\right)^2} \\ &= \frac{-4x^6-12x^2}{(x^4-1)^2}\,. \end{aligned}$$

(b) Der Ausdruck $\sqrt{(2x-3)\cdot(2-x)^3}$ ist nicht definiert, falls $(2x-3)\cdot(2-x)^3 < 0$. Für $x > 2$ ist $(2x-3) > 0$ und $(2-x)^3 < 0$, sodass das Produkt beider Terme negativ wird. Für $x < \frac{3}{2}$ ist $(2x-3) < 0$ und $(2-x)^3 > 0$, sodass das Produkt beider Terme wieder negativ ist. Für $\frac{3}{2} \leqq x \leqq 2$ sind jedoch beide obigen Faktoren und somit auch ihr Produkt größer oder gleich 0. Wir erhalten daher als Definitionsbereich $I = [\frac{3}{2}, 2]$. Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f auf dem offenen Intervall $(\frac{3}{2}, 2)$ differenzierbar. Wir untersuchen nun die Randpunkte mit Hilfe des Differenzenquotienten.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}+0} \frac{\sqrt{(2x-3)\cdot(2-x)^3}}{x-\frac{3}{2}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}+0} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{(2-x)^3}}{x-\frac{3}{2}} =$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}+0} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2-x)^3}}{\sqrt{x-\frac{3}{2}}} = +\infty$$

Damit ist die Funktion f an der Stelle $x = \frac{3}{2}$ nicht differenzierbar.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{\sqrt{(2x-3)\cdot(2-x)^3}}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} (-1)\cdot\frac{\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{(2-x)^3}}{2-x} =$$

$$\lim_{x\to 2-0} (-1)\cdot\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{2-x} = 0$$

Damit ist die Funktion f an der Stelle $x = 2$ differenzierbar.

Aufgabe H 72. *Differenzierbarkeit*

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < 1, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

Ist f überall differenzierbar? Bestimmen Sie f' an allen Stellen, an denen es existiert. Ist f' auf seinem Definitionsbereich stetig? Ist f' auf seinem Definitionsbereich differenzierbar?

Lösungshinweise hierzu: Die Funktion f ist offenkundig differenzierbar für $x \neq 1$. Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle 1. Es gilt

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

und

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x + 1}{2} = 1.$$

Da diese Grenzwerte übereinstimmen, ist f an der Stelle 1 differenzierbar. Wir erhalten die Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1, \\ x & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

Die Funktion f' ist stetig für $x \neq 1$. Wir untersuchen Stetigkeit an der Stelle 1. Es gilt

$$\lim_{x \to 1-0} f'(x) = \lim_{x \to 1-0} 1 = 1$$

und

$$\lim_{x \to 1+0} f'(x) = \lim_{x \to 1+0} x = 1.$$

Da diese Grenzwerte auch mit dem Funktionswert $f'(1) = 1$ übereinstimmen, ist f' auch an der Stelle 1 stetig. Die Funktion f' ist offenkundig differenzierbar für $x \neq 1$. Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle 1. Es gilt

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{0}{x - 1} = 0$$

und

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, ist f' an der Stelle 1 nicht differenzierbar.

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

19. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 73. *Ableitungsregeln*

Berechnen Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{x}$,

(b) $f\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1+x^2}{\arctan x}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\tan' x = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$. Damit und mit der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)' = \frac{x}{(\cos x)^2 x^2} - \frac{\tan x}{x^2} = \frac{1}{(\cos x)^2 x} - \frac{\tan x}{x^2}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{(\cos x)^2 x} - \frac{\tan x}{x^2}\right)' \\ &= -\frac{(\cos x)^2 - 2x\cos x \sin x}{(\cos x)^4 x^2} - \frac{x^2}{(\cos x)^2 x^4} + \frac{2x\tan x}{x^4} \\ &= \frac{2\tan x}{(\cos x)^2 x} - \frac{2}{(\cos x)^2 x^2} + \frac{2\tan x}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) Es ist $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$. Damit und mit der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \left(\frac{1+x^2}{\arctan x}\right)' = \frac{2x\arctan - \frac{1+x^2}{1+x^2}}{(\arctan x)^2} = \frac{2x}{\arctan x} - \frac{1}{(\arctan x)^2}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2x}{\arctan x} - \frac{1}{(\arctan x)^2}\right)' \\ &= \frac{2\arctan x}{(\arctan x)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)(\arctan x)^2} + \frac{2\arctan x}{(1+x^2)(\arctan x)^4} \\ &= \frac{2}{(\arctan x)} - \frac{2x}{(1+x^2)(\arctan x)^2} + \frac{2}{(1+x^2)(\arctan x)^3}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 74. *Höhere Ableitungen*

Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{(\cos x)^2 - (\sin x)^2}{2}$, **(b)** $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.

Berechnen Sie jeweils einige Ableitungen, stellen Sie eine Vermutung über die allgemeine Form der Ableitung auf und verifizieren Sie Ihre Vermutung durch Induktion.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bemerken, dass

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

gilt. Nach der Berechnung einiger Ableitungen von f, stellen wir die Vermutung auf, dass

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \cos(2x), & n \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^{n-1} \sin(2x), & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

gilt. Für $n = 0$ ergibt diese Vermutung $f^{(0)}(x) = (-1)^0 2^{-1} \cos(2x) = \frac{\cos(2x)}{2}$, d.h. unsere Formel ergibt die richtige Aussage $f^{(0)}(x) = (x)$. Also stimmt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass die Vermutung für ein $k \in \mathbb{N}$ stimmt und beweisen, dass die Vermutung auch für $k + 1$ stimmt.

Wenn k gerade ist, nehmen wir an, dass

$$f^{(k)} = (-1)^{\frac{k}{2}} 2^{k-1} \cos(2x)$$

gilt.

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) &= (-1)^{\frac{k}{2}} 2^{k-1}(-2\sin(2x)) \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}+1} 2^k \sin(2x) \\ &= (-1)^{\frac{(k+1)+1}{2}} 2^{(k+1)-1} \sin(2x) \end{aligned}$$

ist, was mit der Aussage der Vermutung übereinstimmt.

Wenn k ungerade ist, nehmen wir an, dass

$$f^{(k)} = (-1)^{\frac{k+1}{2}} 2^{k-1} \sin(2x)$$

gilt, also ist

$$f^{(k+1)} = (-1)^{\frac{k+1}{2}} 2^{k-1}(2\cos(2x)) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} 2^{(k+1)-1} \cos(2x),$$

wie gewünscht. Also ist die Vermutung wahr.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x)) \\ f''(x) &= 2\mathrm{e}^x \cos(x) \\ f^{(3)}(x) &= 2\mathrm{e}^x(\cos(x) - \sin(x)) \\ f^{(4)}(x) &= -4\mathrm{e}^x \sin(x) = -4f(x). \end{aligned}$$

Also hat unsere Vermutung für $f^{(n)}$ vier verschiedene Fälle, abhängig vom Rest, den n bei Division durch 4 ergibt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-4)^m \mathrm{e}^x \sin(x), & n = 4m, \\ (-4)^m \mathrm{e}^x (\sin(x) + \cos(x)), & n = 4m+1, \\ 2(-4)^m \mathrm{e}^x \cos(x), & n = 4m+2, \\ 2(-4)^m \mathrm{e}^x (\cos(x) - \sin(x)), & n = 4m+3. \end{cases}$$

Für den Induktionsanfang prüfen wir, dass laut Vermutung

$$f^{(0)}(x) = (-4)^0 \mathrm{e}^x \sin(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$$

gilt, weil 0 durch 4 teilbar ist. Damit ergibt die Vermutung $f^{(0)}(x) = f(x)$ und der Induktionsanfang ist richtig.
Jetzt nehmen wir an, dass die Vermutung für ein $k \in \mathbb{N}$ stimmt. Falls $k = 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)} = (-4)^m (\mathrm{e}^x \sin(x) + \mathrm{e}^x \cos(x)) = (-4)^m \mathrm{e}^x (\sin(x) + \cos(x)).$$

Falls $k = 4m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)} = (-4)^m (\mathrm{e}^x (\sin(x) + \cos(x)) + \mathrm{e}^x (\cos(x) - \sin(x)) = 2(-4)^m \mathrm{e}^x \cos(x).$$

Falls $k = 4m+2$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)} = 2(-4)^m (\mathrm{e}^x \cos(x) - \mathrm{e}^x \sin(x)) = 2(-4)^m \mathrm{e}^x (\cos(x) - \sin(x)).$$

Und falls $k = 4m+3$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)} = 2(-4)^m (\mathrm{e}^x (\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{e}^x (-\sin(x) - \cos(x)) = (-4)^{m+1} \mathrm{e}^x \sin(x).$$

In jedem Fall stimmt das Ergebnis mit der Vermutung überein (im letzten Fall bedeutet $k = 4m+3$, dass $k+1 = 4(m+1)$ ist). Also ist die Vermutung durch Induktion bewiesen.

Aufgabe H 75. *Ableitungen der Umkehrfunktion*

Sei $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2^x \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Begründen Sie, warum f injektiv ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W = f([0,3])$.

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to [0,3]$ an den Stellen $f(1) = 1$ und $f(2) = 2\sqrt{3}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Produktregel gilt

$$f'(x) = \left(2^x \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)' = (\ln 2)2^x \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2^x \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right).$$

(b) Für $x \in (0,3)$ gilt $0 < \frac{\pi}{6}x < \frac{\pi}{2}$ und damit $0 < \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ und $0 < \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$. Außerdem gilt $0 < \ln(2)$, $0 < 2^x$ und $0 < \frac{\pi}{6}$, also $0 < f'(x)$. Nach 2.4.8 ist f auf dem Intervall [0,3] streng monoton steigend und damit injektiv nach 1.13.11.

(c) Nach (b) und 1.13.11 ist $W = f([0,3]) = [f(0), f(3)] = [0,8]$.

(d) Nach 2.3.1 ist

$$(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{6}{6\ln(2) + \sqrt{3}\pi}$$

und

$$(f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{3}{\pi + 6\sqrt{3}\log(2)}.$$

Aufgabe H 76. *Die Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x^3+2x}{\mathrm{e}^{3x}-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\sin(2x)\cos(2x)\tan(x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(3^{\frac{1}{x}}-1)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Weil Zähler und Nenner gegen 0 konvergieren, wenn x gegen 0 geht, hat diese Aufgabe die Form „$\frac{0}{0}$“. Der Quotient der Ableitungen ist

$$\frac{3x^2+2}{3\mathrm{e}^{3x}},$$

mit

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{3x^2+2}{3\mathrm{e}^{3x}}=\frac{2}{3},$$

also ist

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x^3+2x}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\frac{2}{3}$$

nach der Regel von l'Hospital.

(b) Wir schreiben

$$2\sin(2x)\cos(2x)\tan(x)=\frac{\sin(4x)\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Wenn x gegen $\frac{\pi}{2}$ geht, gehen Zähler und Nenner gegen 0. Der Quotient der Ableitungen ist

$$\frac{\sin(4x)\cos(x)+4\cos(4x)\sin(x)}{-\sin(x)},$$

und geht gegen -4, wenn x gegen $\frac{\pi}{2}$ geht.

Aber man kann die Lösung auch einfacher finden: zum Beispiel ist

$$2\sin(2x)\cos(2x)\tan(x)=\frac{4\sin(x)\cos(x)\cos(2x)\sin(x)}{\cos(x)}=4\sin(x)^2\cos(2x).$$

Diese Abbildung ist stetig, und damit ist

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}4\sin(x)^2\cos(2x)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(\pi)=-4.$$

(c) Wir schreiben

$$\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)},$$

so dass Zähler und Nenner gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht. Der Quotient der Ableitungen ist

$$\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}},$$

und wieder gehen Zähler und Nenner gegen 0, wenn x gegen 0 geht. Der Quotient der zweiten Ableitungen ist

$$\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}},$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}.$$

(d) Es gibt hier eine Falle: die Regel von l'Hospital kann nicht sinnvoll angewendet werden! Wenn man, wie in dem Beispiel $\lim_{x\to 0+0} x\ln(x)$,

$$x\ln(3^{\frac{1}{x}} - 1) = \frac{\ln(3^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}}$$

schreibt, dann geht der Zähler gegen $-\infty$ wenn x gegen $+\infty$ geht, aber der Nenner geht gegen 0. Somit gilt die Regel von l'Hospital nicht.

Wir müssen also anders argumentieren. Wie schon bemerkt, gilt

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(3^{\frac{1}{x}} - 1) = -\infty,$$

weil $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{\frac{1}{x}} = 1$ ist. Daraus folgt

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln(3^{\frac{1}{x}} - 1) = -\infty,$$

denn für alle $t < 0$ können wir $s \in \mathbb{R}$ finden so, dass $\ln(3^{\frac{1}{x}} - 1) < t$ für alle $x > s$ ist, weil $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(3^{\frac{1}{x}} - 1) = -\infty$ ist. Es folgt, dass für alle $x > \max\{s, 1\}$

$$x\ln(3^{\frac{1}{x}} - 1) < t$$

gilt, also

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln(3^{\frac{1}{x}} - 1) = -\infty,$$

wie behauptet.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 77. *Konvergenz von Taylorreihen*

Betrachten Sie die Abbildung $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x)$.

(a) Finden Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f,x,1)$.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $T(f,x,1)$.

(d) Für welche reellen Zahlen x konvergiert diese Potenzreihe?

Sind Sie sicher, dass die Reihe (für die Stellen x, an denen sie konvergiert) tatsächlich gegen $f(x)$ konvergiert?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen die Vermutung

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

für $n \geqq 1$ auf. (Für $n = 0$ gilt $f^{(0)}(x) = f(x) = \ln(x)$.) Für $n = 1$ ergibt diese Vermutung die richtige Aussage:

$$(-1)^2\frac{0!}{x^1} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln(x).$$

Also stimmt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass die Vermutung für ein $k \in \mathbb{N}$ stimmt und beweisen, dass die Vermutung auch für $k+1$ stimmt. Also nehmen wir an, dass

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k},$$

und berechnen

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = (-k)(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^{k+1}} = (-1)^{k+2}\frac{k!}{x^{k+1}}.$$

Also ist die Vermutung wahr.

(b) Mit Hilfe unserer Formel berechnen wir

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

für $n \geqq 1$. Außerdem gilt $f(1) = 0$. Also ist die Taylorreihe

$$T(f,x,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

(c) Wir schreiben $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Also ist

$$T(f,x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n.$$

Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}n}{(-1)^{n+1}(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

also ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gleich $\frac{1}{1} = 1$.

(d) Es folgt aus Teil $(\mathbf{c})$, dass $T(f,x,1)$ für alle $x \in (0,2)$ konvergiert. Für $x = 0$ ist die Potenzreihe gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}\frac{1}{n},$$

also konvergiert sie nicht. Auf der anderen Seite ist die Potenzreihe für $x = 2$ gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}1^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

und diese Reihe konvergiert. Wir fassen zusammen, dass $T(f,x,1)$ genau für $x \in (0,2]$ konvergiert.

Selbst wenn $T(f,x,1)$ für einen Wert von x konvergiert, ist der Grenzwert nicht notwendigerweise $f(x)$—siehe Beispiel 2.6.12. Aber in diesem Fall konvergiert die Reihe gegen $f(x)$; für $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ kann man das ähnlich zu 2.6.13 beweisen, aber für $0 < x < \frac{1}{2}$ brauchen wir andere Methoden.

Aufgabe H 78. *Extrema und Wendepunkte*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$.

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

und

$$f''(x) = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}.$$

(b) Damit in $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum vorliegen kann, muss $f'(x) = 0$, also $4-x^2 = 0$ gelten. Dies ist nur für $x = 2$ und $x = -2$ erfüllt.

Da $f''(2) = -\dfrac{1}{16}$ und $f''(-2) = \dfrac{1}{16}$ ist, liegt in $x = 2$ ein lokales Maximum vor und in $x = -2$ ein lokales Minimum.

Damit in $x \in \mathbb{R}$ ein Wendepunkt vorliegen kann, muss $f''(x) = 0$, also $2x^3-24x = 0$, also $x = 0, x = -2\sqrt{3}$ oder $x = 2\sqrt{3}$ gelten.

Die dritte Ableitung von f ist $f'''(x) = -\dfrac{6x^4-144x^2+96}{(x^2+4)^4}$. Also ist $f'''(0) = -6 < 0$, $f'''(-2\sqrt{3}) = f'''(2\sqrt{3}) = \dfrac{3}{256} > 0$ und damit sind alle drei Stellen Wendepunkte.

Aufgabe H 79. *Taylorreihen und Restglied*

Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{3x}$.

(a) Finden Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$.

(c) Zeigen Sie durch Abschätzen des Restglieds nach Lagrange, dass $T(f, x, 0) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

(d) Bestimmen Sie ein $C > 0$ so, dass

$$|f(x) - T_2(f, x, 0)| \leqq Cx^3$$

für alle $x \in [0, 1]$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen die Vermutung

$$f^{(n)} = (3^n x + n3^{n-1})\mathrm{e}^{3x}$$

auf. Für $n = 0$ gilt diese Vermutung:

$$(3^0 x + 0 \cdot 3^{-1})\mathrm{e}^{3x} = x\mathrm{e}^{3x} = f(x),$$

also stimmt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass die Vermutung für ein $k \in \mathbb{N}$ stimmt und beweisen, dass die Vermutung auch für $k + 1$ stimmt. Also nehmen wir an, dass

$$f^{(k)}(x) = (3^k x + k3^{k-1})\mathrm{e}^{3x},$$

und berechnen

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = 3^k\mathrm{e}^{3x} + (3^{k+1}x + k3^k)\mathrm{e}^{3x} = (3^{k+1}x + (k + 1)3^k)\mathrm{e}^{3x}.$$

Also ist die Vermutung wahr.

(b) Mit Hilfe unserer Formel berechnen wir

$$f^{(n)}(0) = n3^{n-1},$$

also ist

$$T(f, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^{n-1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} x^n.$$

(c) Für das Restglied gilt

$$R_n(f, x, 0) = \frac{(3^{n+1}\vartheta x + (n + 1)3^n)\mathrm{e}^{3\vartheta x}}{(n + 1)!} x^{n+1}$$

für $0 < \vartheta < 1$. Es folgt, dass

$$|R_n(f, x, 0)| \leqq \mathrm{e}^{3\vartheta x} \left(\vartheta |x| \left| \frac{(3x)^{n+1}}{(n + 1)!} \right| + \left| \frac{(3x)^{n+1}}{n!} \right| \right).$$

Die rechte Seite geht gegen 0, wenn n gegen unendlich geht—siehe 1.5.9. Also geht das Restglied gegen null, und die Taylorreihe konvergiert gegen $f(x)$.

(d) Für $0 \leqq x \leqq 1$ gilt

$$|f(x) - T_2(f,x,0)| = |R_2(f,x,0)| = \frac{(27\vartheta + 27)e^{3\vartheta}}{6} x^3$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$. Als Abbildung in ϑ ist diese monoton steigend, also haben wir

$$|f(x) - T_2(f,x,0)| \leqq \frac{(27 \cdot 1 + 27)e^{3 \cdot 1}}{6} x^3 = 9\mathrm{e}^3 x^3.$$

Also erfüllt $C = 9\mathrm{e}^3$ (oder irgendein größerer Wert von C) unsere Forderung.

Aufgabe H 80. *Extrema und Wendepunkte*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [-4, 4]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$f'(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$$

und

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos(x).$$

(b) Damit in $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum vorliegen kann, muss $f'(x) = 0$, also $\sin(x) + \cos(x) = 0$ und damit $\sin(x) = -\cos(x)$ gelten.

Da $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ist, ist dies äquivalent zu $\sin(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2})$. Aufgrund der Symmetrie der Sinusfunktion ist dies gleichbedeutend mit $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$, also $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Es ist $\cos(k\pi - \frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$, wenn k gerade ist und $\cos(k\pi - \frac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0$, wenn k ungerade ist.

Also ist $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ein lokales Minimum, wenn k gerade ist und ein lokales Maximum, wenn k ungerade ist.

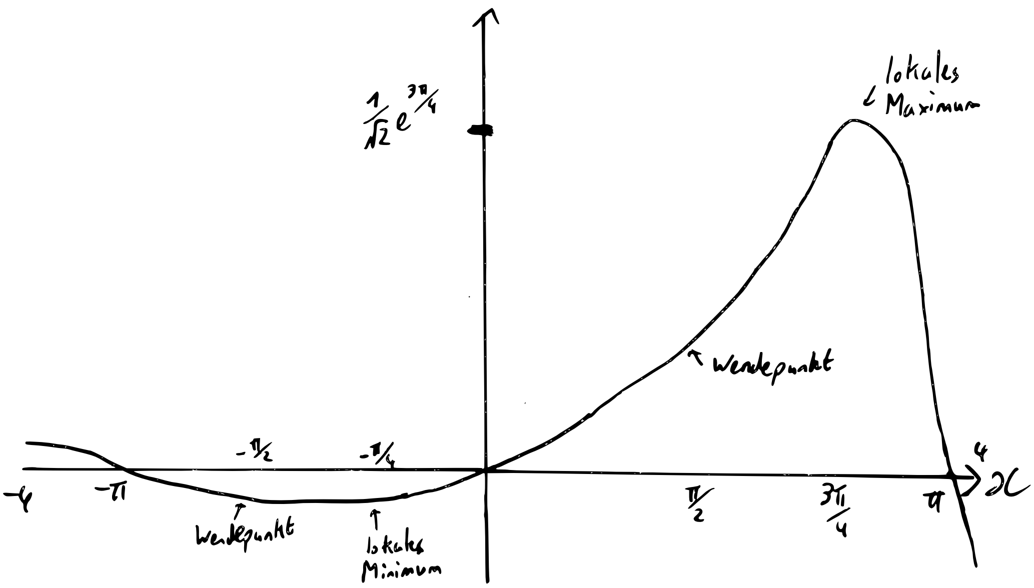
Damit in x ein Wendepunkt vorliegen kann, muss $f''(x) = 0$, also $\cos(x) = 0$ sein. Dies ist genau dann erfüllt, wenn x die Form $k\pi + \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat.

Es ist $f'''(x) = 2\mathrm{e}^x(\cos(x) - \sin(x))$ und damit $f'''(k\pi + \frac{\pi}{2}) \neq 0$, da $\sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) - \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) \neq 0$ gilt. Also sind die Wendepunkte

$$\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, (-1)^k \mathrm{e}^{k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Eine Skizze der Funktion:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 81. *Partielle Integration und Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{4} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) \mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Substitution $t = 1 - \cos(x)$ erhalten wir

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}\,t = \left[2\sqrt{t}\right] = \left[2\sqrt{1-\cos(x)}\right].$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhalten wir

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \,\mathrm{d}\,x = \left[2\sqrt{1-\cos(x)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\sqrt{1-\cos(\pi)} - 2\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{2} - 2.$$

(b) Mit Hilfe partieller Integration im ersten Schritt und unter Verwendung der Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ im zweiten Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) \,\mathrm{d}\,x &= [-\cos(x)\sin(x)] + \int \cos^2(x) \,\mathrm{d}\,x \\ &= [-\cos(x)\sin(x)] + \int (1 - \sin^2(x)) \,\mathrm{d}\,x \\ &= [-\cos(x)\sin(x) + x] - \int \sin^2(x) \,\mathrm{d}\,x. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$2\int \sin^2(x) \,\mathrm{d}\,x = [-\cos(x)\sin(x) + x]$$

und somit

$$\int \sin^2(x) \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{2}(-\cos(x)\sin(x) + x)\right].$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhalten wir

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ im ersten Schritt und partieller Integration im zweiten Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x &= 2\int t\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= [2t\sin(t)] - 2\int \sin(t)\,\mathrm{d}\,t = [2t\sin(t) + 2\cos(t)] \\ &= \left[2\sin(\sqrt{x})\sqrt{x} + 2\cos(\sqrt{x})\right].\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhalten wir

$$\int\limits_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x = -2 - 2 = -4.$$

(d) Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ im ersten Schritt und partieller Integration im zweiten Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}\,x &= \int 2t\arctan(\sqrt{t-1})\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[t^2\arctan(\sqrt{t-1})\right] - \int t^2 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{t-1}^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[t^2\arctan(\sqrt{t-1})\right] - \int \frac{t}{2\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}\,t.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $r = t - 1$ folgt

$$\int \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}\,t = \int \sqrt{r}\,\mathrm{d}\,r + \int \frac{1}{\sqrt{r}}\,\mathrm{d}\,r = \left[\frac{2\sqrt{r^3}}{3} + 2\sqrt{r}\right].$$

Insgesamt erhalten wir nach (doppelter) Rücksubstitution

$$\int \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}\,x = \left[\arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)x - \frac{(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{\sqrt{x}-1}\right].$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhalten wir

$$\int \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}\,x = \frac{3\pi-4}{3}.$$

Aufgabe H 82. *Integrale und Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x = n! - \frac{n!}{\mathrm{e}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right).$$

Lösungshinweise hierzu:

- Induktionsanfang **IA** Es ist

$$\int_0^1 x^0 \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}},$$

$$0! - \frac{0!}{\mathrm{e}} \left(\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

  Damit ist die Behauptung für $n = 0$ wahr.

- Induktionsschluss **IS** $n \rightsquigarrow n + 1$.

  Induktionshypothese **IH** Angenommen, die Behauptung sei wahr für n.
  Dann folgt mittels Anwendung partieller Integration im ersten Schritt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n+1} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x &= \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x \\
&\overset{\text{IH}}{=} -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1) \left[n! - \frac{n!}{\mathrm{e}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) \right] \\
&= (n+1)! - \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{(n+1)!}{\mathrm{e}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) \\
&= (n+1)! - \frac{(n+1)!}{\mathrm{e}} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right) .
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

Aufgabe H 83. *Stammfunktion*

Gegeben ist die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \begin{cases} 3\cos(x)-2\sin(x) & \text{für } x<0, \\ 2\mathrm{e}^{x}-3\mathrm{e}^{-x}+4 & \text{für } x\geqq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 stetig ist. Ist f an der Stelle 0 auch differenzierbar?

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 2-3+4 = 3 = \lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$. Da diese Grenzwerte mit dem Funktionswert $f(0)=3$ übereinstimmen, ist die Funktion f an der Stelle 0 stetig. Mit Hilfe der Regel von l'Hospital bestimmen wir die Differenzenquotienten

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0}\frac{2\mathrm{e}^{x}-3\mathrm{e}^{-x}+1}{x} = 5$$

und

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-0}\frac{3\cos(x)-2\sin(x)-3}{x} = -2.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, ist f an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

(b) Für $x<0$ erhalten wir eine Stammfunktion $3\sin(x)+2\cos(x)+C_1$ und für $x>0$ eine Stammfunktion $2\mathrm{e}^{x}+3\mathrm{e}^{-x}+4x+C_2$ mit $C_1, C_2\in\mathbb{R}$. Eine Stammfunktion F von ganz f muss an der Stelle 0 differenzierbar (und insbesondere stetig) sein mit $F'(0)=f(0)=3$. Zum Beispiel für $C_1=3$ und $C_2=0$ erhalten wir die stetige Funktion

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \begin{cases} 3\sin(x)+2\cos(x)+3 & \text{für } x<0, \\ 2\mathrm{e}^{x}+3\mathrm{e}^{-x}+4x & \text{für } x\geqq 0. \end{cases}$$

Wir testen F nun auf Differenzierbarkeit an der Stelle 0. Es gilt mit Hilfe der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0}\frac{2\mathrm{e}^{x}+3\mathrm{e}^{-x}+4x-5}{x} = 3 =$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{3\sin(x)+2\cos(x)-2}{x} = \lim_{x\to 0-0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}.$$

Damit ist F eine Stammfunktion von f.

Aufgabe H 84. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Geben Sie für die folgenden beiden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an:

(a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$ **(b)** $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{3x^4}{x^4+5x^2+4}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für die Partialbruchzerlegung nutzen wir den Ansatz

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-2}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Erweitern liefert

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} =$$

$$\frac{(a+c)x^2 + (-a+b+2c)x - 2a - 2b + c}{(x+1)^2(x-2)}.$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$a + c = 1, -a + b + 2c = 0, -2a - 2b + c = 2.$$

Lösung des linearen Gleichungssystems ist $a = \frac{1}{3}, b = -1, c = \frac{2}{3}$. Somit folgt

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2}.$$

Unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung bestimmten Standardintegrale erhalten wir

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} \,\mathrm{d}\,x = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2} \right) \mathrm{d}\,x =$$

$$\frac{1}{3} \ln(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3} \ln(|x-2|) + C.$$

Zusammenfassend ergibt sich eine Stammfunktion zum Beispiel für $C = 0$

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3} \ln(2-x).$$

(b) Wir führen zunächst eine Polynomdivision durch und erhalten

$$\frac{3x^4}{x^4+5x^2+4} = 3\left(1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\right) = 3\left(1 - \frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}\right).$$

Für die Partialbruchzerlegung des zweiten Summanden nutzen wir den Ansatz

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+4}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Erweitern liefert

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{(ax+b)(x^2+4)+(cx+d)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)} =$$

$$\frac{(a+c)x^3+(b+d)x^2+(4a+c)x+(4b+d)}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$a+c=0, b+d=5, 4a+c=0, 4b+d=4.$$

Lösung des linearen Gleichungssystems ist $a=0, b=-\frac{1}{3}, c=0, d=\frac{16}{3}$.
Somit folgt

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{16}{3}}{x^2+4}.$$

Unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung bestimmten Standardintegrale erhalten wir

$$\int \frac{3x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}\,x = \int 3\,\mathrm{d}\,x - \int \left(\frac{16}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}\,x =$$

$$3x - 8\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \arctan(x) + C.$$

Zusammenfassend ergibt sich eine Stammfunktion zum Beispiel für $C=0$

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3x - 8\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \arctan(x).$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 85. *Riemannsche Summen*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die (äquidistante) Partition $P_n := \left\{ \frac{k}{n} \,\middle|\, k = 2n, 2n+1, \dots, 4n-1, 4n \right\}$ des Intervalls $[2,4]$.

(a) Geben Sie $\underline{S}(f, P_n)$ sowie $\overline{S}(f, P_n)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n)\right) = 0$.

Bemerkung: Daraus folgt insbesondere, dass f Riemann-integrierbar ist und dass sich das (Riemann-)Integral ergibt als $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,P_n)$.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{k}{n^2} \mathrm{e}^{\left(\frac{k^2}{n^2}\right)}$.

Lösungshinweise hierzu: Die Forderung, dass f stetig ist, ist hier übrigens überflüssig. Es genügt bereits die Monotonie.

(a) Da f monoton wachsend ist, ist $\displaystyle\min_{x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} f(x) = f\left(\frac{k}{n}\right)$. Damit ist

$$\underline{S}(f,P_n) = \sum_{k=2n}^{4n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Analog haben wir wegen $\displaystyle\max_{x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} f(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right)$, dass

$$\overline{S}(f,P_n) = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) &= \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2n}^{4n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}(f(4) - f(2)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im Schritt von der vorletzten zur letzten Zeile verwendet, dass eine Teleskopsumme $\sum_{k=2n}^{4n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_{4n} - a_{2n}$ vorliegt mit $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(c) Sei $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$. Dann ist

$$\sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{\left(\frac{k^2}{n^2}\right)} = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\mathrm{e}^{\left(\frac{k^2}{n^2}\right)} = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \underline{S}(f,P_n),$$

denn f ist im Intervall $[2,4]$ stetig und monoton wachsend. Der Grenzübergang für $n \to \infty$ liefert dann nach **(b)** das Integral

$$\int_2^4 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_2^4 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{16} - \mathrm{e}^4).$$

Aufgabe H 86. *Konvergenz uneigentlicher Integrale I*

(a) Zeigen Sie: konvergiert $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$, so gilt für alle $c > 0$, dass

$$\lim_{t\to+\infty} \int_t^{t+c} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

(b) Benutzen Sie **(a)**, um zu zeigen, dass $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ divergiert, falls $\alpha \geqq 0$.

Hinweis: Schätzen Sie $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $k \in \mathbb{N}$ geeignet ab.

(c) Zeigen Sie, dass $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert für alle $\alpha < 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \int_t^{t+c} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{t\to+\infty} \left(\int_1^{t+c} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^{t} f(x)\,\mathrm{d}\,x \right) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t+c} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} f(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.
\end{aligned}$$

(b) Wenn das Integral $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ konvergieren würde, müsste nach **(a)** gelten, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$. Aber es ist für $\alpha \geqq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x &\geqq \left(\min_{x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]} x^\alpha \right) \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= (2k\pi)^\alpha \left[-\cos((2k+1)\pi) + \cos(2k\pi) \right] \\
&= (2k\pi)^\alpha 2 \overset{\alpha\geqq 0}{\geqq} 2.
\end{aligned}$$

Daher divergiert $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $\alpha \geqq 0$.

(c) Sei nun $\alpha < 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_1^b x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[-x^\alpha \cos(x) \right]_1^b - \int_1^b -\alpha x^{\alpha-1} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= -b^\alpha \cos(b) + \cos(1) + \alpha \int_1^b x^{\alpha-1} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

Da $|b^\alpha \cos(b)| \leqq b^\alpha$, konvergiert der erste Summand gegen 0 für $b \to \infty$, wenn $\alpha < 0$ ist. Für den dritten Summanden schätzen wir den Betrag des Integranden $|x^{\alpha-1}\cos(x)|$ durch $x^{\alpha-1}$ nach oben ab. Da $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert wegen $\alpha - 1 < -1$, konvergiert auch der dritte Summand nach dem Majorantenkriterium für $b \to \infty$.

Aufgabe H 87. *Konvergenz uneigentlicher Integrale II*
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,d\,x$,

(b) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,d\,x$,

(c) $\displaystyle\int_{1+0}^{e} \frac{1}{\ln(x)}\,d\,x$,

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x^2)\,d\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x \geqq 1$ gilt $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\frac{e^x}{4}}} = 2e^{-\frac{x}{2}}$. Da

$$\int_1^{+\infty} 2e^{-\frac{x}{2}}\,d\,x = \lim_{b\to+\infty}\left[-4e^{-\frac{x}{2}}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-4e^{-\frac{b}{2}} + 4e^{-\frac{1}{2}}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}},$$

konvergiert $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,d\,x$ nach dem Majorantenkriterium.

Alternativ kann man das Integral auch direkt berechnen. Mit der Substitution $y = \sqrt{e^x - 1}$ ergibt sich formal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}\cdot e^x = \frac{1}{2y}\cdot(1+y^2).$$

Damit ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,d\,x = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{2y}{1+y^2}\,d\,y = [2\arctan(y)] = \left[2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)\right].$$

Somit ist

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,d\,x = \lim_{b\to+\infty} 2\arctan(\sqrt{e^b-1}) - 2\arctan(\sqrt{e^1-1}) = \pi - 2\arctan(\sqrt{e-1}).$$

(b) Es seien $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}$, $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$. Dann ist

$$\lim_{x\to0+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0+0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Nach dem Grenzwertkriterium hat dann das Integral $\displaystyle\int_{0+0}^1\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,d\,x$ dasselbe Konvergenzverhalten wie $\displaystyle\int_{0+0}^1\frac{1}{x^{1/2}}\,d\,x$. Das letzte Integral konvergiert, da es von der Form $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ mit $\alpha < 1$ ist. Damit ist das gesuchte Integral konvergent.

(c) Mit der Abschätzung $\ln(x) \leqq x - 1$ ergibt sich $\frac{1}{\ln(x)} \geqq \frac{1}{x-1}$. Da

$$\int_{1+0}^{e}\frac{1}{x-1}\,d\,x = \lim_{a\to1+0}[\ln|x-1|]_a^e = \lim_{a\to1+0}(\ln|e-1| - \ln|a-1|) = \infty,$$

divergiert das Integral $\displaystyle\int_{1+0}^{e}\frac{1}{\ln(x)}\,d\,x$ nach dem Minorantenkriterium.

(d) Wir führen die Substitution $y = x^2$ durch und erhalten

$$\int_1^{+\infty}\sqrt{x}\sin(x^2)\,d\,x = \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt{y}}\sin(y)\,d\,y = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} y^{-1/4}\sin(y)\,d\,y.$$

Daher konvergiert das Integral gemäß **H 86 (c)**.

Aufgabe H 88. *Berechnung uneigentlicher Integrale*

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2-0} x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)\mathrm{d}\,x,$ **(b)** $\displaystyle\int_{1}^{3-0} \ln\left|\frac{x+5}{x-3}\right|\mathrm{d}\,x.$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $f(x) = x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)$. Dann ist

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \Big[\underbrace{\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2+3}}_{=:F(x)}\Big].$$

Daher ist für jedes $c \in (-\infty, -2)$

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to-2-0}\int_c^{-2-0} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{b\to-2-0}(\sqrt{b^2-4} - \sqrt{b^2+3}) - F(c)\\
&= -\sqrt{7} - F(c),\\
\lim_{a\to-\infty}\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= F(c) - \lim_{a\to-\infty}\sqrt{a^2-4} - \sqrt{a^2+3}\\
&= F(c) - \lim_{a\to-\infty}\frac{a^2-4-(a^2+3}{\sqrt{a^2-4}+\sqrt{a^2+3}}\\
&= F(c) - \lim_{a\to-\infty}\frac{-7}{\sqrt{a^2-4}+\sqrt{a^2+3}}\\
&= F(c).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{-2-0} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{c}^{-2-0} f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\sqrt{7} - F(c) + F(c) = -\sqrt{7}.$$

(b) Sei $f(x) = \ln\left|\frac{x+5}{x-3}\right|$. Dann ist für $x \in (1,3)$

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int (\ln|x+5| - \ln|x-3|)\,\mathrm{d}\,x\\
&= \int (\ln(x+5) - \ln(3-x))\,\mathrm{d}\,x\\
&= [(x+5)\ln(x+5) - (x+5) + (3-x)\ln(3-x) - (3-x)]\\
&= [(x+5)\ln(x+5) + (3-x)\ln(3-x) - 8]\\
&= [\underbrace{(x+5)\ln(x+5) + (3-x)\ln(3-x)}_{=:F(x)}].
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to3-0} F(b) &= 8\ln(8) + \lim_{b\to3-0}\frac{\ln(3-b)}{\frac{1}{3-b}}\\
&\overset{,,\frac{\infty}{\infty}\text{``}}{=} 8\ln(2^3) + \lim_{b\to3-0}\frac{-\frac{1}{3-b}}{\frac{1}{(3-b)^2}}\\
&= 24\ln(2) + \lim_{b\to3-0}(b-3)\\
&= 24\ln(2).
\end{aligned}$$

Also ist damit

$$\begin{aligned}\int_1^{3-0} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{b\to 3-0} F(b) - F(1) = 24\ln(2) - (6\ln(6) + 2\ln(2)) \\ &= 22\ln(2) - 6\ln(2\cdot 3) = 22\ln(2) - 6\ln(2) - 6\ln(3) \\ &= 16\ln(2) - 6\ln(3).\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 89. *Integrale von Potenzreihen*

Wir betrachten die Funktion $f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2k\,x^{2k-1}$, wobei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2k\,x^{2k-1}$ ist.

(a) Beschreiben Sie eine Stammfunktion von f durch eine Potenzreihe, und berechnen Sie den Konvergenzradius ρ.

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Stammfunktion F von f, die $F(0) = 1$ erfüllt.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $g\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2k\,x^{2k+1}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Stammfunktion von f ist durch

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}$$

gegeben. Der Konvergenzradius ρ ist gleich dem Konvergenzradius dieser Reihe, der die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ für } a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

hat. Damit ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1,$$

also gilt $\rho = \frac{1}{1} = 1$.

Alternativ hat die Originalreihe die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ für } b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade}, \\ n+1, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

In diesem Fall berechnen wir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[2k-1]{2k}.$$

Es gilt

$$\sqrt[2k-1]{2k} = \mathrm{e}^{\ln(\sqrt[2k-1]{2k})} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2k)}{2k-1}}.$$

Diese Folge ist konvergent: weil $\lim_{k\to\infty} \ln(2k) = \lim_{k\to\infty}(2k-1) = \infty$ ist, erhalten wir mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(2k)}{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{2k}}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{2k} = \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln(2k)}{2k-1}} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

also ist $\rho = \frac{1}{1} = 1$.

(b) Eine allgemeine Stammfunktion ist durch

$$F(x) = C + \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}$$

für $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt $F(0) = C$, also wählen wir $C = 1$. Die Potenzreihe in der Definition von F ist eine geometrische Reihe, mit geschlossener Darstellung

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Also ist die gesuchte Stammfunktion durch

$$F(x) = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

gegeben.

(c) Es gilt

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

(d) Es gilt

$$g(x) = x^2 f(x) = \frac{2x^3}{(1-x^2)^2}.$$

Aufgabe H 90. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2}$, **(c)** $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-1}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}.$$

Diese Funktion ist positiv, und ist monoton fallend weil $x \mapsto x\ln(x)$ monoton steigend ist. Also können wir das Integral-Vergleichskriterium anwenden. Mit die Substitution $u = \ln(x)$ (also $\mathrm{d}\,u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$) berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \lim_{\beta\to+\infty} [\ln|u|]_{\ln(2)}^{\beta} \\
&= \lim_{\beta\to+\infty} \ln(\beta) - \ln(\ln(2)) \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

also divergiert das Integral und damit auch die Reihe.

(b) Das Integral-Vergleichskriterium ist hier nicht notwendig: es gilt

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Weil die zwei äußeren Reihen konvergieren, konvergiert die innere Reihe auch.

Alternativ kann man das Integral-Vergleichskriterium benutzen, aber muss man vorsichtig sein: die Funktion

$$f : [1,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}$$

ist monoton fallend nur für $x \geqq 2$. Also muss man erst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2}$$

schreiben (der Term für $n = 1$ gleich 0), und dann das Integral-Vergleichskriterium für die postive monoton fallende Funktion

$$g\colon [2,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}$$

benutzen.

(c) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [5,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{x^4-1}.$$

Diese Funktion ist positiv, weil $x^4 - 1 \geqq 24$ für $x \in [5,\infty)$. Es gilt

$$f'(x) = -\frac{2(x^5+x)}{(x^4-1)^2} < 0,$$

also ist f auch monoton fallend. Also können wir das Integral-Vergleichskriterium anwenden. Zuerst berechnen wir eine Partialbruchzerlegung für f. Beachten Sie, dass $x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+1)$ ist, also ist

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{Dx}{x^2+1},$$

und so

$$x^2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + C(x+1)(x-1) + Dx(x+1)(x-1).$$

Für $x = -1$ folgt aus dieser Gleichung

$$1 = -4A,$$

also ist $A = -\frac{1}{4}$. Für $x = 1$ erhalten wir

$$1 = 4B,$$

also ist $B = \frac{1}{4}$. Für $x = 0$ erhalten wir

$$0 = -A + B - C = \frac{1}{2} - C,$$

also ist $C = \frac{1}{2}$. Schließlich erhalten wir für (zum Beispiel) $x = 2$

$$4 = 5A + 15B + 3C + 6D = \frac{-5+15+6}{4} + 6D = 4 + 6D,$$

also ist $D = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_5^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}\,x &= \int_5^{+\infty} -\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\arctan(x)\right]_5^\beta \\
&= \lim_{\beta\to+\infty} \left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\arctan(x)\right]_5^\beta \\
&= \lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{\beta}}{1+\frac{1}{\beta}}\right) + \frac{1}{2}\arctan\beta\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\arctan(5), \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\arctan(5) < \infty.
\end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral und damit auch die Reihe.

Aufgabe H 91. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \dfrac{x^2+y^2}{x} & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})$.

(b) Ist f in $(0,0)$ stetig?

(c) Gibt es ein $y \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ so, dass f in $(0,y)$ stetig ist?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + 1 = 1.$$

(b) Die Funktion f ist nicht in $(0,0)$ stetig, da $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}) = (0,0)$ gilt, aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}) = 1$ ist.

(c) Es gibt kein $y \in \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ für das f in $(0,y)$ stetig ist, da für $y \neq 0$ z. B. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n},y) = (0,y)$ gilt, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+y^2}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + ny^2 = +\infty \neq 0 = f(0,y)$$

ist.

Aufgabe H 92. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y,z) \in \mathbb{R}(0,1,0) \cup \mathbb{R}(0,0,1), \\ \dfrac{xyz}{x^2+y^2z^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x,x,\lambda x)$ stetig?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

(c) Ist f stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x \neq 0$ is $g(x) = f(x,x,\lambda x) = \dfrac{\lambda x^3}{x^2+\lambda^2 x^4}$. Außerdem ist $g(0) = f(0,0,0) = 0$.
In $x \neq 0$ ist g als Bruch von Polynomen stetig. Wir müssen also mnur überprüfen, ob g in 0 stetig ist:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^3}{x^2+\lambda^2 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{1+\lambda^2 x^2}.$$

Für $x \to 0$ strebt der Nenner der Bruchs gegen 1 und der Zähler gegen 0 für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{1+\lambda^2 x^2} = 0 = g(0).$$

Also ist g für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ stetig.

(b) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) Die Funktion f ist nicht stetig, da sie im Punkt $(0,0,0)$ nicht stetig ist: Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0,0)$ nach (b).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 93. *Innere Punkte, Rand, Abschluss*

Bestimmen Sie für folgende Mengen jeweils die inneren Punkte sowie Rand und Abschluss.

(a) $M_1 := \{\frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

(b) $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) < 1\}$

(c) $M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1$ und $xy \neq 0\}$

(d) $M_4 := (\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\} \cup \mathbb{R}(0, 0, 1)) \setminus (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $M_1^\circ = \emptyset$, da es für alle $a \in M_1$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus M_1$ gibt so, dass $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$. Insbesondere folgt damit, dass alle Punkte in M_1 Randpunkte sind. Als zusätzlichen Randpunkt erhalten wir 0. Das sieht man folgendermaßen ein: 0 ist der Grenzwert der durch $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren sämtliche Folgenglieder in M_1 liegen. Andererseits ist $0 \notin M_1$. Somit enthält jede noch so kleine ε-Umgebung von 0 sowohl Punkte, die in M_1 liegen (z.B. $(-1)^n\frac{1}{n}$ für hinreichend großes n) als auch Punkte, die nicht in M_1 liegen (z.B. 0 selbst). Es folgt $\overline{M_1} = \partial M_1 = M_1 \cup \{0\}$.

(b) Die Menge M_2 beschreibt das Innere eines Quadrates mit Seitenlänge 2, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist. Also ist $M_2^\circ = M_2$, $\partial M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) = 1\}$ und $\overline{M_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \leqq 1\}$.

(c) Die Menge M_3 beschreibt das Innere eines Ursprungskreises mit Radius 1, jedoch ohne jene Punkte, die auf den Koordinatenachsen liegen. Also ist $M_3^\circ = M_3$,

$$\partial M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \mid x \in [-1, 1]\} \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$$

und $\overline{M_3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$.

(d) Die Menge M_4 beschreibt einen Ball um den Ursprung mit Radius 1 vereinigt mit der z-Achse, jedoch ohne jene Punkte, die in der x-y-Ebene liegen. Also ist

$$M_4^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \setminus \left(\mathbb{R}^2 \times \{0\}\right),$$

$$\partial M_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup$$
$$\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\} \cup \{(0, 0, z) \mid z \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\}$$

und

$$\overline{M_4} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\} \cup \mathbb{R}(0, 0, 1).$$

Aufgabe H 94. *Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto f\binom{x}{y} = \mathrm{e}^{x^2-1} \cdot (-2+x^2+y^2)$ und $\binom{x_0}{y_0} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x_0}{y_0}$ und $\mathrm{H}f\binom{x_0}{y_0}$. Ist f total differenzierbar?

(b) Berechnen Sie für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_v f\binom{x}{y}$ von f in Richtung des Vektors $v := \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$.

(c) Bestimmen Sie im Punkt $\binom{1}{2}$ die Richtung des steilsten Anstieges von f, d.h. einen Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $|v_0| = 1$ so, dass $\partial_{v_0} f\binom{1}{2}$ maximal wird.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Hilfe von Produkt- und Kettenregel erhalten wir

$$\nabla f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0\mathrm{e}^{x_0^2-1}(-1+x_0^2+y_0^2) \\ 2y_0\mathrm{e}^{x_0^2-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\mathrm{e}^{x_0^2-1} + 4x_0^2\mathrm{e}^{x_0^2-1})(x_0^2+y_0^2) - 2\mathrm{e}^{x_0^2-1} & 4x_0y_0\mathrm{e}^{x_0^2-1} \\ 4x_0y_0\mathrm{e}^{x_0^2-1} & 2\mathrm{e}^{x_0^2-1} \end{pmatrix}.$$

Da die Funktion f und ihre partiellen Ableitungen (die selbstverständlich existieren) stetig sind, ist f total differenzierbar nach Satz 4.4.4 aus der Vorlesung.

(b) Nach Satz 4.3.12 aus der Vorlesung gilt

$$\partial_v f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2x\mathrm{e}^{x^2-1}(-1+x^2+y^2) + 2y\mathrm{e}^{x^2-1}\right).$$

(c) Gesucht ist ein Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $|v_0| = 1$ so, dass

$$\partial_{v_0} f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet v_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet v_0$$

maximal ist. Wir nutzen die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet v_0 = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot |v_0| \cdot \cos\sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, v_0\right).$$

Das Skalarprodukt wird demnach maximal, wenn der Vektor $\binom{8}{4}$ ein Vielfaches von v_0 ist (und somit $\cos\sphericalangle(\binom{8}{4}, v_0) = 1$ gilt). Es folgt, dass $v_0 = \frac{1}{4\sqrt{5}}\binom{8}{4}$.

Aufgabe H 95. *Satz von Taylor in höheren Dimensionen*

Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $(2,-1,0)^\intercal$ sei

$$\mathrm{T}_2(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal) = 3 - 2(x-2) + 4z + 9(x-2)z + 3(y+1)^2.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(2,-1,0)^\intercal$.

(b) Bestimmen Sie $T_1(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal)$.

(c) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g,h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an mit

$$T_1(g,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal) = T_1(h,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal) = T_1(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal).$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach dem Satz von Taylor ist

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}_2(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal)\\ &= f(2,-1,0) + \begin{pmatrix} x-2\\ y+1\\ z\end{pmatrix} \bullet \nabla f(2,-1,0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-2 & y+1 & z\end{pmatrix} \mathrm{H}f(2,-1,0) \begin{pmatrix} x-2\\ y+1\\ z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit den Termen zweiter Ordnung ergibt dann

$$\mathrm{H}f(2,-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9\\ 0 & 6 & 0\\ 9 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(b) Das Taylorpolynom erster Stufe gewinnen wir ganz einfach aus dem Taylorpolynom zweiter Stufe, indem wir die Terme der Ordnung 2 weglassen. Es ist damit

$$\mathrm{T}_1(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal) = 3 - 2(x-2) + 4z.$$

(c) Funktionen, deren Taylorpolynom erster Stufe im Punkt $(2,-1,0)$ mit dem von f übereinstimmt, sind offensichtlich f selbst, und $T_1(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal)$. Jede Menge weitere Funktionen kann man bekommen, indem man zu $T_1(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal)$ beliebig (aber endlich viele) Terme der Bauart

$$a_{k,\ell,m}(x-2)^k(y+1)^\ell z^m, \quad k,\ell,m \in \mathbb{N},\ k+\ell+m \geqq 2,\ a_{k,\ell,m} \in \mathbb{R}$$

addiert, also zum Beispiel

$$\begin{aligned} & h(x,y,z) = 3 - 2(x-2) + 4z + z^2\\ \text{oder}\quad & h(x,y,z) = 3 - 2(x-2) + 4z + \sqrt{\frac{919}{\pi}}(x-2)^{137}(y+1)^{140000}z^{20}.\end{aligned}$$

Aufgabe H 96. *Modell: Schmiegquadriken*
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell eines Ausschnitts des Graphen von f finden Sie auch unter: https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/
In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_2 = \binom{0}{\pi}$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_3 = \binom{\pi/2}{0}$.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Tangentialebene an den Graphen von f in den Punkten P_2 und P_3.

(d) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Schmiegquadrik an den Graphen von f in den Punkten P_2 und P_3 sowie die Gestalt dieser Quadriken.

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) \\ -\cos(x)\sin(y) \end{pmatrix}, \\
\mathrm{H}f(x,y) &= \begin{pmatrix} -\cos(x)\cos(y) & \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x)\sin(y) & -\cos(x)\cos(y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_2(f,(x,y)^\intercal,(0,\pi)^\intercal) &= f(0,\pi) + \begin{pmatrix} x \\ y-\pi \end{pmatrix} \bullet \nabla f(0,\pi) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y-\pi \end{pmatrix} \mathrm{H}f(0,\pi) \begin{pmatrix} x \\ y-\pi \end{pmatrix} \\
&= -1 + \begin{pmatrix} x \\ y-\pi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y-\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-\pi \end{pmatrix} \\
&= -1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-\pi)^2.
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_2(f,(x,y)^\intercal,(0,\pi)^\intercal) &= f(\tfrac{\pi}{2},0) + \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \bullet \nabla f(\tfrac{\pi}{2},0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} & y \end{pmatrix} \mathrm{H}f(\tfrac{\pi}{2},0) \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\
&= 0 + \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\
&= -(x-\tfrac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

(c) Die Tangentialebene an den Graphen von f in einem Punkt P ist gegeben als der Graph des Taylorpolynoms erster Stufe zu f im Punkt P, d.h. die Tangentialebene ist allgemein

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \mathrm{T}_1(f,(x,y)^\intercal,P) \right\}.$$

Damit ergeben sich die Ebenengleichungen

$$\begin{aligned}
&z = -1 \text{ für } P_2, \\
&z = -(x-\tfrac{\pi}{2}) \quad\Leftrightarrow\quad x+z = \tfrac{\pi}{2} \text{ für } P_3.
\end{aligned}$$

(d) Die Schmiegquadrik an den Graphen von f in einem Punkt P ist gegeben als der Graph des Taylorpolynoms zweiter Stufe zu f im Punkt P, d.h. die Schmiegquadrik ist allgemein

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \mathrm{T}_2(f, (x,y)^\intercal, P) \right\}.$$

Damit ergibt sich

$$z = -1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-\pi)^2 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - (y-\pi)^2 + 2(z+1) = 0$$

für P_2. Es handelt sich hierbei um ein elliptisches Paraboloid.

Für P_3 stellen wir fest, dass die Taylorpolynome erster und zweiter Stufe übereinstimmen. Das heißt, die Schmiegquadrik ist gleich der Tangentialebene, die wir in **(c)** berechnet haben.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 97. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2 + z^2$ und $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 3 \end{matrix} \right\}$.

(a) Erstellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange für die Ermittlung der lokalen Extremstellen von $f|_K$, also von der Einschränkung von f auf K.

(b) Finden Sie die kritischen Stellen, indem Sie das Gleichungssystem aus **(a)** lösen.

(c) Bestimmen Sie $\max(f(K))$ und $\min(f(K))$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Menge K wird durch die Gleichungen

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \qquad h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

beschrieben, mit

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 - 4, \qquad h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + z - 3.$$

Wir haben

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem nach Lagrange besteht aus den Gleichungen, die K beschreiben und den Gleichungen $\operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} g + \mu \operatorname{grad} h = 0$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, also

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4 &= 0, \\ x + z - 3 &= 0, \\ 2x + 2\lambda x + \mu &= 0, \\ -2y + 2\lambda y &= 0, \\ 2z + \mu &= 0. \end{aligned}$$

(b) Die vierte Gleichung ist

$$2y(1 - \lambda) = 0,$$

also ist $y = 0$ oder $\lambda = 1$. Im Fall $y = 0$ ergibt die erste Gleichung $x^2 = 4$, also $x = \pm 2$, und die zweite $z = 3 - x$. Also erhalten wir die zwei Lösungen

$$(2, 0, 1) \text{ mit } \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -2$$

und

$$(-2, 0, 5) \text{ mit } \lambda = -\frac{7}{2}, \mu = -10.$$

Im Fall $\lambda = 1$ ergeben die dritte und fünfte Gleichungen $4x = -\mu$ und $2z = -\mu$; also ist $2x = z$. Dann ergibt die zweite Gleichung $3x = 3$, also $x = 1$ und $z = 2$. Schließlich ergibt die erste Gleichung $y^2 = 4 - x^2 = 3$; also ist $y = \pm\sqrt{3}$. Wir finden auf diese Weise zwei weitere Lösungen:

$$(1, \sqrt{3}, 2) \text{ mit } \lambda = 1, \mu = -4$$

und

$$(1, -\sqrt{3}, 2) \text{ mit } \lambda = 1, \mu = -4.$$

(c) Die Menge K ist kompakt – sie ist eine Ellipse. Also hat f Extremwerte auf K, die nur an den kritischen Stellen von (b) sein können. Wir berechnen

$$f(2, 0, 1) = 5, \qquad f(-2, 0, 5) = 29, \qquad f(1, \sqrt{3}, 2) = 2, \qquad f(1, -\sqrt{3}, 2) = 2.$$

Also ist das Maximum 29, und das Minimum 2.

Aufgabe H 98. *Lokale Extrema*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2-2x-3)(y^2-2y)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $[-4,4]\times[-4,4]$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

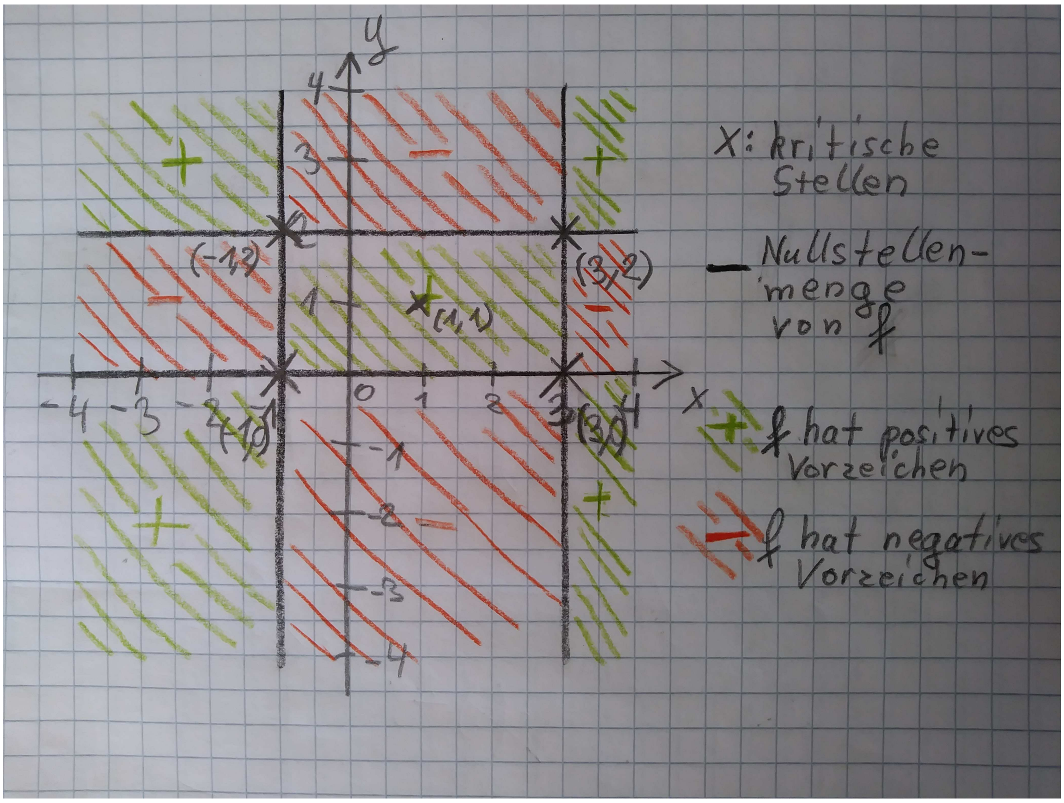
(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, wenn $x^2-2x-3=0$ oder y^2-2y gilt, also für $x=-1$ oder $x=3$ oder $y=0$ oder $y=2$.

Um die Vorzeichenverteilung von f zu bestimmen, genügt es, in jedem der durch die Nullstellenmenge von f voneinander getrennten Gebiete in $\mathbb{R}^2$ einen Wert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$ in f einzusetzen und zu überprüfen, ob $f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ positiv oder negativ ist.



(b) Der Gradient von f ist

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x-2)(y^2-2y) \\ (x^2-2x-3)(2y-2) \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix von f ist

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y^2-2y) & (2x-2)(2y-2) \\ (2x-2)(2y-2) & 2(x^2-2x-3) \end{pmatrix}.$$

(c) Eine kritische Stelle in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ liegt vor, falls $\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Also muss notwendigerweise $(2x-2)(y^2-2y)=0$ gelten, das heißt, dass einer der folgenden Fälle zutreffen muss: $x=1$, $y=0$ oder $y=2$.

Für $x=1$ ist $(x^2-2x-3)(2y-2) = -4(2y-2)$. Also wird dieser Ausdruck genau dann 0, wenn $y=1$ ist.

Für $y=0$ ist $(x^2-2x-3)(2y-2) = -2(x^2-2x-3)$. Also wird dieser Ausdruck genau dann 0, wenn $x=-1$ oder $x=3$ ist.

Analog gilt für $y=2$ die Gleichung $(x^2-2x-3)(2y-2) = 2(x^2-2x-3)$. Also wird auch dieser Ausdruck genau dann 0, wenn $x=-1$ oder $x=3$ ist.

Damit sind die kritischen Stellen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Es gibt zwei verschiedene Methoden, den Typ der kritschen Stellen zu bestimmen. Einmal kann man an der Graphik in (a) erkennen, dass vier der kritischen Stellen in der Nullstellenmenge von (a) liegen. An allen vier Stellen wechselt das Vorzeichen von f. Ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ eine dieser kritischen Stellen, so liegen in jeder Umgebung von ihr Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, in denen $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} < 0 = f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ gilt und Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, in denen $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0 = f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ gilt.

Also sind diese Stellen Sattelpunkte.

Es bleibt nur noch die kritische Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Da $[-1,3]\times[0,2]$ kompakt ist und ihr Rand Teil der Nullstellenmenge von f ist, muss f mindestens eine Extremstelle in $(-1,3)\times(0,2)$ haben. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die einzige kritische Stelle in $(-1,3)\times(0,2)$ ist, muss sie diese Extremstelle sein; da f auf $(-1,3)\times(0,2)$ positiv ist, ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein lokales Maximum.

Alternativ kann man die kritischen Stellen auch in die Hessematrix einsetzen und die Determinante bestimmen:

$$\det\left(\mathrm{H}f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}\right) = -64$$

$$\det\left(\mathrm{H}f\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}\right) = -64$$

$$\det\left(\mathrm{H}f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}\right) = -64$$

$$\det\left(\mathrm{H}f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}\right) = -64$$

$$\det\left(\mathrm{H}f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\right) = 8$$

Damit sind die ersten vier kritischen Stellen Sattelpunkte. Da $\det\left(\mathrm{H}f\binom{1}{1}\right) > 0$ und $f_{xx}\binom{1}{1} = -2 < 0$ ist, ist $\binom{1}{1}$ ein lokales Maximum von f.

Aufgabe H 99. *Modell: Multiplikatormethode nach Lagrange*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy^2$

sowie $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$ und $N := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - x^2 = 0 \right\}$.

Das in der Präsenzübung benutzte Modell von f finden Sie auch unter:
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/06/

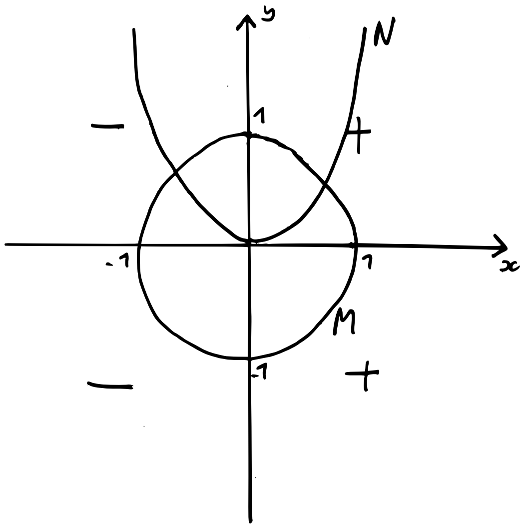
(a) Skizzieren sie die Nullstellenmenge N_0 und die Vorzeichenverteilung von f sowie die Mengen M und N im Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf M und ermitteln sie jeweils deren Typ.

(c) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf N. Welche dieser Kandidaten sind lokale Maximum- oder Minimumstellen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Skizze ist die Folgende:



N_0 besteht aus den Achsen

(b) Das Gleichungssystem nach Lagrange ist

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0, \\ y^2 + 2\lambda x &= 0, \\ 2xy + 2\lambda y &= 0. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ergibt $(2x + 2\lambda)y = 0$, also ist $y = 0$ oder $\lambda = -x$. Im Fall $y = 0$ ergibt die erste Gleichung $x = \pm 1$, also haben wir die Lösungen

$$(1, 0) \text{ und } (-1, 0).$$

Im Fall $\lambda = -x$ ergibt die zweite Gleichung $y^2 = 2x^2$, also wird die erste Gleichung $3x^2 = 1$. Es folgt, dass $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist. Wir erhalten die weiteren Lösungen

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \text{ und } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Weil M eine kompakte Menge ist, müssen die Extremwerte von f an diesen gefundenen Stellen sein. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
f(1,0) &= 0, & f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \\
f(-1,0) &= 0, & f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Wir sehen, dass in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ globale (und daher auch lokale) Maxima vorliegen. In $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ liegen globale (und daher auch lokale) Minima vor.

Wir müssen nur noch den Typ von $(1,0)$ und von $(-1,0)$ bestimmen. An der Vorzeichenverteilung sehen wir, dass $f(1,0) = 0$ ist, aber f auf M an beiden Seiten von $(1,0)$ positive Werte annimmt. Also liegt in $(1,0)$ ein lokales Minimum vor. Analog sehen wir an der Vorzeichenverteilung, dass in $(-1,0)$ ein lokales Maximum vorliegt.

(c) Das Gleichungsystem nach Lagrange ist

$$
\begin{aligned}
y - x^2 &= 0, \\
y^2 - 2\lambda x &= 0, \\
2xy + \lambda &= 0.
\end{aligned}
$$

Die dritte Gleichung ergibt $\lambda = -2xy$, also wird die zweite Gleichung

$$y^2 + 4x^2 y = y(y + 4x^2) = 0.$$

Also ist $y = 0$ oder $y = -4x^2$. Im Fall $y = 0$ ergibt die erste Gleichung $x^2 = 0$, also $x = 0$. Im Fall $y = -4x^2$ ergibt die erste Gleichung $-5x^2 = 0$, also ist wieder $x = 0$ und $y = 0$. Deswegen finden wir nur die Lösung $(0,0)$.

An der Vorzeichenverteilung von f können wir sofort sehen, dass $(0,0)$ keine Extremstelle ist, weil dieser Punkt auf der Grenze zwischen positiven und negativen Werten von f liegt. Alternativ ist die Menge N durch

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert, und $(0,0) = c(0)$. Wir berechnen

$$f \circ c(t) = t^5,$$

und diese Abbildung hat keine Extremstelle in $t = 0$. Also hat f keine Extremstelle auf N.

Aufgabe H 100. *Extremwerte*

Wir betrachten die Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 2y^2 - 4x$ für

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 9 \right\}.$$

Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von f.

Lösungshinweise hierzu: Wir suchen zuerst kritische Stellen im Inneren von D. Der Gradient von f ist durch

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 4y \end{pmatrix}$$

gegeben, also ist $\operatorname{grad} f = 0$ nur in $(2, 0)$. (Weil $2^2 + 0^2 = 4 < 9$ gilt, ist dieser Punkt im Inneren von D.) Wir berechnen $f(2, 0) = -4$.
Nun suchen wir Extremstellen von f auf dem Rand von D. Dieser Rand wird durch

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

beschrieben, mit

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 - 9.$$

Also ist das Gleichungsystem von Lagrange durch

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 9 &= 0, \\ 2x - 4 + 2\lambda x &= 0 \\ 4y + 2\lambda y &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Die dritte Gleichung ergibt $y(4 + 2\lambda) = 0$, also ist $y = 0$ oder $\lambda = -2$. Im Fall $y = 0$ ergibt die erste Gleichung $x^2 = 9$, also ist $x = \pm 3$. Im Fall $\lambda = -2$ ergibt die zweite Gleichung $-2x - 4 = 0$, also ist $x = -2$. Dann gibt die erste Gleichung $4 + y^2 - 9 = 0$, also ist $y = \pm\sqrt{5}$. Weil der Rand von D eine kompakte Menge ist, müssen die Extremstellen von f auf dem Rand von D zu diesen Punkten gehören. Wir berechnen

$$f(3, 0) = -3, \qquad f(-3, 0) = 21, \qquad f(-2, \pm\sqrt{5}) = 22.$$

Also ist das Maximum von f auf D gleich 22 (an der Stelle $(-2, \pm\sqrt{5})$ auf dem Rand), und das Minimum gleich -4 (an der Stelle $(2, 0)$ im Inneren).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 101. *Differentiation vektorwertiger Funktionen*

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ x^2z^2 \\ x^2y+y^2z \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^2w^2 \\ u+v \\ v^2w^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $\mathrm{J}f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ **(b)** $\mathrm{J}g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right)$ **(c)** $\mathrm{J}(g\circ f)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\mathrm{J}f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2xz^2 & 0 & 2x^2z \\ 2xy & x^2+2yz & y^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\mathrm{J}g\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2uw^2 & 0 & 2u^2w \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2vw^2 & 2v^2w \end{pmatrix}.$$

(c) Zunächst schreiben wir für $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right) := f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ die Matrix $\mathrm{J}g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right)$ als einen Ausdruck in $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{J}g\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+z^2)(x^2y+y^2z)^2 & 0 & 2(x^2+y^2+z^2)^2(x^2y+y^2z) \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2x^2z^2(x^2y+y^2z)^2 & 2x^4z^4(x^2y+y^2z) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nun ist $\mathrm{J}(g\circ f)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ das Produkt der beiden Jacobimatrizen:

$$\begin{aligned}&\mathrm{J}(g\circ f)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 2(x^2+y^2+z^2)(x^2y+y^2z)^2 & 0 & 2(x^2+y^2+z^2)^2(x^2y+y^2z) \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2x^2z^2(x^2y+y^2z)^2 & 2x^4z^4(x^2y+y^2z) \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2xz^2 & 0 & 2x^2z \\ 2xy & x^2+2yz & y^2 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= 4(x^2+y^2+z^2)(x^2y+y^2z)^2x + 4(x^2+y^2+z^2)^2(x^2y+y^2z)xy\\
a_{12} &= 4(x^2+y^2+z^2)(x^2y+y^2z)^2y + 2(x^2+y^2+z^2)^2(x^2y+y^2z)(x^2+2yz)\\
a_{13} &= 4(x^2+y^2+z^2)(x^2y+y^2z)^2z + 2(x^2+y^2+z^2)^2(x^2y+y^2z)y^2\\
a_{21} &= 2xz^2+2x\\
a_{22} &= 2y\\
a_{23} &= 2x^2z+2z\\
a_{31} &= 4x^3z^4(x^2y+y^2z)^2 + 4x^5z^4(x^2y+y^2z)y\\
a_{32} &= 2x^4z^4(x^2y+y^2z)(x^2+2yz)\\
a_{33} &= 4x^4z^3(x^2y+y^2z)^2 + 2x^4z^4(x^2y+y^2z)y^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 102. *Geometrische Eigenschaften von Gradienten*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (z-2)(x^2+4y^2-4)$ und die Niveaumenge

$$N_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

(a) Berechnen Sie jeweils die Tangentialebene an N_0 in $(1,1,2)^\intercal$ und in $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^\intercal$.

(b) Geben Sie jeweils Parameterdarstellungen für die Geraden an, die in $(1,1,2)^\intercal$ und in $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^\intercal$ senkrecht auf N_0 stehen.

(c) Geben Sie einen Punkt in N_0 an, in dem keine Tangentialebene an N_0 existiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x(z-2) \\ 8y(z-2) \\ x^2+4y^2-4 \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialebene an N_0 im Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ wird durch die Gleichung

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right)$$

beschrieben.

In $(1,1,2)^\intercal$ hat die Tangentialebene also die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = z-2 = 0$$

bzw. $z = 2$.

In $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^\intercal$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ -\frac{32}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -\frac{8}{\sqrt{5}}x + \frac{16}{5} - \frac{32}{\sqrt{5}}y + \frac{64}{5} = 16 - \frac{8}{\sqrt{5}}(x+4y) = 0$$

bzw $x + 4y = 2\sqrt{5}$.

(b) Die Gerade, die in $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ senkrecht auf N_0 steht, hat die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mu \operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$. Also ergibt sich in $(1,1,2)^\mathsf{T}$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und in $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^\mathsf{T}$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-\frac{8}{\sqrt{5}}\\-\frac{32}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$, was äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Es existiert keine Tangentialebene an N_0 im Punkt $\left(\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{smallmatrix}\right)$, wenn $\operatorname{grad} f \left(\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{smallmatrix}\right) = 0$ gilt: Jedes Skalarprodukt mit dem Nullvektor ist 0; dadurch beschreibt die Gleichung aus (a) in diesem Fall keine Ebene, sondern ganz $\mathbb{R}^3$.

Die Gleichung $\operatorname{grad} f \left(\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{smallmatrix}\right) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $z_0 = 2$ und $x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0$ gilt. Beispiele für solche Punkte sind $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\2\end{smallmatrix}\right)$ (die allgemeine Form lautet $\left(\begin{smallmatrix}\pm 2\sqrt{1-y^2}\\y\\2\end{smallmatrix}\right)$ mit $|y| \leqq 1$).

Aufgabe H 103. *Potentiale*

Welche der folgenden Vektorfelder besitzen ein Potential? Berechnen Sie ein Potential, wenn eines existiert.

(i) $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z\cos(x)\cos(y) \\ z\sin(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$

(ii) $f_2\colon D_1 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y\sin(xy)^2\cos(xy) + \ln(z) \\ 3x\sin(xy)^2\cos(xy) \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix}$ für $D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z > 0 \right\}$

(iii) $f_3\colon D_2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2x}{z} + y \\ \frac{2y}{z} + x \\ -\frac{x^2+y^2}{z^2} \end{pmatrix}$ für $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \neq 0 \right\}$

Lösungshinweise hierzu:

(i) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f_1 = \begin{pmatrix} -2\sin(x)\sin(y) \\ 0 \\ 2z\cos(x)\sin(y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also gibt es kein Potential.

(ii) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weil D_1 einfach zusammenhängend ist, gibt es ein Potential φ für f_2, d.h.

$$\begin{aligned} \varphi_x &= 3y\sin(xy)^2\cos(xy) + \ln(z), \\ \varphi_y &= 3x\sin(xy)^2\cos(xy), \\ \varphi_z &= \frac{x}{z}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gibt uns

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sin(xy)^3 + x\ln(z) + f(y,z).$$

Also ist

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sin(xy)^3 + x\ln(z)$$

ein Kandidat für ein Potential, und wir können ausrechnen, dass es die anderen zwei Gleichungen erfüllt, also wirklich ein Potential ist.

(iii) Die Menge D_2 ist nicht (einfach) zusammenhängend, also können wir die Existenz eines Potentials nicht mit der Rotation untersuchen. Für ein Potential φ muss

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{2x}{z} + y, \\ \varphi_y &= \frac{2y}{z} + x, \\ \varphi_z &= -\frac{x^2+y^2}{z^2}, \end{aligned}$$

gelten, also gibt die erste Gleichung

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{x^2}{z} + xy + f(y,z)$$

und die dritte

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{x^2+y^2}{z} + g(x,y).$$

Also vermuten wir, dass

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{x^2+y^2}{z} + xy$$

ein Potential ist, und können direkt prüfen, dass es die zweite Gleichung auch erfüllt.
Alternativ kann man sehen, dass $D_2 = D_2^+ \cup D_2^-$ ist, wobei

$$D_2^+ = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z > 0 \right\}, \qquad D_2^- = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z < 0 \right\},$$

und diese zwei Mengen einfach zusammenhängend sind. Weil $\operatorname{rot}(f_3) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ist, gibt es ein Potentiale $\varphi^+ \colon D_2^+ \to \mathbb{R}$ für die Einschränkung $f_3|_{D_2^+}$ von f_3 auf D_2^+, und analog ein Potential $\varphi^- \colon D_2^- \to \mathbb{R}$ für $f_3|_{D_2^-}$. Also ist

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{cases} \varphi^+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, & z > 0, \\ \varphi^-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, & z < 0, \end{cases}$$

ein Potential für f_3. Als konkretes Beispiel ist

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{z} + xy, & z > 0, \\ \frac{x^2+y^2}{z} + xy + 8, & z < 0, \end{cases}$$

ein Potential für f_3.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 104. *Parametrisierungen*

(a) Gegeben seien die folgenden Parametrisierungen.

$$C_1\colon [0,3\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, \qquad C_2\colon [-\tfrac{\pi}{2},\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix},$$

$$C_3\colon [-4,4] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}3t^2\\ 2t^3\end{pmatrix}, \qquad C_4\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix}t\\ t^2\\ |t|^3\end{pmatrix}.$$

Welche der obigen Parametrisierungen sind doppelpunktfrei? Welche sind regulär? Welche parametrisieren eine geschlossene Kurve?

(b) Geben Sie eine differenzierbare, aber nicht reguläre Parametrisierung des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- C_1 ist nicht doppelpunktfrei, denn es ist $C_1(0) = C_1(2\pi) = \binom{1}{0}$.
  C_1 ist stetig differenzierbar und es gilt $C_1'(t) = \binom{-\sin(t)}{\cos(t)} \neq \binom{0}{0}$ für alle $t \in [0,3\pi]$, da Sinus und Cosinus nie gleichzeitig Null werden (es gilt ja stets $(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$). Daher ist C_1 regulär.
  Die von C_1 parametrisierte Kurve ist nicht geschlossen, denn es ist $C_1(0) = \binom{1}{0} \neq \binom{-1}{0} = C_2(3\pi)$.
- C_2 ist nicht dopelpunktfrei, denn es ist $C_1(-\frac{\pi}{2}) = C_2(\frac{\pi}{2}) = \binom{0}{0}$.
  C_2 ist stetig differenzierbar. Weiterhin ist $C_2'(t) = \binom{-\sin(t)}{2\cos(2t)}$. Der erste Eintrag wird dann Null, wenn $t = k\pi$, für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber stets der zweite Eintrag $2\cos(2k\pi) = 2$. Daher gilt $C_2'(t) \neq \binom{0}{0}$ für alle $t \in [-\frac{\pi}{2},\pi]$. Die Parametrisierung ist also regulär.
  Die von C_2 parametrisierte Kurve ist nicht geschlossen, da $C_2(-\frac{\pi}{2}) = \binom{0}{0} \neq \binom{-1}{0} = C_2(\pi)$.
- C_3 ist doppelpunktfrei, da $t \mapsto t^3$ eine injektive Funktion ist. Daher ist auch $t \mapsto C_3(t)$ injektiv.
  C_3 ist stetig differenzierbar. Allerdings gilt $C_3'(0) = \binom{0}{0}$. Daher ist C_3 nicht regulär.
  Die von C_3 parametrisierte Kurve ist nicht geschlossen, denn es ist $C_3(-4) = \binom{48}{-128} \neq \binom{48}{128} = C_3(4)$.
- C_4 ist doppelpunktfrei, da die $t \mapsto t$ eine injektive Funktion ist. Daher ist auch $t \mapsto C_4(t)$ injektiv.
  C_4 ist stetig differenzierbar. Für die ersten beiden Komponentenfunktionen ist das offensichtlich, die Differenzierbarkeit in $t = 0$ der Abbildung $t \mapsto |t|^3$ sieht man leicht mit Hilfe des Differenzenquotienten ein.
  Die von C_4 parametrisierte Kurve ist nicht geschlossen, da $C_4(-1) = \big(-1,1,1\big) \neq \big(1,1,1\big) = C_4(1)$.

(b) Eine solche Parametrisierung ist beispielsweise gegeben durch $C\colon [-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{\cos(t^3)}{\sin(t^3)}$. Die Parametrisierung ist differenzierbar mit $C'(t) = \binom{-3t^2\sin(t^3)}{3t^2\cos(t^3)}$. Allerdings ist $C'(0) = \binom{0}{0}$, sodass C keine reguläre Parametrisierung ist.

Aufgabe H 105. *Gradientenfelder und Wegunabhängigkeit*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 3x_1x_2$. Berechnen Sie jeweils direkt das Kurvenintegral $\int_{K_j} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für $j = 1, 2, 3, 4$, wobei die K_j allesamt Verbindungslinien von $A = (-1, 0)$ nach $B = (0, 1)$ sind (und in dieser Richtung durchlaufen werden). Dabei seien

(a) K_1 die Strecke $\overline{AB}$,

(b) K_2 der Streckenzug $\overline{AO} \cup \overline{OB}$,

(c) K_3 das Viertel des Einheitskreises im zweiten Quadranten,

(d) K_4 der Teil des Graphen von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto 1 - t^2$ im zweiten Quadranten.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst berechnen wir $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$. Ist $C_j\colon [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von K_j, für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, so ist

$$\int_{K_j} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_{a_j}^{b_j} \nabla f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(a) Wir parametrisieren die Verbindungsstrecke standardmäßig durch $C_1\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $C_1(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{K_1} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(t-1) - 3t \\ -3(t-1) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 (1 - 4t)\,\mathrm{d}\,t = [t - 2t^2]_0^1 = -1.\end{aligned}$$

(b) Wir spalten das Integral auf in zwei Integrale über die Verbindungsstrecke $\overline{AO}$ bzw. $\overline{OB}$. Diese parametrisieren wir jeweils in kanonischer Weise wie in **(a)**. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\int_{K_2} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(t-1) \\ -3(t-1) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_0^1 \begin{pmatrix} -3t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 (2t - 2)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 0\,\mathrm{d}\,t = [t^2 - 2t]_0^1 + 0 = -1.\end{aligned}$$

(c) Eine Parametrisierung des Einheitskreises ist bekanntlich gegeben durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$. Da wir nur an dem Viertel im zweiten Quadranten interessiert sind, schränken wir uns auf $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ein. Jetzt müssen wir noch beachten, dass K_3 Viertelkreislinie im Uhrzeigersinn durchlaufen wird (bei der Standardparametrisierung die Kreislinie aber entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird). Deswegen muss das Vorzeichen des Integrals entsprechend angepasst werden. Es ist dann also

$$\begin{aligned}\int_{K_3} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \begin{pmatrix} 2\cos(t) - 3\sin(t) \\ -3\cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-2\cos(t)\sin(t) + 3\sin^2(t) - 3\cos^2(t))\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (3 - 6\cos^2(t))\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\sin^2(t)\right]_{\pi/2}^{\pi} + [3t]_{\pi/2}^{\pi} - 3\,[t + \cos(t)\sin(t)]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 0 - 1 + \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} - 0 = -1.\end{aligned}$$

(d) Eine Parametrisierung des gesuchten Parabelstückes ist gegeben durch $C_4\colon [-1,0] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto C_4(t) = \binom{t}{1-t^2}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{K_4} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\, x &= \int_{-1}^{0} \begin{pmatrix} 2t - 3(1-t^2) \\ -3t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\
&= \int_{-1}^{0} (9t^2 + 2t - 3)\,\mathrm{d}\, t \\
&= \left[3t^3 + t^2 - 3t\right]_{-1}^{0} \\
&= 0 - (-3 + 1 + 3) = -1.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 106. *Potentiale und Kurvenintegrale*

Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wobei $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2x_2\mathrm{e}^{x_1}\\ \mathrm{e}^{x_1}\\ 3x_2\end{pmatrix}$ und $g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\mathrm{e}^{x_1}\\ x_3\\ 0\end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $f + \alpha g$ ein Potential besitzt.

(b) Sei K die Kurve mit der Parametrisierung $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (0, \cos(t), \sin(t))^\intercal$.
Berechnen Sie $\int_K (f+3g)(x) \bullet \mathrm{d}\,x$, $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_K (f+17g)(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, besitzt $f + \alpha g$ genau dann ein Potential, wenn die Jacobimatrix $\mathrm{J}\,(f+\alpha g) = \mathrm{J}\,f + \alpha \mathrm{J}\,g$ symmetrisch ist. Es ist (man beachte, dass die Diagonaleinträge für die Symmetrie keine Rolle spielen)

$$\mathrm{J}\,f + \alpha \mathrm{J}\,g = \begin{pmatrix} * & -2\mathrm{e}^{x_1} & 0\\ \mathrm{e}^{x_1} & * & 0\\ 0 & 3 & * \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} * & \mathrm{e}^{x_1} & 0\\ 0 & * & 1\\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Die sich ergebende Matrix ist genau dann symmetrisch, wenn

$$(\alpha - 2)\mathrm{e}^{x_1} = \mathrm{e}^{x_1} \ \wedge\ 3 = \alpha \ \Leftrightarrow\ \alpha = 3.$$

(b) Wir stellen zunächst fest, dass K eine geschlossene Kurve ist.

- Da $(f+3g)$ nach **(a)** ein Potential besitzt, ist damit $\int_K (f+3g)(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0$.
- In **(a)** haben wir festgestellt, dass die Jacobimatrix von g nicht symmetrisch ist, also kann g auch kein Potential besitzen. Daher müssen wir das Kurvenintegral direkt mit Hilfe der Parametrisierung berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}\cos(t)\mathrm{e}^0\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}0\\ -\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\left[\sin(t)\cos(t) - t\right]_0^{2\pi} = -\pi.\end{aligned}$$

- Für das dritte Integral können wir die vorangegangenen Resultate verwenden. Denn es ist

$$\int_K (f+17g)(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_K (f+3g)(x) \bullet \mathrm{d}\,x + 14\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0 + 14\cdot(-\pi) = -14\pi.$$

Aufgabe H 107. *Kurvenintegrale*

Bestimmen Sie jeweils die Kurvenintegrale $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ von f längs der Kurve K.

(a) Sei $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{t}{\cosh(t)}$ eine Parametrisierung der Kurve K und sei zudem $f\colon K \to \mathbb{R}\colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1^2 + x_2$.

(b) Sei $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t), t)^\intercal$ eine Parametrisierung der Kurve K und sei zudem $f\colon K \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2,x_3)^\intercal \mapsto \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^1 (t^2+\cosh(t))\sqrt{1+\sinh^2(t)}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 (t^2+\cosh(t))\cosh(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 t^2\cosh(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= [t^2\sinh(t)]_0^1 - \int_0^1 2t\sinh(t)\,\mathrm{d}\,t + \left[\frac{\sinh(t)\cosh(t)}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^1 \\
&= \sinh(1) - [2t\cosh(t)]_0^1 + \int_0^1 2\cosh(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{\sinh(1)\cosh(1)}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \sinh(1) - 2\cosh(1) + [2\sinh(t)]_0^1 + \frac{\sinh(1)\cosh(1)}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 3\sinh(1) - 2\cosh(1) + \frac{1}{2}(1+\sinh(1)\cosh(1)).
\end{aligned}$$

(b) Mit

$$|C'(t)| = \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t - \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}$$

berechnet man

$$\begin{aligned}
\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2t^2}\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{4\pi^2} \sqrt{2+u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2+u)^3}\right]_0^{4\pi^2} \\
&= \frac{4}{3}(\sqrt{(1+2\pi^2)^3} - 1).
\end{aligned}$$