M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

15. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 57. *Reihenwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((-1)^k+3)^k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k!}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben $a_k = \frac{1}{((-1)^k+3)^k}$ und betrachten die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((-1)^{2k}+3)^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((-1)^{2k+1}+3)^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Da die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$ konvergieren, konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} = \frac{16}{15} + \frac{2}{3} = \frac{26}{15}.$$

(b) Es ist $\underbrace{\frac{k+2}{k!}}_{=:a_k} = \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}}_{=:b_k} + \underbrace{\frac{2}{k!}}_{=:c_k}$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} = \mathrm{e}, \qquad \text{(Indexverschiebung } \ell = k-1\text{)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!} = 2\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) - 1\right) = 2\mathrm{e} - 2. \qquad \text{(geschickte Addition von Null)}$$

Da die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergieren, konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \mathrm{e} + 2\mathrm{e} - 2 = 3\mathrm{e} - 2.$$

Aufgabe H 58. *Konvergenzuntersuchung*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{-(j^2)}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{k^4}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2+3^\ell)}$

(d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben $a_j = \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-(j^2)}$. Dann ist

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\sqrt[j]{|a_j|} = \overline{\lim_{j\to\infty}}\left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^j\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe also (absolut) konvergent.

(b) Da $\cos$ eine stetige Funktion ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty}\cos\left(\frac{1}{k^4}\right) = \cos\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^4}\right) = \cos(0) = 1.$$

Die Folge der Reihenglieder ist also keine Nullfolge und die Reihe kann nicht konvergent sein.

(c) Für $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} & 2+3^\ell < 3^{2\ell} \\ \Leftrightarrow\quad & \ln(2+3^\ell) < \ln(3^{2\ell}) = 2\ln(3)\ell \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{\ln(2+3^\ell)} > \frac{1}{2\ln(3)}\cdot\frac{1}{\ell}. \end{aligned}$$

Da aber die Reihe $\frac{1}{2\ln(3)}\cdot\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}$ divergiert (harmonische Reihe!), divergiert auch $\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2+3^\ell)}$ nach dem Minorantenkriterium.

(d) Wir schreiben

$$\begin{aligned} a_m = (-1)^m(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}) &= (-1)^m(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})\cdot\frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} \\ &= (-1)^m\frac{m+1-m}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} = (-1)^m\frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

Damit sehen wir sofort, dass $(|a_m|)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Da weiterhin die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}a_m$ alternierend ist, konvergiert $\sum_{m=1}^{\infty}a_m$ nach dem Leibniz-kriterium.

Aufgabe H 59. *Konvergenzkriterien*

(a) Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k \cdot 7^k}(a+3)^{5k}$.

(i) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Reihe absolut konvergiert.

(ii) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Reihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| < \mathrm{e}^{-1}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{(\alpha n)^n}{n!}$ eine Nullfolge.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben $b_k = \frac{(-5)^k}{k \cdot 7^k}(a+3)^{5k}$ und betrachten

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{|b_k|} &= \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \cdot \frac{5}{7}|a+3|^5 \\ &\xrightarrow{k\to\infty} \frac{5}{7}|a+3|^5.\end{aligned}$$

Das Wurzelkriterium besagt, dass die Reihe absolut konvergiert falls

$$\begin{aligned}\frac{5}{7}|a+3|^5 < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |a+3| < \sqrt[5]{\frac{7}{5}} \\ \Leftrightarrow \quad -\sqrt[5]{\frac{7}{5}} < a+3 < \sqrt[5]{\frac{7}{5}} \quad &\Leftrightarrow \quad -\sqrt[5]{\frac{7}{5}} - 3 < a < \sqrt[5]{\frac{7}{5}} - 3.\end{aligned}$$

Entsprechend divergiert die Reihe, wenn gilt

$$\frac{5}{7}|a+3|^5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < -\sqrt[5]{\frac{7}{5}} - 3 \text{ oder } a > \sqrt[5]{\frac{7}{5}} - 3.$$

Mit dem Wurzelkriterium lässt sich allerdings keine Aussage treffen für die Fälle $a = -\sqrt[5]{\frac{7}{5}}-3$ bzw. $a = \sqrt[5]{\frac{7}{5}}-3$. Diese Fälle sind gesondert durch Einsetzen zu betrachten.

- Sei $a = -\sqrt[5]{\frac{7}{5}} - 3$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k \cdot 7^k} \cdot \left(-\sqrt[5]{\frac{7}{5}}\right)^{5k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}}_{\text{divergent}}.$$

- Sei $a = \sqrt[5]{\frac{7}{5}} - 3$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k \cdot 7^k} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{7}{5}}\right)^{5k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}}_{\text{konvergent nach Leibnizkriterium}}.$$

Allerdings liegt keine absolute Konvergenz vor (s.o.).

(b) Wir betrachten

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\alpha^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha^n n^n} = \alpha \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)n!}{(n+1)!n^n} \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot \mathrm{e} < 1 \quad \text{da } \alpha \in [0, \mathrm{e}^{-1}).\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium (absolut). Da aber die Glieder einer konvergenten Reihe notwendigerweise eine Nullfolge bilden müssen, folgern wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $\alpha \in [0, \mathrm{e}^{-1})$ eine Nullfolge ist.

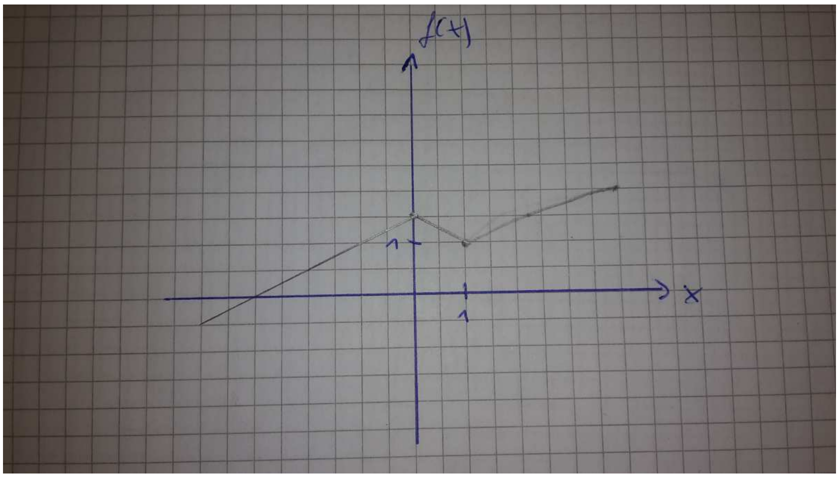
Aufgabe H 60. *Stetigkeit, ε-δ-Kriterium*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|x| & , x \leqq 1, \\ \sqrt{x} & , x > 1. \end{cases}$

(a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $[-4, 4]$.

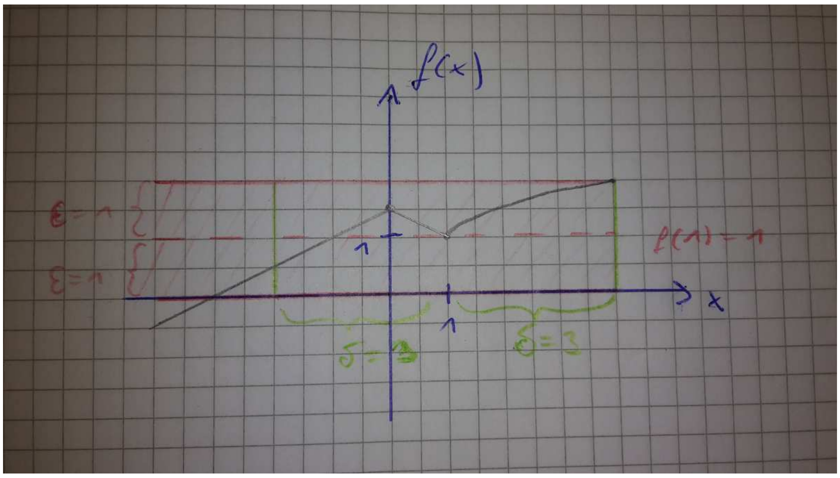
(b) Berechnen Sie für $\varepsilon \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ jeweils das größte $\delta > 0$, für das gilt $|f(x) - f(1)| \leqq \varepsilon$ für alle $x \in [1-\delta, 1+\delta]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) 

(b) Die Aufgabe löst man am Einfachsten mit Hilfe des Einzeichnens eines waagerechten Streifens der Breite ε um $f(1) = 1$. Dabei ist es sinnvoll, f für $x \leqq 1$ und $x > 1$ getrennt zu betrachten.

- $\varepsilon = 1$.

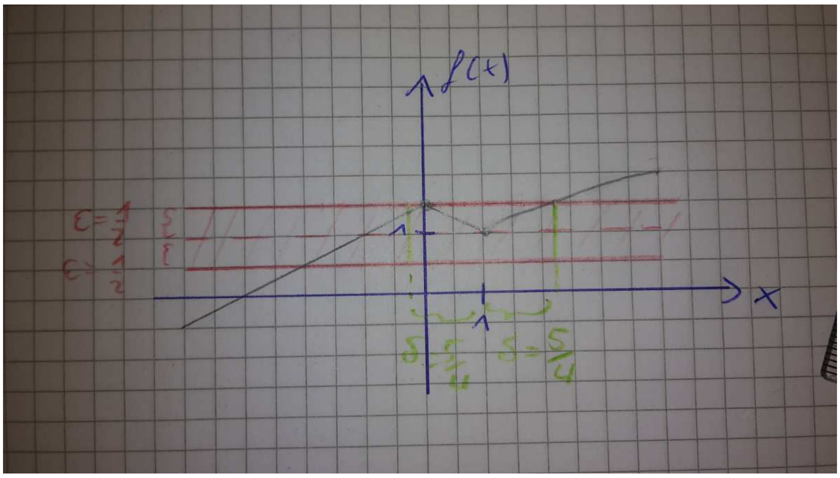
  

  Hier ist herauszufinden, in welcher δ-Umgebung von 1 die Funktionswerte zwischen 0 und 2 liegen. Offenbar ist $f(x) < 2$ für alle $x < 1$ und $f(x) \geqq 0$ für $x \in [-3, 1]$. Nach links können wir also 4 Einheiten gehen, ohne dass die Funktionswerte den Streifen verlassen.

  Für $x > 1$ gilt stets $f(x) > 0$, so dass wir nur noch herausfinden müssen, wann $f(x) = \sqrt{x} = 2$. Das führt uns darauf, dass $f(x)$ für $x > 1$ im Streifen liegt, falls $x \in (1, 4)$. Nach rechts können wir also maximal 3 Einheiten gehen.

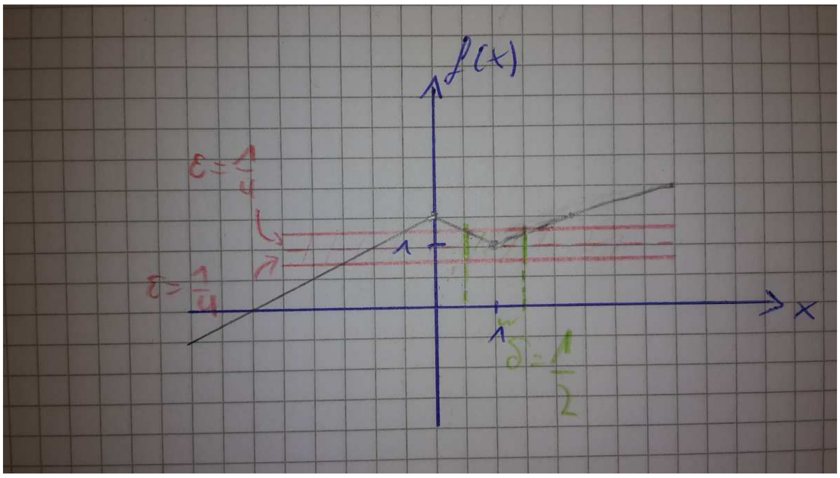
  Die größtmögliche δ-Umgebung $U_\delta(1)$ mit $f(U_\delta) \in [0, 2]$ ist also $U_3(1)$.

- $\varepsilon = \frac{1}{2}$.



Wir gehen wie oben vor und erhalten nach links die Grenze -1 und nach rechts die Grenze $\frac{9}{4}$. Die rechte Grenze liegt wieder näher an der 1, so dass das gesuchte δ gegeben ist durch $\delta = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$.

- $\varepsilon = \frac{1}{4}$.



Die linke Grenze ist hier $\frac{1}{2}$, die rechte ist $\frac{25}{16}$. Da $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \frac{9}{16} = \frac{25}{16} - 1$, ist diesmal die linke Grenze näher an der 1 und das gesuchte δ ist $\frac{1}{2}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61. *Einseitige Funktionsgrenzwerte*

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-3,1,2\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6}{(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)|x+3|}.$$

(a) Ist f stetig?

(b) Zerlegen Sie Zähler und Nenner soweit wie möglich in Faktoren.

(c) Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken des Definitionsbereiches. An welchen Stellen ist f stetig ergänzbar?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da der Zähler von f eine Polynomfunktion ist, ist dieser stetig. Weiterhin ist der Nenner von f stetig (Produkt eines Polynoms mit einer Funktion, die aus der Hintereinanderausführung der stetigen Betragsfunktion und einer linearen Funktion entsteht). Damit ist f als Quotient stetiger Funktionen ebenfalls stetig.

(b) Die Definitionslücken sind Nullstellen des Nenners. Außerdem stellen wir fest, dass -3, 1 und 2 auch Nullstellen des Zählers sind. Damit lassen sich Zähler und Nenner leicht mit Hilfe von Polynomdivision faktorisieren:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)^2|x+3|}.$$

(c)
- Definitionslücke $x_0 = -3$. Für den linksseitigen Grenzwert ist zu beachten, dass $x < -3$, also $|x+3| = -(x+3)$. Damit ergibt sich

$$\lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} -\frac{x-1}{x-2} = -\frac{-4}{-5} = -\frac{4}{5}.$$

  Beim rechtsseitigen Grenzwert gilt $x > -3$, so dass $|x+3| = x+3$. Damit ist

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}.$$

  Links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren zwar, sind aber unterschiedlich. Die Funktion ist daher nicht in -3 stetig ergänzbar.

- Definitionslücke $x_0 = 1$. Da wir uns nur für x in der Nähe von 1 interessieren, können wir uns auf den Fall $x > -3$ beschränken, so dass wir $|x+3|$ für unsere Untersuchungen durch $(x+3)$ ersetzen können. Damit ist

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{x-2} = 0 = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x\to 1+0} f(x).$$

  Hier existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert und stimmen überein. Die Funktion f kann also in 1 stetig ergänzt werden (durch Definition $f(1) := 0$).

- Definitionslücke $x_0 = 2$. Auch hier genügt es wieder, x in der Nähe von 2 zu betrachten. Damit können wir annehmen, dass $x - 1 > 0$ und $x > -3$, so dass $|x + 3| = (x + 3)$. Es ist damit

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{x-1}{x-2} = -\infty,$$

da $x - 2 < 0$, wenn wir uns von links der 2 annähern. Weiter ist

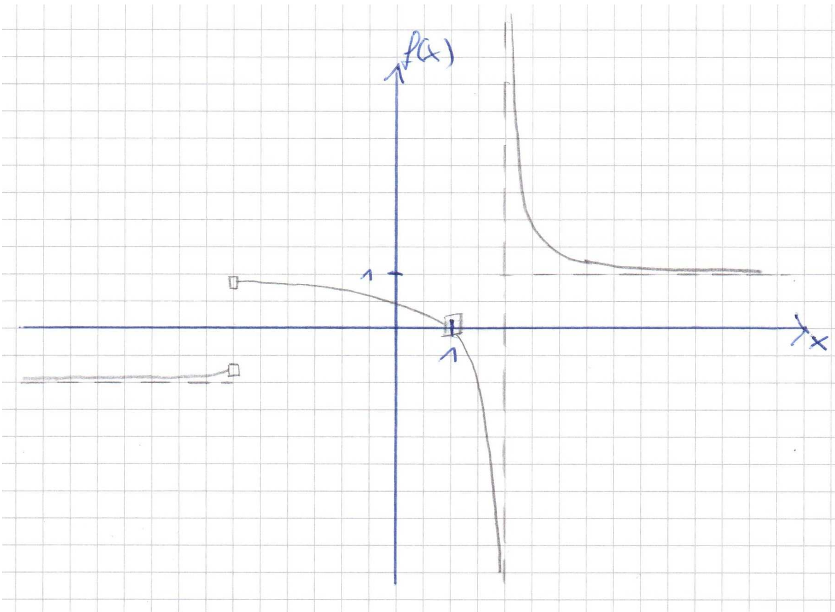
$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{x-1}{x-2} = +\infty,$$

da $x - 2 > 0$, wenn wir uns von rechts der 2 annähern.

Bei der Definitionslücke $x_0 = 2$ liegt bestimmte Divergenz vor, also kann die Funktion in 2 nicht stetig ergänzt werden.

(d) Wie immer sollte das Koordinatensystem folgende Informationen enthalten: Pfeile an den Achsen, Beschriftung der Achsen und die Skalierung (durch Festlegen mindestens einer Längeneinheit).

Die Skizze sollte neben dem Verhalten an den Definitionslücken (Sprung bei -3, stetige Ergänzbarkeit bei 1 und senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel $-/+$ bei 2) das qualitative Verhalten der Funktion wiedergeben, insbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.



Aufgabe H 62. *Funktionsgenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (ohne Verwendung der Regel von l'Hospital).

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^4+4x^3-9x^2+10}{(x^2+1)(2x^2+\mathrm{e}^{-5x})}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{3x}{\sqrt{7x^4+2x^2}-\sqrt{7x^4+13x^2}}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^x)-13\arctan(x^5)}{\frac{x^7-9}{23x^6}+\frac{3x^4+19x}{7x^5+34}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\pi x)\ln(|\ln|x||)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Kürzen von x^4 ergibt sich

$$\frac{7+\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{10}{x^4}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{x^2}\right)} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{7+0-0+0}{(1+0)(2+0)} = \frac{7}{2}.$$

Dabei haben wir die Klammern im Nenner jeweils mit x^2 gekürzt, um uns das fehleranfällige Ausmultiplizieren zu ersparen.

(b) Da wir den rechtsseitigen Grenzwert betrachten, ist $x>0$. Damit ist hier $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Es ergibt sich

$$\frac{3x}{\sqrt{7x^4+2x^2}-\sqrt{7x^4+13x^2}} = \frac{3x}{x(\sqrt{7x^2+2}-\sqrt{7x^2+13})} = \frac{3}{\sqrt{7x^2+2}-\sqrt{7x^2+13}} \xrightarrow{x\to0+0} \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{13}}.$$

Alternative: Umständlicher funktioniert auch der „Wurzeltrick“ Es ist für positives x

$$\begin{aligned}\frac{3x}{\sqrt{7x^4+2x^2}-\sqrt{7x^4+13x^2}} &= \frac{3x}{\sqrt{7x^4+2x^2}-\sqrt{7x^4+13x^2}}\cdot\frac{\sqrt{7x^4+2x^2}+\sqrt{7x^4+13x^2}}{\sqrt{7x^4+2x^2}+\sqrt{7x^4+13x^2}}\\ &= \frac{3x\left(\sqrt{7x^4+2x^2}+\sqrt{7x^4+13x^2}\right)}{-11x^2}\\ &= \frac{3\left(\sqrt{7x^2+2}+\sqrt{7x^2+13}\right)}{-11}\\ &\xrightarrow{x\to0+0} \frac{3(\sqrt{0+2}+\sqrt{0+13})}{-11} = -\frac{3}{11}(\sqrt{2}+\sqrt{13}).\end{aligned}$$

Zur Übung möge man sich überzeugen, dass beide Ergebnisse gleich sind.

(c) Der erste Summand $\frac{x^7-9}{23x^6}$ im Nenner ist ein rationaler Ausdruck, dessen Zählergrad größer als der Nennergrad ist. Der führende Koeffizient des Nenners ist positiv, also divergiert dieser Ausdruck für $x\to+\infty$ bestimmt gegen $+\infty$.

Der zweite Summand $\frac{3x^4+19x}{7x^5+34}$ im Nenner ist ein rationaler Ausdruck, dassen Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Daher konvergiert dieser Ausduck gegen 0 für $x\to+\infty$.

Insgesamt stellen wir fest, dass der Nenner bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Wegen

$$|\sin(\mathrm{e}^x)-13\arctan(x^5)| \leqq |\sin(\mathrm{e}^x)|+13|\arctan(x^5)| \leqq 1+13\cdot\frac{\pi}{2}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ bleibt der Zähler beschränkt.

Insgesamt konvergiert der gesamte Quotient gegen 0 für $x\to+\infty$.

(d) Für $x \to 0$ gilt $\ln|x| \to -\infty$. Damit gilt $\lim_{x\to 0} \ln|\ln|x|| = +\infty$. Weiterhin gilt wegen der Stetigkeit von $\cos$, dass $\lim_{x\to 0}\cos(\pi x) = \cos(0) = 1$. Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x\to 0} \cos(\pi x) \ln|\ln|x|| = +\infty.$$

Aufgabe H 63. *Gleichheitsproblem, Intervallhalbierung*

(a) Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei f streng monoton fallend und g streng monoton wachsend mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Begründen Sie, dass dann das Gleichheitsproblem für f und g auf $[a,b]$ genau eine Lösung besitzt.

(b) Nach **(a)** hat die Gleichung $16^{-x} = x^3$ auf $[0,1]$ genau eine Lösung. Bestimmen Sie diese näherungsweise, indem Sie die ersten drei Schritte der Intervallhalbierungsmethode mit $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$ anwenden. Wie viele Schritte müsste man mindestens durchführen, um zu garantieren, dass die Näherungslösung nicht mehr als 10^{-6} von der tatsächlichen Lösung abweicht?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zunächst einmal zeigen wir mit Hilfe des Nullstellensatzes, dass es mindestens eine Lösung geben muss. Betrachten wir nämlich die Funktion $h := f - g$, so ist nach Voraussetzung $h(a) = f(a) - g(a) > 0$ und $h(b) = f(b) - g(b) < 0$. Da f und g und damit h stetig sind, muss nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in (a,b)$ existieren mit $h(\xi) = 0$, also $f(\xi) = g(\xi)$.

Wir nutzen nun die Monotonieeigenschaften von f und g aus, um zu zeigen, dass es keine weitere Schnittstelle als ξ geben kann. Da f streng monoton fallend ist, gilt $f(x) < f(\xi)$ für alle $x \in (\xi, b]$. Da g streng monoton wächst, gilt $g(x) > g(\xi)$ für alle $x \in (\xi, b]$. Damit ist

$$f(x) < f(\xi) = g(\xi) < g(x)$$

für alle $x \in (\xi, b]$. Analog argumentiert man, dass

$$f(x) > f(\xi) = g(\xi) > g(x)$$

für alle $x \in [a, \xi)$ gilt.

Also gibt es außer ξ keine weiteren Schnittstellen von f und g auf $[a,b]$.

(b) Es ist $\frac{1}{2}(a_0 + b_0) = \frac{1}{2}$. Da gilt $f\left(\frac{1}{2}\right) = 16^{-1/2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = g\left(\frac{1}{2}\right)$, ist

$$a_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = 1.$$

Es ist $\frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{3}{4}$. Da gilt $f\left(\frac{3}{4}\right) = 16^{-3/4} = \frac{1}{8} < \frac{27}{64} = g\left(\frac{3}{4}\right)$, ist

$$a_2 = \frac{1}{2},\ b_2 = \frac{3}{4}.$$

Es ist $\frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{5}{8}$. Der Vergleich der Funktionswerte ist nun nicht mehr so leicht möglich, daher berechnen wir $f\left(\frac{5}{8}\right) = 16^{-5/8} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ und $g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{125}{512}$. Da $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, ist

$$f\left(\frac{5}{8}\right) < \frac{3}{16} = \frac{96}{512} < \frac{125}{512} = g\left(\frac{5}{8}\right).$$

Also haben wir

$$a_3 = \frac{1}{2},\ b_3 = \frac{5}{8}.$$

Als Näherungslösung kann man nun jede Zahl aus dem Intervall $[a_3, b_3]$ nehmen.

Für die Fehlerabschätzung stellen wir fest, dass sich die Länge des Intervalls, in dem sich die Nullstelle befindet immer halbiert. Daher haben wir nach 20 Schritten ein Intervall der Länge $1 \cdot 2^{-20} < 10^{-6}$.

Aufgabe H 64. *Zwischenwertsatz*

Die Zugstrecke zwischen zwei Städten sei 800 km lang. Ein Zug fährt die Strecke innerhalb von vier Stunden und hat diese somit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 200 km/h zurückgelegt. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass es einen Zeitraum von einer Stunde gibt, in dem der Zug genau 200 km der Strecke gefahren ist.
Hinweis: Sei $s(t)$ die nach t Stunden zurückgelegte Strecke (in km). Betrachten Sie $s(t+1)-s(t)$ für $t \in [0,3]$.

Lösungshinweise hierzu: Da sich der Zug nicht teleportiert, ist die Wegstreckenfunktion s stetig. Wir schreiben kurz $\sigma(t) := s(t+1) - s(t)$, σ ist demnach ebenfalls stetig. Bekannt ist, dass $s(0) = 0$ und $s(4) = 800$. Wir können schreiben

$$\begin{aligned}800 = s(4) &= s(4) + \underbrace{s(3) - s(3)}_{=0} + \underbrace{s(2) - s(2)}_{=0} + \underbrace{s(1) - s(1)}_{=0} + \underbrace{s(0)}_{=0} \\ &= (s(4) - s(3)) + (s(3) - s(2)) + (s(2) - s(1)) + (s(1) - s(0)) \\ &= \sigma(3) + \sigma(2) + \sigma(1) + \sigma(0).\end{aligned}$$

Wenn $\sigma(j) = 200$ gilt für ein $j \in \{0,1,2,3\}$, sind wir fertig.
Nehmen wir nun an, dass $\sigma(j) \neq 200$ für $j \in \{0,1,2,3\}$. Würde gelten, dass $\sigma(j) < 200$ bzw. > 200 für **alle** $j \in \{0,1,2,3\}$, so wäre auch die Summe < 800 bzw. > 800. Da aber Gleichheit gelten muss, muss es $j_1, j_2 \in \{0,1,2,3\}$ geben mit $\sigma(j_1) < 200$ und $\sigma(j_2) > 200$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann ein $\eta \in [\min\{j_1,j_2\}, \max\{j_1,j_2\}]$ so, dass $\sigma(\eta) = 200$.
Bemerkung: Interessanterweise wird nirgends verlangt, dass s monoton wächst. Der Zug könnte also auch zwischendurch anhalten oder rückwärts fahren.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 65. *Konvergenz von Potenzreihen*

(a) Schreiben Sie die Reihen als Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit geeigneten $a_n \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ei})^n}{\sqrt{n3^{2n+1}+3^{2n}}} \left(\frac{\mathrm{i}+\mathrm{e}\mathrm{i}z}{\mathrm{e}}\right)^n$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{64}\Big(z^2-2z-3+(1-z)4\mathrm{i}\Big)^2\right)^n$

(b) Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Potenzreihen in **(a)** konvergieren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Mittels Ausklammern folgt $\sqrt{n3^{2n+1}+3^{2n}} = 3^n\sqrt{3n+1}$ und $\left(\frac{\mathrm{i}+\mathrm{eiz}}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{i}^n\left(z+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$. Damit können wir die Reihe schreiben als

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ei})^n}{\sqrt{n3^{2n+1}+3^{2n}}} \left(\frac{\mathrm{i}+\mathrm{eiz}}{\mathrm{e}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n \frac{\mathrm{i}^{2n}}{\sqrt{3n+1}} \left(z-\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ und $a_n = \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n \frac{\mathrm{i}^{2n}}{\sqrt{3n+1}} = \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$. Wir bestimmen den Konvergenzradius ρ mit 1.14.7:

$$a = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{3}\sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}} \overset{(\star)}{=} \frac{\mathrm{e}}{3}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n}{3+4/n}} = \frac{\mathrm{e}}{3}\sqrt{\frac{3}{3}} = \frac{\mathrm{e}}{3},$$

wobei wir in $(\star)$ die Stetigkeit der Wurzelfunktion benutzt haben um Grenzwertbildung mit Funktionsauswertung zu vertauschen. Damit ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{a} = \frac{3}{\mathrm{e}}$.

(ii) Um das Umschreiben in die Standardform besser nachzuvollziehen, verwenden wir für den Index k anstelle von n, d.h. wir betrachten $\sum\limits_{k=5}^{\infty}\left(\frac{1}{64}\Big(z^2-2z-3+(1-z)4\mathrm{i}\Big)^2\right)^k$.

Der Ausdruck in der inneren Klammer kann geschrieben werden als

$$z^2-2z-3+(1-z)4\mathrm{i} = z^2-2z(1+2\mathrm{i})-3+4\mathrm{i} = \Big(z-(1+2\mathrm{i})\Big)^2.$$

Insgesamt folgt damit und mit $64 = (\sqrt{8})^4 = (2\sqrt{2})^4$ schließlich

$$\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{1}{64}\Big(z^2-2z-3+(1-z)4\mathrm{i}\Big)^2\right)^k = \sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{4k}\Big(z-(1+2\mathrm{i})\Big)^{4k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 1+2\mathrm{i}$ und $a_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ für $n = 20, 24, 28, \ldots$ und sonst $a_n = 0$. Kompakt können wir dies auch ausdrücken als

$$a_n = \begin{cases} \left(2\sqrt{2}\right)^{-n} & \text{falls } n = 4k \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqq 5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bestimmen den Konvergenzradius ρ mit 1.14.7:

$$a = \overline{\lim_{n>0}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[4k]{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{4k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Damit ist der Konvergenzradius gegeben durch $\rho = \frac{1}{a} = 2\sqrt{2}$.

(b) **(i)** Da wir nur die Konvergenz für reellen Zahlen $z \in \mathbb{R}$ untersuchen, müssen wir uns für $z_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ und $\rho = \frac{3}{\mathrm{e}}$ aus **(a)** zunächst klar machen, welche Teile der reellen Achse im Konvergenzkreis $U_\rho(z_0)$ liegen. Da der Mittelpunkt z_0 von $U_\rho(z_0)$ selbst reell ist, liegt somit nur $(-\frac{1}{\mathrm{e}} - \rho, -\frac{1}{\mathrm{e}} + \rho) = (-\frac{4}{\mathrm{e}}, \frac{2}{\mathrm{e}})$ innerhalb von $U_\rho(z_0)$. Die Menge $\mathbb{R} \setminus [-\frac{4}{\mathrm{e}}, \frac{2}{\mathrm{e}}]$ liegt außerhalb von $U_\rho(z_0)$ und die Punkte $z = -\frac{4}{\mathrm{e}}$ und $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$ liegen auf dem Rand des Konvergenzkreises $U_\rho(z_0)$.

Mit Satz 1.14.4 folgt, dass die Potenzreihe für $z \in (-\frac{4}{\mathrm{e}}, \frac{2}{\mathrm{e}})$ konvergiert und für $z \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{4}{\mathrm{e}}, \frac{2}{\mathrm{e}}] = (-\infty, -\frac{4}{\mathrm{e}}) \cup (\frac{2}{\mathrm{e}}, +\infty)$ divergiert. Wir betrachten die Randpunkte:

- Wir zeigen, dass die Reihe für $z = -\frac{4}{\mathrm{e}}$ divergiert. Einsetzen von $z = -\frac{4}{\mathrm{e}}$ liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \left(-\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

  Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $4n \geqq 3n+1$ und damit $2\sqrt{n} \geqq \sqrt{3n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \geqq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Wäre die Potenzreihe konvergent für $z = -\frac{4}{\mathrm{e}}$, so müsste nach dem Majorantenkriterium 1.9.10 wegen dieser Abschätzung auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ und damit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergieren. Dies liefert einen Widerspruch zu 1.9.12, wonach $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert.

- Wir zeigen, dass die Reihe für $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$ konvergiert. Einsetzen von $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$ liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

  Die Reihe der rechten Seite alterniert mit Reihenglieder $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Nun ist die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, da $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} = |a_n| \Leftrightarrow 3n+1 \leqq 3n+4$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zudem ist $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} = 0$, wonach $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist. Nach dem Leibniz-Kriterium ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$ konvergent. Also konvergiert die Potenzreihe für $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$.

Also konvergiert die Reihe für $z \in (-\frac{4}{\mathrm{e}}, \frac{2}{\mathrm{e}}]$ und divergiert für $z \in (-\infty, -\frac{4}{\mathrm{e}}] \cup (\frac{2}{\mathrm{e}}, +\infty)$.

(ii) Um den Bereich der reellen Achse zu bestimmen, welcher im Konvergenzkreis $U_\rho(z_0)$ liegt (mit komplexen Mittelpunkt $z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$ und Radius $\rho = 2\sqrt{2}$ aus **(a)**), suchen wir zunächst die reellen Zahlen $t \in \mathbb{R}$, welche von z_0 den Abstand $\rho > 0$ haben. Dies führt auf die Bedingung

$$|t - z_0| = \rho \;\Leftrightarrow\; |t - z_0|^2 = \rho^2 \;\Leftrightarrow\; |(t-1) - 2\mathrm{i}| = (2\sqrt{2})^2 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 2t - 3 = 0,$$

wobei $t_1 = -1$ und $t_2 = 3$ die Gleichung auf der rechten Seite lösen. Damit liegt $(-1, 3)$ innerhalb von $U_\rho(z_0)$. Die Menge $\mathbb{R} \setminus [-1, 3]$ liegt außerhalb von $U_\rho(z_0)$ und die Punkte $z = -1$ und $z = 3$ liegen auf dem Rand des Konvergenzkreises $U_\rho(z_0)$.

Mit Satz 1.14.4 folgt, dass die Potenzreihe für $z \in (-1, 3)$ konvergiert und für $z \in \mathbb{R} \setminus [-1, 3] = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ divergent ist. Für einen beliebigen Randpunkt z mit $|z - z_0| = \rho = 2\sqrt{2}$ ist die Reihe nach 1.9.1 divergent, da die Reihenglieder aufgrund von

$$\left| \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{4k} (z - (1+2\mathrm{i}))^{4k} \right| = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{4k} |z - z_0|^{4k} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{4k} \left(2\sqrt{2}\right)^{4k} = 1$$

keine Nullfolge bilden. Damit divergiert die Reihe insbesondere für $z = -1$ und $z = 3$.

Aufgabe H 66. *Potenzreihe mit Parameter*

Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n k) + n^k}{k^n + \pi} (z + \mathrm{i}n)^k$ für $n \in \{-5, 2\}$.

(a) Bestimmen Sie für $n = 2$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(b) Bestimmen Sie für $n = -5$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $n = 2$ erhalten wir, wegen $\cos(2\pi k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k) + 2^k}{k^2 + \pi} (z + 2\mathrm{i})^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2^k}{k^2 + \pi} (z + 2\mathrm{i})^k$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = -2\mathrm{i}$ und Reihenglieder $a_k = \frac{1 + 2^k}{k^2 + \pi}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir bestimmen den Konvergenzradius mit 1.14.7. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{2}{\sqrt[k]{k}^2 \sqrt[k]{1 + \pi}} \leqq \frac{\sqrt[k]{1 + 2^k}}{\sqrt[k]{k^2 + k^2\pi}} \leqq \frac{\sqrt[k]{1 + 2^k}}{\sqrt[k]{k^2 + \pi}} = \sqrt[k]{|a_k|} \leqq \frac{\sqrt[k]{2^k + 2^k}}{\sqrt[k]{k^2}} = \frac{2\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{k}^2}\,.$$

Nach 1.5.7 ist $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{1 + \pi} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = 1$, und nach 1.5.10 ist $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$. Damit folgt aus den Grenzwertsätzen 1.5.3, dass die linke und rechte Seite jeweils gegen 2 konvergiert, womit nach Sandwichsatz 1.5.6 auch $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 2$. Der Konvergenzradius ist daher $\rho = \frac{1}{2}$.
Mit Satz 1.14.4 folgt, dass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 2\mathrm{i}| < \frac{1}{2}$ konvergiert, und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 2\mathrm{i}| > \frac{1}{2}$ divergiert.
Wir betrachten noch das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises also auf der Menge $K_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + 2\mathrm{i}| = \frac{1}{2}\right\}$. Wenn $z \in K_2$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1 + 2^k}{k^2 + \pi} (z + 2\mathrm{i})^k \right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^k}{k^2} \big(\underbrace{|z + 2\mathrm{i}|}_{\overset{z \in K_2}{=} \frac{1}{2}} \big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ nach 1.8.3 konvergiert, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z + 2\mathrm{i})^k$ für jedes $z \in K_2$ absolut konvergent. Dies impliziert die Konvergenz für jedes $z \in K_2$.
Insgesamt ist damit die Potenzreihe genau für $z \in \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + 2\mathrm{i}| \leqq \frac{1}{2}\right\}$ konvergent.
Bemerkung: Im Allgemeinen kann es beliebig schwer werden, das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rand des Konvergenzkreises zu bestimmen. In (wichtigen) Spezialfällen genügt es aber, die Reihe der Beträge zu betrachten.

(b) Für $n = -5$ erhalten wir, wegen $\cos(-5\pi k) = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(-5\pi k) + (-5)^k}{k^{-5} + \pi} (z - 5\mathrm{i})^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + (-5)^k}{k^{-5} + \pi} (z - 5\mathrm{i})^k$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 5\mathrm{i}$ und Reihenglieder $a_k = \frac{(-1)^k + (-5)^k}{k^{-5} + \pi}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir bestimmen den Konvergenzradius mit 1.14.7. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt[k]{|(-1)^k + (-5)^k|}}{\sqrt[k]{k^{-5} + \pi}} = \frac{\sqrt[k]{|-1|^k |1 + 5^k|}}{\sqrt[k]{k^{-5} + \pi}} = \frac{\sqrt[k]{1 + 5^k}}{\sqrt[k]{k^{-5} + \pi}}$$

und somit weiter

$$\frac{5}{\sqrt[k]{1+\pi}} = \frac{\sqrt[k]{5^k}}{\sqrt[k]{1+\pi}} \leqq \frac{\sqrt[k]{1+5^k}}{\sqrt[k]{k^{-5}+\pi}} = \sqrt[k]{|a_k|} \leqq \frac{\sqrt[k]{5^k+5^k}}{\sqrt[k]{k^{-5}}} = 5\sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k}^{5} .$$

Analog zu **(a)** sehen wir, dass die linke und rechte Seite jeweils gegen 5 konvergiert, womit nach dem Sandwichsatz 1.5.6 auch $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 5$. Der Konvergenzradius ist somit $\rho = \frac{1}{5}$.
Mit Satz 1.14.4 folgt, dass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-5\mathrm{i}| < \frac{1}{5}$ konvergiert, und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-5\mathrm{i}| > \frac{1}{5}$ divergiert.
Nun bleibt noch der Rand zu untersuchen, d.h. die Menge $K_{-5} = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-5\mathrm{i}| = \frac{1}{5}\right\}$.
Wir betrachten wieder die Beträge der Reihenglieder. Es ist

$$\left|a_k(z-5\mathrm{i})^k\right| = \frac{|-1|^k|1+5^k|}{k^{-5}+\pi}\Big(\underbrace{|z-5\mathrm{i}|}_{\overset{z\in K_{-5}}{=}\frac{1}{5}}\Big)^k = \frac{5^{-k}+1}{k^{-5}+\pi} \geqq \frac{1}{1+\pi} .$$

Das bedeutet, dass die Folge $(a_k(z-5\mathrm{i})^k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $z \in K_{-5}$ keine Nullfolge ist (denn der Abstand zu 0 beträgt immer mindestens $\frac{1}{1+\pi}$). Nach 1.9.1 kann somit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-5\mathrm{i})^k$ für $z \in K_{-5}$ nicht konvergieren.
Insgesamt ist damit die Potenzreihe genau für $z \in \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-5\mathrm{i}| < \frac{1}{5}\right\}$ konvergent.

Aufgabe H 67. *Produkt von Potenzreihen*

Seien die Abbildungen $f: U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g: U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \qquad \text{und} \qquad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n .$$

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f und ρ_g von g.

(b) Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und geben Sie deren Konvergenzradius an.
Was hat die Potenzreihe zu tun mit der Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{1}{2}, 3\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{3}{2z^2-7z+3}\ ?$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$ gilt mit 1.14.7, dass $\rho_f = 3$ und $\rho_g = \frac{1}{2}$.

(b) Mit $a_n := \frac{1}{3^n}$, $b_n := 2^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.
Die Potenzreihe von $f \cdot g$ ist nach 1.14.11 für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min(\rho_f, \rho_g)$ dann gegeben durch

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\cdot 2^{n-k}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k\right) 2^n z^n.$$

Zur expliziten Berechnung der inneren Summe verwenden wir die Formeln aus 1.8.4. Damit erhalten wir für $f \cdot g$ die Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k\right) 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-(\frac{1}{6})^{n+1}}{1-\frac{1}{6}}\right) 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\tfrac{1}{5}\left(6-(\tfrac{1}{6})^n\right)2^n\right] z^n.$$

Wir verwenden diese Darstellung zur Bestimmung des Konvergenzradius $\rho_{f\cdot g}$ der Potenzreihe von $f\cdot g$. Mit 1.14.7 erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5}\left(6-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{5}}\sqrt[n]{6-\left(\tfrac{1}{6}\right)^n}.$$

Nach 1.5.7 gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$. Weiter folgt aus $6^n \geqq 6$ die Relation $-\frac{1}{6} \leqq -\left(\frac{1}{6}\right)^n \leqq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und daher weiter

$$\sqrt[n]{\frac{35}{6}} = \sqrt[n]{6-\frac{1}{6}} \leqq \sqrt[n]{6-\left(\frac{1}{6}\right)^n} \leqq \sqrt[n]{6}\,.$$

Erneute Anwendung von 1.5.7 liefert $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{35}{6}}=1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6}=1$, womit nach dem Sandwichsatz 1.5.6 auch $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6-\left(\frac{1}{6}\right)^n}=1$ gilt. Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 folgt damit insgesamt $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{5}}\sqrt[n]{6-\left(\frac{1}{6}\right)^n}=2$, und somit $\rho_{f\cdot g}=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$.

Was hat nun die Potenzreihe von $f\cdot g$, deren Koeffizienten wir oben bestimmt haben, mit der Funktion h zu tun? Weil die Potenzreihe von $f\cdot g$ die Summe zweier (im Wesentlichen) geometrischer Reihen ist, können wir deren Werte mit 1.14.8 explizit ausrechnen. Es gilt nach 1.14.11 für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<\min(\rho_f,\rho_g)=\frac{1}{2}=\rho_{f\cdot g}$

$$\begin{aligned}
f(z)g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\tfrac{1}{5}\left(6-\left(\tfrac{1}{6}\right)^n\right)2^n\right]z^n = \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \\
&= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{1-2z}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{6(3-z)-3(1-2z)}{(1-2z)(3-z)}\right) \\
&= \frac{3}{2z^2-7z+3} = h(z)
\end{aligned}$$

Also ist die Potenzreihe von $f\cdot g$ auf ihrem Konvergenzkreis $U_{\rho_{f\cdot g}}(0)$ gerade $h|_{U_{\rho_{f\cdot g}}(0)}$.
Bemerkung: Alternativ kann man dies auch folgendermaßen einsehen: Aufgrund von Satz 1.14.11 stellt die Potenzreihe von $f\cdot g$ auf $U_{\min\left(\rho_f,\rho_g\right)}(0)=U_{\frac{1}{2}}(0)$ die Produktfunktion $f\cdot g$ dar und die Produkte $f(z)\cdot g(z)$ kann man für $z\in U_{\frac{1}{2}}(0)$ explizit mithilfe der geometrischen Summenformel 1.14.8 berechnen:

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right)\left(\frac{1}{1-2z}\right) = \frac{3}{2z^2-7z+3} = h(z).$$

Aufgabe H 68. *Logarithmische Spirale*

Gegeben sei $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}\colon\ t\mapsto\left(\sqrt{2}\,\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{-t}$.

Die Abbildung f beschreibt eine logarithmische Spirale. Beispiele aus der Natur finden sich unter https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Spirale.

(a) Zeichnen Sie die Punkte $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ in die komplexe Zahlenebene ein und skizzieren Sie die Menge $f\left([-2,2]\right)$.

(b) Wir benutzen jetzt nur die Werte von f an besonderen Stellen.
Berechnen Sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f(n+1)-f(n)|$.

(c) Für $z_0 = \sqrt{2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right)$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sei $g\colon\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}\colon\ t \mapsto (z - z_0)^{-t}$.
Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big(g(k+1) - g(k)\Big)$ absolut konvergent?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zum Zeichnen formen wir $f(t)$ zunächst mit der Formel von Euler und de Moivre 1.14.18 um. Wir erhalten für $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = (\sqrt{2})^{-t}\exp\left(-\mathrm{i}\tfrac{5\pi}{4}t\right) = (\sqrt{2})^{-t}\Big(\cos(-\tfrac{5\pi}{4}t) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{5\pi}{4}t)\Big).$$

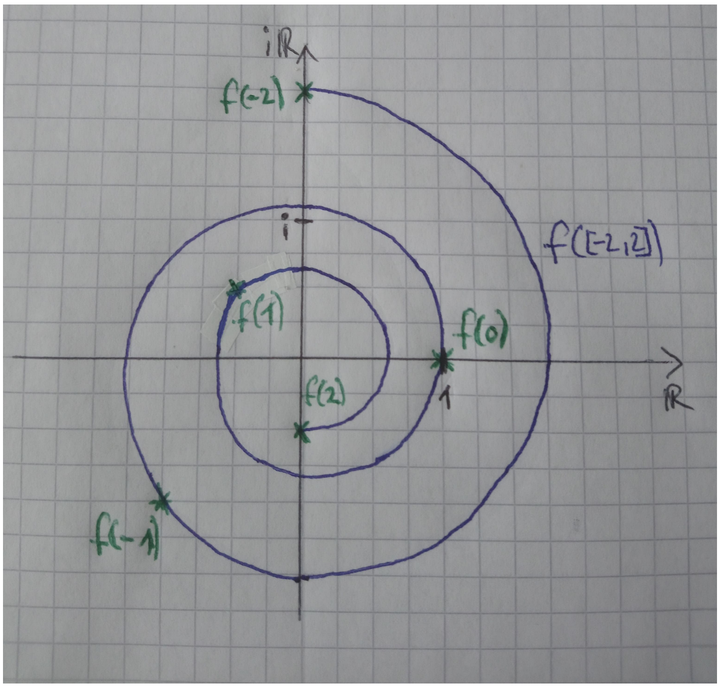
Damit lassen sich die gefragten Punkte in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned}
f(-2) &= 2\left(\cos(\tfrac{5\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5\pi}{2})\right) = 2\,(0+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i},\\
f(-1) &= \sqrt{2}\left(\cos(\tfrac{5\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = -1-\mathrm{i},\\
f(0) &= (\sqrt{2})^{0}\,(\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) = 1,\\
f(1) &= (\sqrt{2})^{-1}\left(\cos(-\tfrac{5\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{5\pi}{4})\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i},\\
f(2) &= (\sqrt{2})^{-2}\left(\cos(-\tfrac{5\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{5\pi}{2})\right) = \tfrac{1}{2}\,(0-\mathrm{i}) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Um die Menge $f\left([-2,2]\right)$ zu zeichnen, bemerken wir, dass für den Betrag nach 1.5.8

$$\lim_{t\to+\infty}|f(t)| = \lim_{t\to+\infty}(\sqrt{2})^{-t} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to-\infty}|f(t)| = \lim_{t\to-\infty}(\sqrt{2})^{-t} = +\infty$$

gilt. Mit der Interpretation von Polarkorrdinaten erkennen wir weiter, dass sich $f(t)$ in der komplexen Ebene im Uhrzeigersinn um den Ursprung bewegt, falls t vergrößert wird. Entsprechend bewegt sich $f(t)$ in der komplexen Ebene gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung, falls t verkleinert wird. Diese Betrachtungen geben Hinweise darauf, dass die Abbildung f eine sich rechtsdrehende Spirale beschreibt.



(b) Wir bezeichnen im Folgenden $z_0 := \sqrt{2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right) = f(-1) = -1-\mathrm{i}$ und erhalten mit den Betragsrechenregeln

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(n+1) - f(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{z_0^{n+1}} - \frac{1}{z_0^{n}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{z_0} - 1\right|\left|\frac{1}{z_0^{n}}\right| = \left|\frac{1}{z_0} - 1\right|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{z_0}\right|^{n}\right).$$

Nun ist $\left|\frac{1}{z_0}-1\right| = \left|\frac{2+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}\right| = \frac{|2+\mathrm{i}|}{|-1-\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. Da $\left|\frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, folgt mit der Formel für die geometrische Reihe 1.14.8 zudem

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{z_0}\right|^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\,.$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(n+1)-f(n)| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}\,.$$

(c) Zur Untersuchung der absoluten Konvergenz betrachten wir die Reihe der Beträge, also $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big|g(k+1)-g(k)\Big|$.

Wie in **(b)** werden wir den Term mit der höchsten Potenz ausklammern und die Betragsrechenregeln benutzen. Dies führt für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$ auf

$$\sum_{k=0}^{\infty}|g(k+1)-g(k)| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{z-z_0}\right|^k\left|\frac{1}{z-z_0}-1\right|\,.$$

Wir erkennen wie in **(b)** die Bauart einer geometrischen Reihe, wobei der Faktor $\left|\frac{1}{z-z_0}-1\right| = \frac{|1-(z-z_0)|}{|z-z_0|}$ genau dann Null ist, wenn $|1-(z-z_0)| = 0$. Dies gilt wiederum genau dann, wenn $1 = z - z_0$, also wenn $z = 1 + z_0 = -\mathrm{i}$.

Damit erhalten wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$ mit $|z-z_0| > 1$ gilt $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| = \frac{1}{|z-z_0|} < 1$, womit die Reihe nach 1.14.8 absolut konvergiert.
- Für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$ mit $|z-z_0| < 1$ gilt $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| = \frac{1}{|z-z_0|} > 1$, womit die Reihe nach 1.14.8 divergiert.
- Für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$ mit $|z-z_0| = 1$ erhalten wir $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{z-z_0}-1\right|$.
  Für $z = -\mathrm{i}$ haben wir eben gezeigt, dass dann alle Reihenglieder identisch Null sind, womit die Reihe absolut konvergiert.
  Ferner haben wir für $z \neq -\mathrm{i}$ gezeigt, dass $\left|\frac{1}{z-z_0}-1\right| \neq 0$. Das bedeutet also für $z \neq -\mathrm{i}$, dass alle Reihenglieder konstant und von Null verschieden sind. Insbesondere bilden Sie dann keine Nullfolge und die Reihe divergiert nach 1.9.1.

Insgesamt ist die Reihe damit genau für $z \in \Big\{z \in \mathbb{C}\,\Big|\, |z-z_0| > 1\Big\} \cup \{-\mathrm{i}\}$ absolut konvergent.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 69. *Differenzierbarkeit*

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{für } a \leqq x \leqq b\,, \\ 0 & \text{für } x \notin [a,b]\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob f an den Stellen a und b differenzierbar ist.

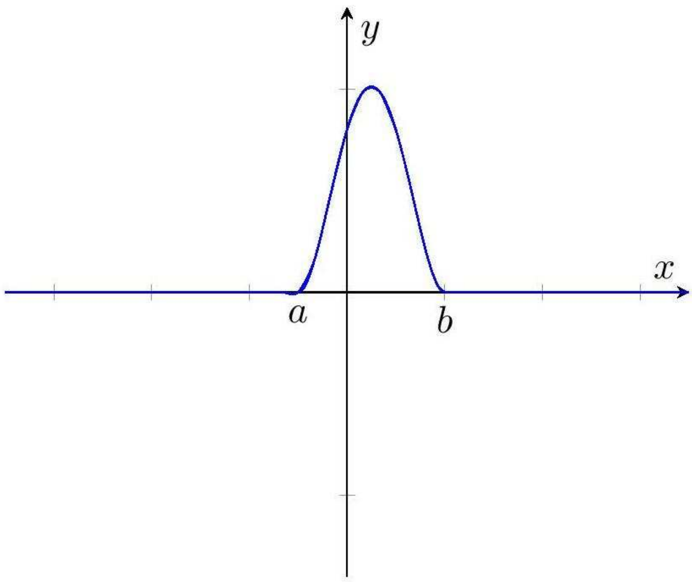
(b) Wir betrachten die Funktion

$$g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \begin{cases} x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie $g'(x)$ und $g''(x)$ für $x \neq 0$.
Beweisen Sie, dass g an der Stelle $x_0 = 0$ zweimal differenzierbar, aber nicht dreimal differenzierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Skizze:



Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle a. Es gilt

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a-0} \frac{0 - 0}{x - a} = 0$$

und

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+0} \frac{(x-a)^2(x-b)^2 - 0}{x - a} = \lim_{x \to a+0} (x-a)(x-b)^2 = 0.$$

Da diese Grenzwerte übereinstimmen, ist f an der Stelle a differenzierbar. Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle b. Es gilt

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \to b-0} \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{x - b} = \lim_{x \to b-0} (x-a)^2(x-b) = 0$$

und
$$\lim_{x\to b+0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b+0} \frac{0-0}{x-b} = 0.$$
Da diese Grenzwerte übereinstimmen, ist f an der Stelle b differenzierbar.

(b) Sei $x \neq 0$.
$$g'(x) = (x^4 \sin(\frac{1}{x}))' = 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) + x^4(\sin(\frac{1}{x})) =$$
$$4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^4 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2} = 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x})$$
und
$$g''(x) = (4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x}))' = 12x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 4x^3(\sin(\frac{1}{x}))' - 2x\cos(\frac{1}{x}) - x^2(\cos(\frac{1}{x}))' =$$
$$12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 4x^3 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2} - 2x\cos(\frac{1}{x}) - x^2 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} =$$
$$12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 6x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}).$$
Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle 0. Es gilt
$$\lim_{x\to 0-0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^4 \sin(\frac{1}{x})}{x-0} = \lim_{x\to 0-0} x^3 \sin(\frac{1}{x}) = 0$$
und
$$\lim_{x\to 0+0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^4 \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0+0} x^3 \sin(\frac{1}{x}) = 0.$$
Da diese Grenzwerte übereinstimmen, ist g an der Stelle 0 differenzierbar. Wir erhalten die Ableitung
$$g'\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$
Die Funktion g' ist stetig. Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle 0. Es gilt
$$\lim_{x\to 0-0} \frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = \lim_{x\to 0-0} \frac{4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x})}{x-0} = \lim_{x\to 0-0} (4x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}) = 0$$
und
$$\lim_{x\to 0+0} \frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = \lim_{x\to 0+0} \frac{4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cos(\frac{1}{x})}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} (4x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}) = 0.$$
Da diese Grenzwerte übereinstimmen, ist g' an der Stelle 0 differenzierbar. Wir erhalten die Ableitung
$$g''\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 6x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$
Die Funktion g'' ist stetig für $x \neq 0$. Wir untersuchen Stetigkeit an der Stelle 0. Es gilt
$$\lim_{x\to 0-0} g''(x) = \lim_{x\to 0-0} 12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 6x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}) = -\lim_{x\to 0-0} \sin(\frac{1}{x})$$

und

$$\lim_{x\to 0+0} g''(x) = \lim_{x\to 0+0} 12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 6x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}) = -\lim_{x\to 0+0} \sin(\frac{1}{x}).$$

Da diese Grenzwerte nicht existieren, ist g'' an der Stelle 0 nicht stetig. Daher ist g'' an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe H 70. *Umkehrfunktion*
Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon\ x\mapsto \sinh(2x) \qquad \text{und} \qquad g\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon\ x\mapsto \frac{x^2}{1+x^2}\,.$$

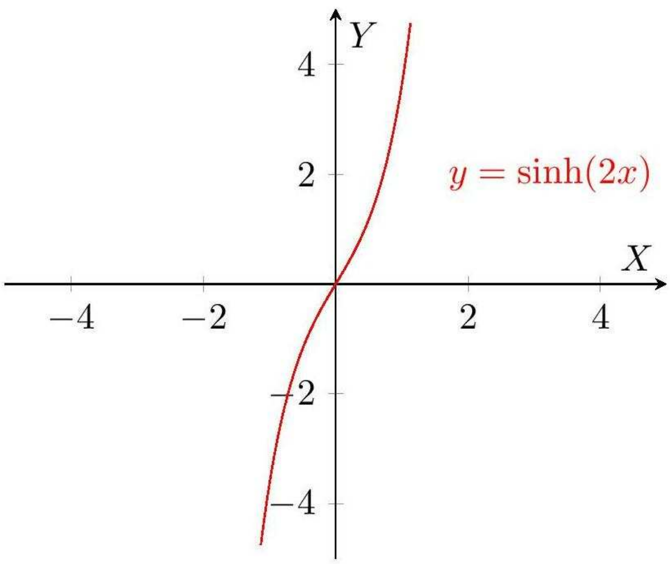
(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g und bestimmen Sie jeweils die Ableitung.

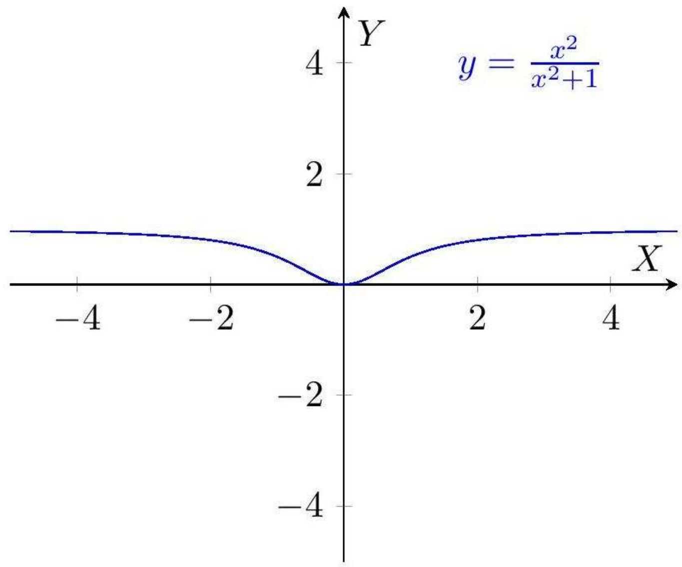
(b) Finden Sie die maximalen Intervalle, in denen f und g differenzierbare Umkehrfunktionen haben. Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$f'(x) = (\sinh(2x))' = 2\cosh(2x);$$
$$g'(x) = \Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)' = \Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)' = -\Big(-\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\Big) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$





(b) Die Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig; $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und

$$f'(x) = 2\cosh(2x) \neq 0$$

auf $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y)|_{y=\sinh(2x)} = \frac{1}{2\cosh(2x)} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \big(\sinh(2x)\big)^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

auf $\mathbb{R}$.

Die Funktion $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig; $g(\mathbb{R}) = [0,1)$. Dann existiert die Umkehrabbildung $g^{-1}\colon [0,1) \to \mathbb{R}$.

$$y = 1 - \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1 - y = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1-y} - 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

Bezeichnen

$$u\colon\ [0,1) \to \mathbb{R}\colon\ y \mapsto \sqrt{\frac{y}{1-y}} \qquad \text{und} \qquad v\colon\ [0,1) \to \mathbb{R}\colon\ y \mapsto -\sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

Dann $g(u(y)) = g(v(y)) = y$ auf $[0,1)$; $u(g(x)) = x$ auf $[0,+\infty)$; $v(g(x)) = x$ auf $(-\infty, 0]$. g ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \neq 0$ für $x \neq 0$. Dann sind u und v differenzienbar auf dem Intervall $(0,1)$ und

$$\frac{d}{dy}u(y) = \frac{(1+(u(y))^2)^2}{2u(y)} = \frac{(1+\frac{y}{1-y})^2}{2\frac{y}{1-y}} = \frac{y}{(1-y)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{d}{dy}v(y) = \frac{(1+(v(y))^2)^2}{2v(y)} = \frac{(1+\frac{y}{1-y})^2}{-2\frac{y}{1-y}} = -\frac{y}{(1-y)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aufgabe H 71. *Mehrfaches Ableiten*

Finden Sie jeweils eine Formel für die angegebene n-te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$.
Beweisen Sie anschließend diese Formel mit vollständiger Induktion.

(a) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \Big(\big(\sin(x)\big)^4 + \big(\cos(x)\big)^4\Big)$ **(b)** $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n x\cos(2x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big(\big(\sin(x)\big)^4 + \big(\cos(x)\big)^4\Big) = \Big(\big(\sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x)\big)^2\Big)^2 - 2\big(\sin(x)\big)^2\big(\cos(x)\big)^2 \\ &= 1 - 2\big(\sin(x)\big)^2\big(\cos(x)\big)^2 = 1 - \frac{\big(\sin(2x)\big)^2}{2} \end{aligned}$$

gilt. Wir berechnen

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big(1 - \frac{\big(\sin(2x)\big)^2}{2}\Big) = -\frac{2\sin(2x)2\cos(2x)}{2} = -\sin(4x).$$

Nach der Berechnung einiger Ableitungen von f', stellen wir die Vermutung auf, dass

$$f^{(n)}(x) = 4^{n-1}\cos(4x + \frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} 4^{n-1}\cos(4x), & n \text{ gerade, } n > 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 4^{n-1}\sin(4x), & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

gilt. Für $n = 1$ ergibt diese Vermutung $f'(x) = (-1)^1 4^0 \sin(4x) = -\sin(4x)$, d.h. unsere Formel ergibt die richtige Aussage. Also stimmt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass die Vermutung für ein $k \in \mathbb{N}$ stimmt und beweisen, dass die Vermutung auch für $k+1$ stimmt.

Wir nehmen, dass

$$f^{(k)} = 4^{k-1}\cos(4x + \frac{k\pi}{2})$$

gilt.

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) = 4^{k-1}(-4)\sin(4x + \frac{k\pi}{2}) \\ &= 4^k(-\sin(4x + \frac{k\pi}{2}) = 4^k\cos(4x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ &= 4^{\big((k+1)-1\big)}\cos\big(4x + \frac{(k+1)\pi}{2}\big). \end{aligned}$$

ist, was mit der Aussage der Vermutung übereinstimmt.

(b) Wir berechnen

$$f'(x) = (x\cos(2x)'(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x).$$

Nach der Berechnung einiger Ableitungen von f' nehmen wir an, dass es 4 Fälle gibt, abhängig vom Rest der Division von n durch 4:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^{n-1}n\sin(2x) + 2^n x\cos(2x), & n = 4m, m > 0 \\ 2^{n-1}n\cos(2x) - 2^n x\sin(2x), & n = 4m+1, \\ -2^{n-1}n\sin(2x) - 2^n x\cos(2x), & n = 4m+2, \\ -2^{n-1}n\cos(2x) + 2^n x\sin(2x), & n = 4m+3. \end{cases}$$

Für den Induktionsanfang prüfen wir, dass laut Vermutung

$$f'(x) = 2^0 \cos(2x) - 2^1 x \sin(2x) = \cos(2x) - 2x \sin(2x)$$

gilt. Damit ist der Induktionsanfang richtig.
Jetzt nehmen wir an, dass die Vermutung für ein $k \in \mathbb{N}$ stimmt. Falls $k = 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)}(x) = 2^{k-1}k(2\cos(2x)) + 2^k \cos(2x) - 2^k x(2\sin(2x)) = 2^k(k+1)\cos(2x) - 2^{k+1}x\sin(2x).$$

Falls $k = 4m + 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)} = 2^{k-1}n(-2\sin(2x)) - 2^k \sin(2x) - 2^k x(2\cos(2x)) = -2^k(k+1)\sin(2x) - 2^{k+1}x\cos(2x).$$

Falls $k = 4m + 2$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)} = -2^{k-1}k(2\cos(2x)) - 2^k \cos(2x) - 2^k x(-2\sin(2x)) = -2^k(k+1)\cos(2x) + 2^{k+1}x\sin(2x).$$

Und falls $k = 4m + 3$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(k+1)} = -2^{k-1}n(-2\sin(2x)) + 2^k \sin(2x) + 2^k x(2\cos(2x)) = 2^k(k+1)\sin(2x) + 2^{k+1}x\cos(2x).$$

In jedem Fall stimmt das Ergebnis mit der Vermutung überein. Also ist die Vermutung durch Induktion bewiesen.

Aufgabe H 72. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*
Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\arctan(x^2-4)}{\sinh(3x-6)}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^5)+x^5}{x^5+\mathrm{e}^{(-x^5)}}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathrm{e}^{(x^2)}-1}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus $\tan(0) = 0$ folgt $\arctan(0) = 0$, und mit 2.2.12 weiter $\sinh(0) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0}) = 0$. Somit ist der Grenzwert $\lim_{x\to 2} \frac{\arctan(x^2-4)}{\sinh(3x-6)}$ von der Form „$\frac{0}{0}$“(genauer: es liegt Situation $\mathbf{N}_c$ mit $c = 2$ aus 2.5.1 vor). Für die Berechnung der Ableitungen werden wir die bekannten Ableitungen aus 2.2.5, sowie die Kettenregel 2.2.3 benutzen. Wir erhalten damit

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arctan(x^2-4)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sinh(3x-6)} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{1+(x^2-4)^2}\cdot(2x)}{\cosh(3x-6)\cdot 3} = \frac{4}{\cosh(0)\cdot 3} = \frac{4}{3},$$

wobei wir im letzten Schritt 2.2.12 benutzen zur Auswertung $\cosh(0) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0}) = 1$.
Aus der Konvergenz des obigen Grenzwertes für die Ableitungen, folgt nach der Regel von l'Hospital 2.5.1 auch

$$\lim_{x\to 2} \frac{\arctan(x^2-4)}{\sinh(3x-6)} = \frac{4}{3}.$$

(b) Bei diesem Ausdruck lässt sich die Regel von l'Hospital 2.5.1 nicht gewinnbringend anwenden. Stattdessen erweitert man den Bruch mit $\frac{1}{x^5}$. Dies liefert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^5)+x^5}{x^5+\mathrm{e}^{(-x^5)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin(x^5)}{x^5}+1}{1+\frac{\mathrm{e}^{(-x^5)}}{x^5}} = 1,$$

denn $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-x^5)}}{x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5\mathrm{e}^{(x^5)}} = 0$, und $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^5)}{x^5} = 0$. Der letzte Grenzwert kann analog zu 1.12.8 hergeleitet werden: Für $x > 0$ folgt aus der „Sandwich-Abschätzung“

$$0 \leqq \left|\frac{\sin(x^5)}{x^5}\right| \leqq \frac{1}{x^5}\,,$$

in welcher beide Seiten für $x \to +\infty$ gegen 0 konvergieren, dass auch $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^5)}{x^5} = 0$.

Bemerkung:
Die Regel von l'Hospital kann nicht angewendet werden, da der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sin(x^5)+x^5\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(x^5+\mathrm{e}^{(-x^5)}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\cos(x^5)+1)\cdot 5x^4}{\left(1-\mathrm{e}^{(-x^5)}\right)\cdot 5x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^5)+1}{1-\mathrm{e}^{(-x^5)}}$$

aufgrund des Ausdrucks $\cos(x^5)$ im Zähler nicht existiert.

(c) Da der Ausdruck von der Form „ $\infty - \infty$ “, formen wir diesen in einen Bruch um. Dies liefert den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)}-1-x^2}{x^2\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1\right)}$ von der Form „ $\frac{0}{0}$ “(genauer: es liegt Situation $\mathbf{N}_c$ mit $c = 0$ aus 2.5.1 vor). Für die Berechnung der Ableitungen werden wir die Produktregel aus 2.2.1 und die Kettenregel 2.2.3 benutzen. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1-x^2\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(x^2\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1\right)\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)}\cdot 2x - 2x}{2x\cdot\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1\right) + x^2\cdot\mathrm{e}^{(x^2)}\cdot 2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1\right)\cdot 2x}{\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1+x^2\mathrm{e}^{(x^2)}\right)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)}-1}{\mathrm{e}^{(x^2)}-1+x^2\mathrm{e}^{(x^2)}}\,,
\end{aligned}$$

wobei auch der letzte Grenzwert von der Form „ $\frac{0}{0}$ “ist. Wir wenden das Verfahren noch einmal an:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^2\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1-x^2\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^2\left(x^2\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1\right)\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1+x^2\mathrm{e}^{(x^2)}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)}\cdot 2x}{\mathrm{e}^{(x^2)}\cdot 2x + 2x\cdot\mathrm{e}^{(x^2)} + x^2\cdot\mathrm{e}^{(x^2)}\cdot 2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)}\cdot 2x}{\left(2\mathrm{e}^{(x^2)}+x^2\mathrm{e}^{(x^2)}\right)\cdot 2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)}}{2\mathrm{e}^{(x^2)}+x^2\mathrm{e}^{(x^2)}} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt mit der zweifachen Anwendung der Regel von l'Hospital 2.5.1 damit

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathrm{e}^{(x^2)}-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x^2)}-1-x^2}{x^2\left(\mathrm{e}^{(x^2)}-1\right)} = \frac{1}{2}\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 73. *Monotonie via Ableitung*

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, auf denen die gegebenen Funktionen monoton sind.

(a) $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto x^2 - \ln(x^2)$;

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \frac{x^2}{2^x}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion f ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, +\infty)$ stetig und differenzierbar. Wir haben

$$f'(x) = 2x - \frac{d}{dx}(x^2)\ln'(x^2) = 2x - \frac{2x}{x^2} = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

Wir sehen, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$ und für alle $x \in (0,1)$; $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 0)$ und für alle $x \in (1, +\infty)$. Nach 2.4.8 folgt dann, dass die Funktion $f(x)$ auf $(-\infty, -1]$ streng monoton fallend ist; auf $[-1, 0)$ streng monoton steigend ist; auf $(0, 1]$ streng monoton fallend ist; auf $[1, +\infty)$ streng monoton steigend ist.

(b) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Wir haben

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^2)2^x - \frac{d}{dx}(2^x)x^2}{(2^x)^2} = \frac{2x2^x - 2^x\ln(2)x^2}{(2^x)^2} = \frac{x(2-\ln(2)x)}{2^x}.$$

Wir sehen, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$ und für alle $x \in (\frac{2}{\ln(2)}, +\infty)$; $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0, \frac{2}{\ln(2)})$. Nach 2.4.8 folgt dann, dass die Funktion $f(x)$ auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend ist; auf $[0, \frac{2}{\ln(2)}]$ streng monoton steigend ist; auf $[\frac{2}{\ln(2)}, +\infty)$ streng monoton fallend ist.

Aufgabe H 74. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei

$$f\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{49}{x^2+49} \quad \text{und} \quad g\colon N \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\sin(\ln(x)) \quad \text{mit} \quad M, N \subseteqq \mathbb{R}.$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion von f und g durch, wobei Sie mindestens die folgenden Punkte bearbeiten sollen:
maximaler Definitionsbereich, maximaler Wertebereich, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Nullstellen, lokale Extrema, Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, Skizze.

Lösungshinweise hierzu: Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ definiert. Der maximale Wertebereich ist $(0, 1)$: $x^2 + 49 \geqq 49$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+49) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+49) = +\infty.$$

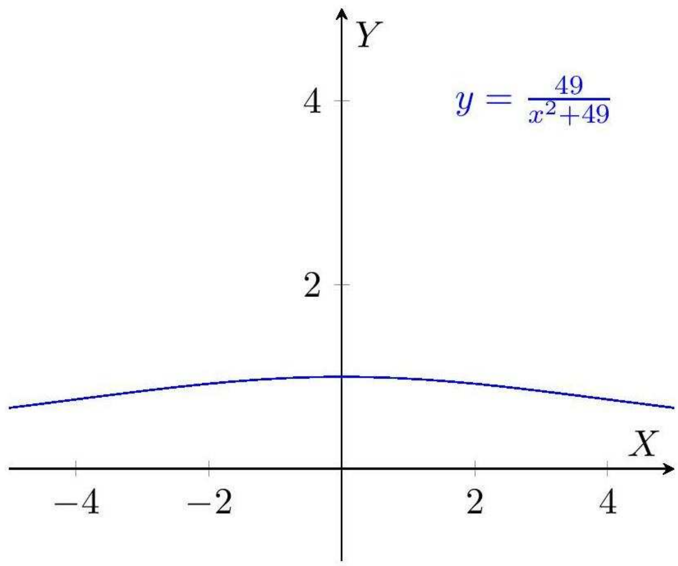
Nach der Quotientregel ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar (und stetig). Wir haben

$$f'(x) = -\frac{49\frac{d}{dx}(x^2+49)}{(x^2+49)^2} = -\frac{98x}{(x^2+49)^2}.$$

f hat keine Nullstelle: $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 0$ nur für $x = 0$, und dies ist das lokale (und das globale) Maximum. Es gibt keine lokalen Minima.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Die Skizze:



Die Funktion g ist nur auf $(0, +\infty)$ definiert. Der maximaler Wertebereich ist ganz $\mathbb{R}$. Nach der Produktregel und der Kettenregel ist g auf $(0, +\infty)$ differenzierbar (und stetig). Wir haben

$$g'(x) = \sin(\ln(x)) + x\frac{1}{x}\cos(\ln(x)) = \sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)).$$

Die Nullstellen:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\pi k}, k \in \mathbb{Z}.$$

Die lokalen Extrema:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(\ln(x)) = -\cos(\ln(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+\pi k},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Aus $0 \leqq |x\sin(\ln(x))| = |x||\sin(\ln(x))| \leqq |x|$ folgt $\lim_{x\to 0+0} g(x) = 0$. Zudem gilt weiter

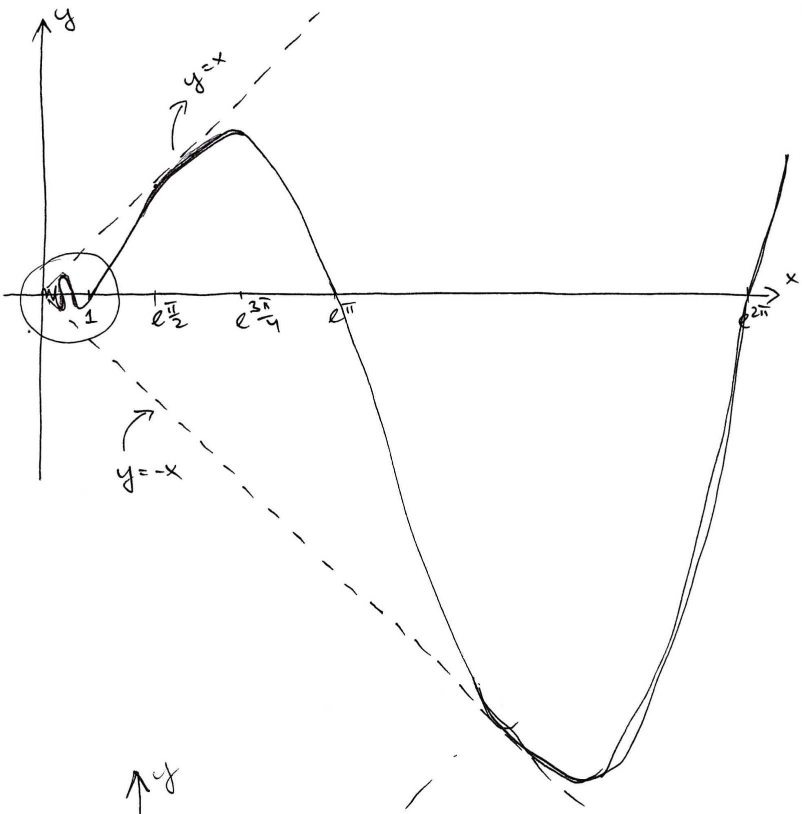
$$\lim_{n\to\infty} g(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n} = +\infty; \lim_{n\to\infty} g(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}) = \lim_{n\to\infty} -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} = -\infty.$$

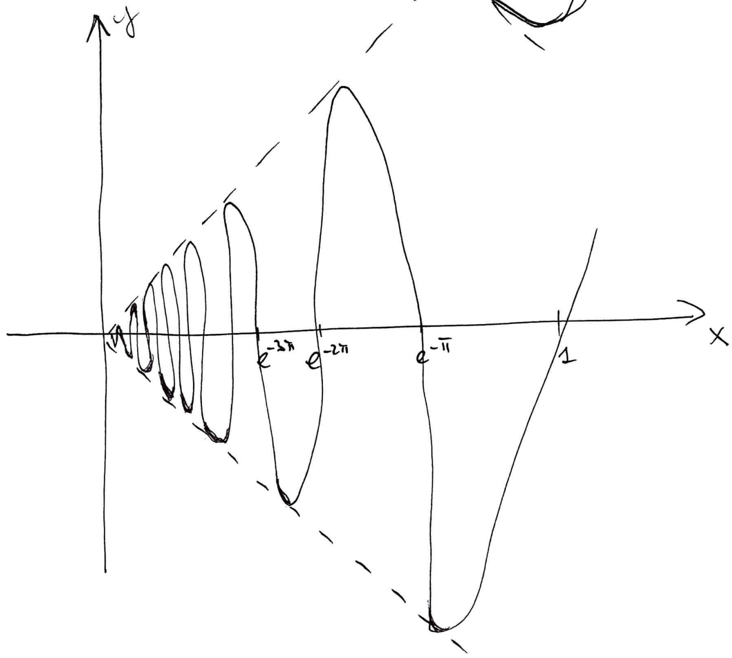
Die Funktion ist also für $x \to +\infty$ unbeschränkt.

Ein erster Eindruck des Graphen von g ist hier: https://www.google.com/search?q=x*sin(ln(x)) (durch Verwendung der Plus- und Minus-Symbole zum Vergrößern und Verkleinern, gewinnt man einen Eindruck für das qualitative Verhalten des Graphen). Die Kurve ist selbstähnlich. Dies entspricht der Tatsache, dass

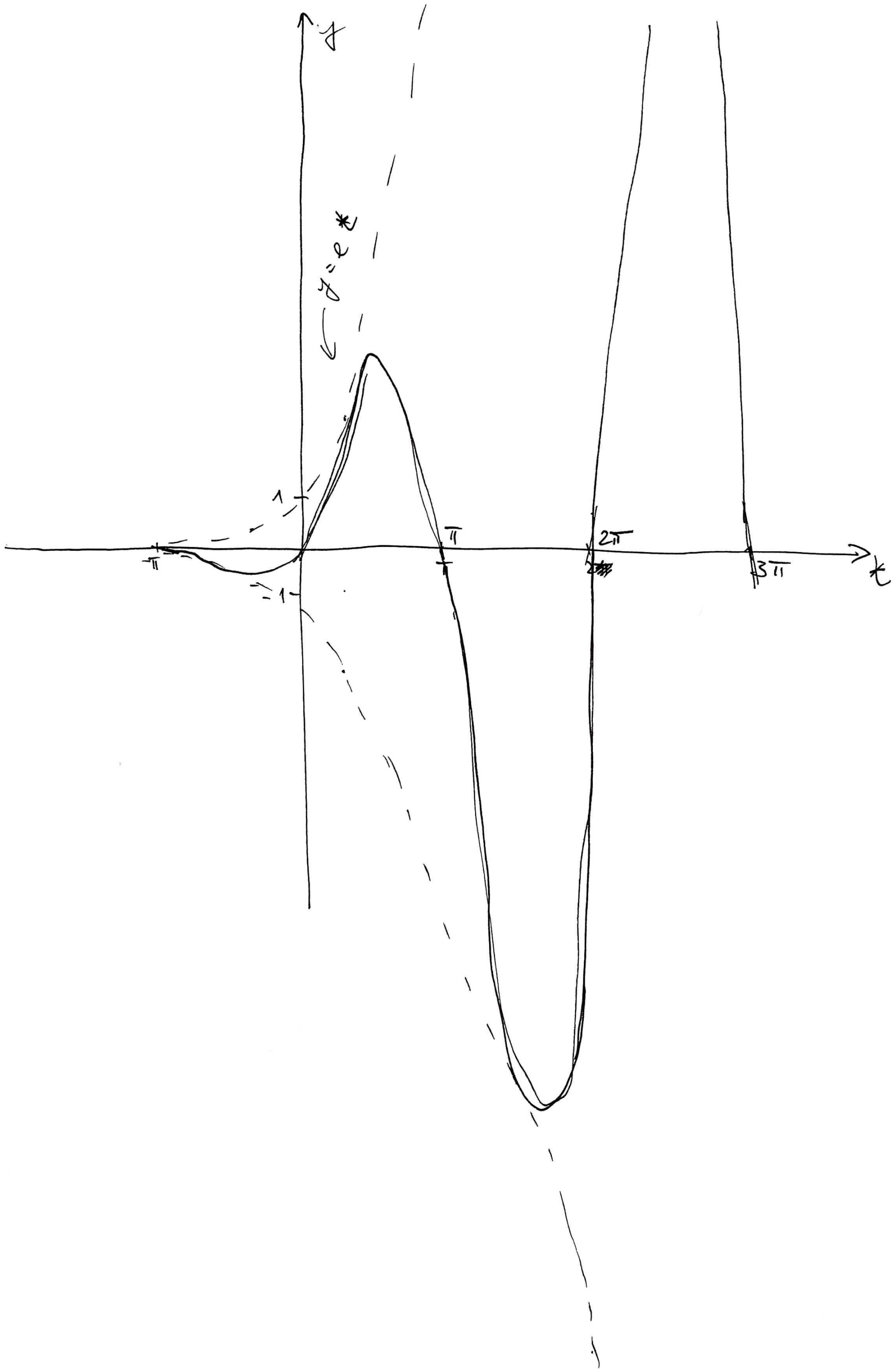
$$g(\mathrm{e}^{2\pi}x) = \mathrm{e}^{2\pi}x\sin(\ln(\mathrm{e}^{2\pi}x)) = \mathrm{e}^{2\pi}x\sin(2\pi + \ln(x)) = \mathrm{e}^{2\pi}x\sin(\ln(x)) = \mathrm{e}^{2\pi}g(x).$$

Mit anderen Worten, die Skalierung von x und $y = g(x)$ im Graph um den Faktor $\mathrm{e}^{2\pi}$ ändert die Kurve nicht.
Eine Skizze (in der zweiten Skizze haben wir einen kleinen Ausschnitt um den Ursprung vergrößert):





Sei $t = \ln(x)$, dann $x(t) := x = \mathrm{e}^t$. Betrachten wir $y(t) := g(x(t)) = \mathrm{e}^t \sin(t)$. Hier ist eine Skizze des Graphen $(t, y(t))$:



Aufgabe H 75. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*
Wir betrachten die Funktion

$$h\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto x\sin(x^2)\,.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(h, x, \sqrt{\pi})$.

(b) Finden Sie eine reelle Zahl a so, dass

$$\left|h\left(x\right) - T_2\left(h, x, \sqrt{\pi}\right)\right| \leqq a\left|x - \sqrt{\pi}\right|^3$$

für alle $x \in [0, 2]$ gilt.

(c) Finden Sie Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x\sin(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= x\sin(x^2)\,,\\ h'(x) &= \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)\,,\\ h''(x) &= 6x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2)\,. \end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom zweiter Stufe im Entwicklungspunkt $x_0 = \sqrt{\pi}$ gerade

$$\begin{aligned} T_2\left(h, x, \sqrt{\pi}\right) &= h(\sqrt{\pi}) + h'(\sqrt{\pi})(x - \sqrt{\pi}) + \frac{1}{2}h''(\sqrt{\pi})(x - \sqrt{\pi})^2\\ &= -2\pi\left(x - \sqrt{\pi}\right) - 3\sqrt{\pi}\left(x - \sqrt{\pi}\right)^2\,. \end{aligned}$$

(b) Nach dem Satz von Taylor 2.6.1 ist $h(x) = T_2\left(h, x, \sqrt{\pi}\right) + R_2\left(h, x, \sqrt{\pi}\right)$, wobei

$$\begin{aligned} R_2\left(h, x, \sqrt{\pi}\right) &= \frac{1}{6}h'''(\xi)(x - \sqrt{\pi})^3\\ &= \frac{1}{6}\left(6\cos(\xi^2) - 24\xi^2\sin(\xi^2) - 8\xi^4\cos(\xi^2)\right)(x - \sqrt{\pi})^3 \end{aligned}$$

für ein $\xi = \xi_{x,\sqrt{\pi}}$ zwischen x und $\sqrt{\pi}$ ist. Wegen $0 < \pi < 4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\pi} < 2$ ist insbesondere $\xi \in [0, 2]$ und es gilt

$$\begin{aligned} \left|h\left(x\right) - T_2\left(h, x, \sqrt{\pi}\right)\right| &\leqq \frac{1}{6}\left|6\cos(\xi^2) - 24\xi^2\sin(\xi^2) - 8\xi^4\cos(\xi^2)\right|\left|x - \sqrt{\pi}\right|^3\\ &\leqq \frac{1}{6}\Big(6\underbrace{|\cos(\xi^2)|}_{\leqq 1} + 24\underbrace{|\xi|^2}_{\leqq 2^2}\underbrace{|\sin(\xi^2)|}_{\leqq 1} + 8\underbrace{|\xi|^4}_{\leqq 2^4}\underbrace{|\cos(\xi^2)|}_{\leqq 1}\Big)\left|x - \sqrt{\pi}\right|^3\\ &= \frac{1}{6}\Big(6 + 24\cdot 4 + 8\cdot 16\Big)\left|x - \sqrt{\pi}\right|^3\\ &= \frac{115}{3}\left|x - \sqrt{\pi}\right|^3\,. \end{aligned}$$

Somit kann $a = \frac{115}{3} < 39$ gewählt werden.

(c) Einsetzen von x^2 in die Reihe für den Sinus liefert

$$x\sin(x^2) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{4j+3}}{(2j+1)!}\,.$$

Das heißt, wir können die Koeffizienten nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen 2.6.9 wählen gemäß

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\left(\frac{k-3}{4}\right)} \frac{1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!} & \text{falls } \ k = 4j+3 \ \text{ für } \ j \in \mathbb{N}_0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe H 76. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_3(f, x, x_0)$ für

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x-x^2}, \quad x_0 = 0;$

(b) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(\cos(x)), \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$f'(x) = (2x - x^2)'\mathrm{e}^{2x-x^2} = (2-2x)\mathrm{e}^{2x-x^2}.$$

$$f''(x) = (2-2x)'\mathrm{e}^{2x-x^2} + (2-2x)f'(x) = -2\mathrm{e}^{2x-x^2} + (2-2x)^2\mathrm{e}^{2x-x^2} = (4x^2-8x+2)\mathrm{e}^{2x-x^2};$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= (4x^2-8x+2)'\mathrm{e}^{2x-x^2} + (4x^2-8x+2)f'(x) \\ &= (8x-8)\mathrm{e}^{2x-x^2} + (4x^2-8x+2)(2-2x)\mathrm{e}^{2x-x^2} \\ &= (8x-8+8x^2-16x+4-8x^3+16x^2-4x)\mathrm{e}^{2x-x^2} \\ &= (-8x^3+24x^2-12x-4)\mathrm{e}^{2x-x^2}. \end{aligned}$$

Wir haben $x_0 = 0$. Dann

$$f(x_0) = \mathrm{e}^{2x_0-x_0^2} = 1;$$

$$f'(x_0) = (2-2x_0)\mathrm{e}^{2x_0-x_0^2} = 2;$$

$$f''(x_0) = (4x_0^2 - 8x_0 + 2)\mathrm{e}^{2x_0-x_0^2} = 2;$$

$$f^{(3)}(x_0) = (-8x_0^3 + 24x_0^2 - 12x_0 - 4)\mathrm{e}^{2x_0-x_0^2} = -4.$$

$$T_3(f,x,x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(x_0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}x^3 = 1 + 2x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^3$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3.$$

(b)

$$f'(x) = \cos'(x)\ln'(\cos(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x);$$

$$f''(x) = -\frac{(\cos(x))^2 - (-(\sin(x))^2)}{(\cos(x))^2} = -\frac{1}{(\cos(x))^2};$$

$$f^{(3)} = -\frac{-\frac{d}{dx}((\cos(x))^2)}{(\cos(x))^4} = -\frac{2\sin(x)\cos(x)}{(\cos(x))^4} = -\frac{2\sin(x)}{(\cos(x))^3}.$$

Wir haben $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Dann

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \ln(\cos(\frac{\pi}{3})) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2);\\
f'(x_0) &= -\tan(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3};\\
f''(x_0) &= -\frac{1}{(\cos(\frac{\pi}{3}))^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4;\\
f^{(3)}(x_0) &= -\frac{2\sin(\frac{\pi}{3})}{(\cos(\frac{\pi}{3}))^3} = -\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{8}} = -8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3(f,x,x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\\
&= f(\frac{\pi}{3}) + f'(\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3}) + \frac{f''(\frac{\pi}{3})}{2}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{f^{(3)}(\frac{\pi}{3})}{6}(x-\frac{\pi}{3})^3\\
&= -\ln(2) - \sqrt{3}(x-\frac{\pi}{3}) - 2(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3.
\end{aligned}$$

Vorsicht: Dies ist die endgültige Antwort, man sollte die Klammern nicht durch Ausmultiplizieren auflösen!

Das Taylorpolynom ist anzusehen als ein Polynom in der Variablen $x - x_0$ (die die Abweichung vom Entwicklungspunkt x_0 angibt).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 77. *Partielle Integration*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sin(2x) \,\mathrm{d}\, x$ **(b)** $\displaystyle\int x \arctan(x) \,\mathrm{d}\, x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{(\cos(x))^2} \,\mathrm{d}\, x$ **(d)** $\displaystyle\int \cos(\ln(x)) \,\mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sin(2x) \,\mathrm{d}\, x &= \left[-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2x\big(-\frac{1}{2}\cos(2x)\big) \,\mathrm{d}\, x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos(2x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\frac{1}{2}x\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\sin(2x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{36}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 0 - 0 - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{\pi^2}{144} + \frac{\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int x\arctan(x) \,\mathrm{d}\, x &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \frac{1}{2}\int \big(1 - \frac{1}{1+x^2}\big) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan(x)\right].
\end{aligned}$$

(c)

$$\int \frac{x}{(\cos(x))^2} \,\mathrm{d}\, x = [x\tan(x)] - \int \tan(x) dx.$$

Nach P79 (c) haben wir:

$$\begin{aligned}
[x\tan(x)] - \int \tan(x) dx &= [x\tan(x)] - [-\ln|\cos(x)|] \\
&= [x\tan(x) + \ln|\cos(x)|].
\end{aligned}$$

(d)

$$\int \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x = [x\cos(\ln(x))] + \int \frac{x\sin(\ln(x))}{x}dx$$

$$= [x\cos(\ln(x))] + \int \sin(\ln(x))dx = [x\cos(\ln(x))] + [x\sin(\ln(x))] - \int \frac{x\cos(\ln(x))}{x}dx$$

$$= \left[x\big(\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))\big)\right] - \int \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x.$$

Dann haben wir

$$2\int \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x = \left[x\big(\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))\big)\right] \Leftrightarrow$$

$$\int \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x}{2}\big(\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))\big)\right].$$

Aufgabe H 78. *Universalsubstitution für trigonometrische Integrale*

(a) Rechnen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*“ $t\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$t'(x) = \frac{1+\big(t(x)\big)^2}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t(x)}{1+\big(t(x)\big)^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-\big(t(x)\big)^2}{1+\big(t(x)\big)^2}.$$

(b) Verwenden Sie die Resultate der Universalsubstitution aus Teilaufgabe (a), um folgende Integrale zu berechnen:

$$\int \frac{1}{3-2\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+1}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir verwenden die gegebene Substitution $t : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$.
Mit der Quotientenregel gilt

$$t'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}\right) = \frac{1}{2}(1+(t(x))^2).$$

Des Weiteren gilt

$$\frac{2t(x)}{1+(t(x))^2} = \frac{2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})} = \sin(x),$$

wobei für die letzte Identität $2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = \sin(x)$ verwendet wurde.
Mit $\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \cos(x)$ folgt

$$\frac{1-(t(x))^2}{1+(t(x))^2} = \frac{1-\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x).$$

(b) Einsetzen der Resultate aus Teilaugabe (a) ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3-2\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{3-2\frac{2t(x)}{1+(t(x))^2}}\frac{2}{1+(t(x))^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int \frac{2}{3(1+(t(x))^2)-4t(x)}\,\mathrm{d}\,t = 2\int \frac{1}{3(t(x))^2-4t(x)+3t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 2\int \frac{1}{3(t(x)-\frac{2}{3})^2+\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}\,t = 6\int \frac{1}{9(t(x)-\frac{2}{3})^2+5}\,\mathrm{d}\,t =\end{aligned}$$

(Substitution $u(x)=\frac{3}{\sqrt{5}}(t(x)-\frac{2}{3}),\ du=\frac{3}{\sqrt{5}}dt$)

$$\begin{aligned}&= 6\int \frac{1}{3\sqrt{5}((u(x))^2+1)}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \left[\frac{6}{3\sqrt{5}}\arctan(u)\right]\\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{3}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

Für das zweite Integral gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+1}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{\frac{2t(x)}{1+\left(t(x)\right)^2}+\frac{1-(t(x))^2}{1+(t(x))^2}+1}\cdot\frac{2}{1+(t(x))^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int \frac{2}{2t(x)+1-(t(x))^2+1+(t(x))^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int \frac{1}{t(x)+1}\,\mathrm{d}\,t\\ &= [\ln|t(x)+1|]\\ &= \left[\ln|\tan(\frac{x}{2})+1|\right].\end{aligned}$$

Für das dritte Integral gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{1}{\sin(x)}\tan(x)\right]-\int\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)\cdot\tan(x)\right)dx\\ &= \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]-\int\left(\frac{-\cos(x)}{(\sin(x))^2}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]+\int\frac{1}{\sin(x)}dx &= \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]+\int\left(\frac{1+\left(t(x)\right)^2}{2t(x)}\cdot\frac{2}{1+(t(x))^2}\right)\mathrm{d}\,t\\ &= \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]+\int\frac{1}{t(x)}dt = \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]+[\ln|t(x)|] =\\ &= \left[\frac{1}{\cos(x)}+\ln|\tan(\frac{x}{2})|\right].\end{aligned}$$

Aufgabe H 79. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

(a) Bestimmen Sie den Quotienten $(x^5+x^4+x^3-x^2-x-1):(x^2+x+1)$.

(b) Berechnen Sie das folgende Integral: $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{x^5+x^4+x^3-x^2-x-1}\,\mathrm{d}\,x.$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\frac{x^5+x^4+x^3-x^2-x-1}{x^2+x+1} = x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

(b)

$$\int \frac{x^2+3x-2}{x^5+x^4+x^3-x^2-x-1}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{x^2+3x-2}{(x^2+x+1)(x-1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}\,x =$$
$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx.$$

Nach 3.4.5, gibt es $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ so dass

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}.$$

Wir haben

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+x+1) + (Dx+E)(x-1) \Leftrightarrow$$
$$(A+B)x^4+(2A+C)x^3+(3A+D)x^2+(2A-B-D+E)x+(A-C-E) = x^2+3x-2.$$

Wir lösen das System von 5 linearen Gleichungen und bestimmen

$$A = \frac{2}{9},\ B = -\frac{2}{9},\ C = -\frac{4}{9},\ D = \frac{1}{3},\ E = \frac{8}{3}.$$

Dann haben wir

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx = \int (\frac{2}{9(x-1)} - \frac{2x+4}{9(x^2+x+1)} + \frac{x+8}{3(x^2+x+1)^2})dx =$$
$$\left[\frac{2}{9}\ln|x-1|\right] - \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \int \frac{x+8}{3(x^2+x+1)^2}dx =$$
$$\left[\frac{2}{9}\ln|x-1|\right] - \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx +$$
$$\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx + \frac{1}{6}\int \frac{15}{(x^2+x+1)^2}dx =$$
$$\left[\frac{2}{9}\ln|x-1|\right] - \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx +$$
$$\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx =$$

(nach 3.4.8 und 3.4.9)

$$= \left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{6(x^2+x+1)} +\right.$$
$$\left.\frac{5}{2}\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right)\right] =$$
$$\left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) -\right.$$
$$\left.\frac{1}{6(x^2+x+1)} + \frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{5(2x+1)}{6(x^2+x+1)}\right] =$$
$$\left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}\right].$$

Aufgabe H 80. *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int (5-2x)\mathrm{e}^{x^2-5x+7}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln(x))^4}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \sin(2x)\left((\cos(2x))^5+(\cos(2x))^4-17\cos(2x)\right)\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Substitution $u = x^2-5x+7,\ du = (2x-5)dx.$

$$\int (5-2x)\mathrm{e}^{x^2-5x+7}\,\mathrm{d}\,x = -\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}\,u = [-\mathrm{e}^u] = \left[-\mathrm{e}^{x^2-5x+7}\right].$$

(b) Substitution $v = \ln(x),\ dv = \frac{1}{x}dx.$

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln(x))^4}{x}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^2 v^4\,\mathrm{d}\,v = \left[\frac{1}{5}v^5\right]_1^2 = \frac{1}{5}(32-1) = \frac{31}{5}.$$

(c) Substitution $u = \sqrt{x},\ dx = 2u\ du.$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{u}{2(u^2+1)}2u\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}\,u =$$

$$\int (1-\frac{1}{u^2+1})\,\mathrm{d}\,u = [u-\arctan(u)] = \left[\sqrt{x}-\arctan(\sqrt{x})\right].$$

(d) Substitution $v = \cos(2x),\ dv = -2\sin(2x)dx.$

$$\int \sin(2x)\left((\cos(2x))^5+(\cos(2x))^4-17\cos(2x)\right)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\int (v^5+v^4-17v)\,\mathrm{d}\,v =$$

$$\left[-\frac{1}{2}(\frac{1}{6}v^6+\frac{1}{5}v^5-\frac{17}{2}v^2)\right] = \left[-\frac{1}{12}(\cos(2x))^6-\frac{1}{10}(\cos(2x))^5+\frac{17}{4}(\cos(2x))^2)\right].$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 81. *Obersumme und Untersumme*

Wir betrachten die Funktion $f\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \dfrac{27x^4+3x^2+3}{9x^2+1}$.

(a) Berechnen Sie nach Polynomdivision $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(b) Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung der Ableitung f' und finden Sie das Maximum und Minimum von f auf $[-1,1]$. Skizzieren Sie anschließend den Graphen von f.

(c) Sei $P = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ eine Partition des Intervalls $[-1,1]$.
Stellen Sie die Unter- und Obersumme $\underline{S}(f,P)$ bzw. $\overline{S}(f,P)$ graphisch als Flächeninhalt dar.

(d) Berechnen Sie $\underline{S}(f,P)$ und $\overline{S}(f,P)$ für P aus **(c)**.
Schließen Sie daraus auf eine untere und obere Schranke für den Wert von $\arctan(3)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Polynomdivision ergibt $(27x^4+3x^2+3) : (9x^2+1) = 3x^2 + \frac{3}{9x^2+1}$ womit schließlich

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} 3x^2 + \frac{3}{9x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{1} \frac{3}{(3x)^2+1}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Für das zweite Integral verwenden wir die Substitution $u = 3x$, wonach $\mathrm{d}\,u = 3\,\mathrm{d}\,x$, und somit

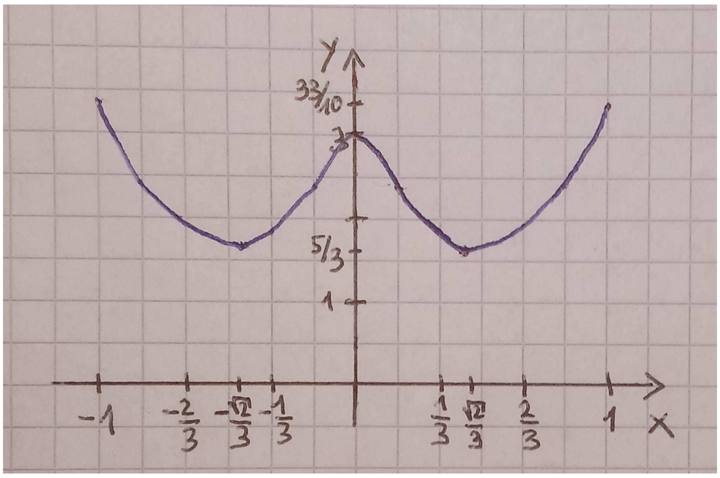
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_{-1}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}\,x + \int_{-3}^{3} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}\,u = \left[x^3\right]_{-1}^{1} + \left[\arctan(u)\right]_{-3}^{3} \\ &= 2 + \arctan(3) - \arctan(-3) = 2 + 2\arctan(3)\,,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt zur kompakten Schreibweise verwendet haben, dass $\arctan$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist mit $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

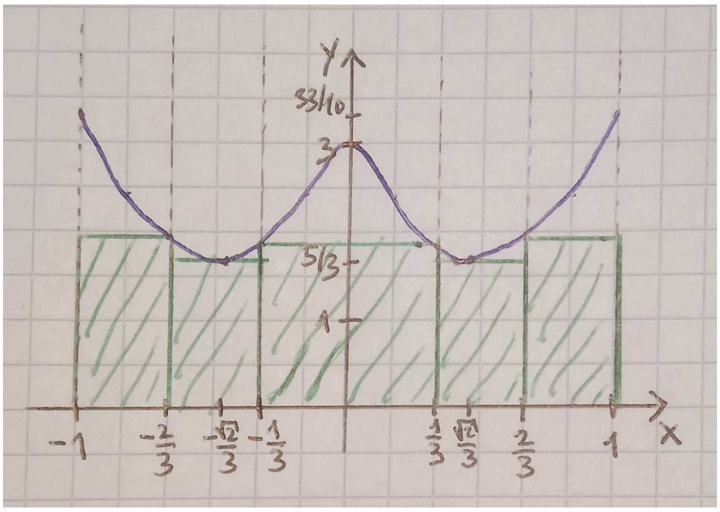
(b) Wir berechnen die Ableitung, indem wir f in der Darstellung $f(x) = 3x^2 + \frac{3}{9x^2+1}$ aus Teil **(a)** ableiten:

$$f'(x) = 6x - \frac{3\cdot 18x}{(9x^2+1)^2} = \frac{6x(81x^4+18x^2-8)}{(9x^2+1)^2} = \frac{6x(9x^2-2)(9x^2+4)}{(9x^2+1)^2}.$$

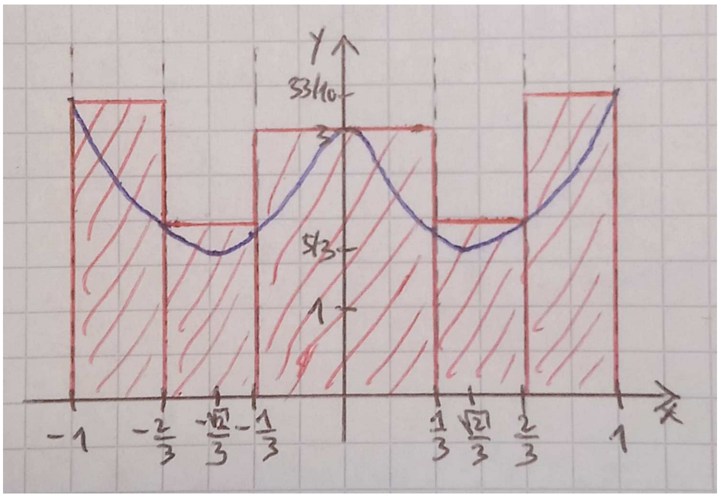
Nun ist $(9x^2+4) > 0$ und $(9x^2+1)^2 > 0$ für alle $x \in [-1,1]$. Die Nullstellen der Ableitung sind gerade 0 und $\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$. Zudem ist $(9x^2-2) < 0$ für $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ und $(9x^2-2) > 0$ für $x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{3}, 1]$. Unter Berücksichtigung des Vorfaktors $(6x)$ im Zähler, erhalten wir die folgende Vorzeichenverteilung von f':
Es ist $f'(x) < 0$ für $x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{3}) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{3})$, $f'(x) > 0$ für $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{3}, 0) \cup (\frac{\sqrt{2}}{3}, 1]$, und $f'(x) = 0$ für $x \in \{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\}$.
An den Nullstellen von f' liegt jeweils ein Vorzeichenwechsel vor und es gilt an den Randpunkten des Intervalls $[-1,1]$ ferner $f(\pm 1) = \frac{33}{10} > 3 = f(0)$. Insgesamt folgt daraus zusammen mit der Vorzeichenverteilung von f', dass f auf $[-1,1]$ globale Maxima bei $x = \pm 1$ mit $f(\pm 1) = \frac{33}{10}$ annimmt, und globale Minima bei $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ mit $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}) = \frac{5}{3}$. Zudem ist bei $x = 0$ ein lokales Maximum mit $f(0) = 3$.
Hier die Skizze:



(c) Die Untersumme $\underline{S}(f,P)$ ist graphisch dargestellt als Flächeninhalt der grünen Rechtecke.



Die Obersumme $\overline{S}(f,P)$ ist graphisch dargestellt als Flächeninhalt der roten Rechtecke.



(d) Aus den Monotonieüberlegungen in **(b)** erhalten wir für die Untersumme

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= f\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}+1\right)+f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\\
&\quad+f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{29}{15}+\frac{5}{3}+\frac{11}{6}\right)\\
&= \frac{163}{45}
\end{aligned}$$

und, wegen $f\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\frac{29}{15}=\frac{58}{30}>\frac{55}{30}=\frac{11}{6}=f\left(\pm\frac{1}{3}\right)$, für die Obersumme

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) &= f(-1)\left(-\frac{2}{3}+1\right)+f\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+f(0)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\\
&\quad+f\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+f(1)\left(1-\frac{2}{3}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{33}{10}+\frac{29}{15}+3\right)\\
&= \frac{247}{45}\,.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von **(a)** folgt damit

$$\frac{163}{45}=\underline{S}(f,Q)\leqq\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\,x=2+2\arctan(3)\leqq\overline{S}(f,Q)=\frac{247}{45}\,,$$

woraus wir die folgende untere und obere Schranke für $\arctan(3)$ erhalten:

$$\frac{73}{90}\leqq\arctan(3)\leqq\frac{157}{90}\,.$$

Aufgabe H 82. *Mittelwertsatz bei uneigentlichen Integralen*
Gegeben seien die Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\sin(x)$ und $g(x):=\mathrm{e}^{-x}$.

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

absolut konvergent ist und berechnen Sie seinen Wert.

(b) Bestimmen Sie alle $\xi\in[0,+\infty)$, für die gilt

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x=f(\xi)\int_{0}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $|f(x)| = |\sin(x)| \leqq 1$ gilt $|f(x)g(x)| \leqq |g(x)| = \mathrm{e}^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Mit dem Majoranten-Kriterium folgt nun aus

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{\beta} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-\beta} = 1$$

die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x) \,\mathrm{d}\,x.$$

Um dieses Integral explizit zu berechnen, beginnen wir mit zweifacher partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x &= -\left[\cos(x)\mathrm{e}^{-x}\right] - \int \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\left[(\cos(x)+\sin(x))\mathrm{e}^{-x}\right] - \int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

Durch Umformen ergibt sich hieraus

$$\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\left[(\cos(x)+\sin(x))\mathrm{e}^{-x}\right].$$

Damit bekommen wir nun

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)g(x) \,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{\beta} \sin(x)\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\,x \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{1}{2}\left[(\cos(x)+\sin(x))\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\beta} \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{1}{2}(\cos(\beta)+\sin(\beta))\mathrm{e}^{-\beta} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

wobei wir $|(\cos(\beta)+\sin(\beta))\mathrm{e}^{-\beta}| \leqq 2\mathrm{e}^{-\beta}$ zur Berechnung des Grenzwertes verwendet haben.

(b) Nach Teilaufgabe **(a)** ist

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x) \,\mathrm{d}\,x = f(\xi) \int_0^{+\infty} g(x) \,\mathrm{d}\,x$$

äquivalent zu $\frac{1}{2} = \sin(\xi)$. Dies ist für $\xi \in [0, +\infty)$ genau dann erfüllt, wenn

$$\xi \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6}\pi + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Aufgabe H 83. *Berechnung uneigentlicher Integrale*
Berechnen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4}{x^2+6x+5}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{0+0}^{\pi^2} \frac{\left(\cos(\sqrt{x})\right)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen zunächst eine Partialbruchzerlegung durch. Die Nullstellen des Polynoms x^2+6x+5 sind $x_1=-5$ und $x_2=-1$. Somit machen wir den Ansatz

$$\frac{4}{x^2+6x+5} \overset{!}{=} \frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A+5B}{x^2+6x+5}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das LGS

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ A+5B&=4. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $B=-A$ und nach Einsetzen in der zweiten Gleichung bekommen wir $-4A=4$, also $A=-1$ und $B=1$. Die Partialbruchzerlegung lautet damit

$$\frac{4}{x^2+6x+5} = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}.$$

Damit können wir nun das Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{4}{x^2+6x+5}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\ln(|x+1|)-\ln(|x+5|)\right]_0^{\beta}\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\ln\left(\left|\frac{x+1}{x+5}\right|\right)\right]_0^{\beta}\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\ln\left(\left|\frac{\beta+1}{\beta+5}\right|\right)-\ln\left(\frac{1}{5}\right)\\ &= \ln(1)-\ln\left(\frac{1}{5}\right)\\ &= \ln(5), \end{aligned}$$

wobei wir $\lim_{\beta\to+\infty}\left|\frac{\beta+1}{\beta+5}\right| = 1$ verwendet haben, um den Betrag im Logarithmus aufzulösen.

(b) Mit der Substitution $t=\sqrt{x}$ erhalten wir zunächst

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = 2\int \cos(t)^2\,\mathrm{d}\,t.$$

Das rechte unbestimmte Integral wurde schon in Beispiel 3.3.5 bestimmt. Dort wurde die Formel

$$2\cos(t)^2 = \cos(2t)+1$$

hergeleitet und verwendet, was zu

$$2\int \cos(t)^2 \,\mathrm{d}\,t = \int \cos(2t) + 1 \,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right] \qquad (*)$$

führt. Alternativ folgt mit partieller Integration im ersten Schritt und Einsetzen von $\sin(t)^2 = 1 - \cos(t)^2$ im zweiten Schritt auch

$$\int \cos(t)^2 \,\mathrm{d}\,t = [\sin(t)\cos(t)] + \int \sin(t)^2 \,\mathrm{d}\,t = [\sin(t)\cos(t)] + \int 1 - \cos(t)^2 \,\mathrm{d}\,t,$$

also

$$2\int \cos(t)^2 \,\mathrm{d}\,t = [\sin(t)\cos(t)] + \int 1 \,\mathrm{d}\,t = [\sin(t)\cos(t) + t]\,.$$

Aufgrund des Additionstheorems $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ stimmt dies mit dem Ergebnis $(*)$ überein.
Insgesamt bekommen wir nun

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x = 2\int \cos(t)^2 \,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right] = \left[\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2} + \sqrt{x}\right],$$

wobei wir im letzten Schritt die Rücksubstitution $t = \sqrt{x}$ durchgeführt haben. Damit lässt sich nun das gesuchte Integral berechnen:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{\alpha\to 0+0} \int_\alpha^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\alpha\to 0+0} \left[\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2} + \sqrt{x}\right]_\alpha^{\pi^2} \\ &= \frac{\sin(2\pi)}{2} + \pi - \lim_{\alpha\to 0+0}\left(\frac{\sin(2\sqrt{\alpha})}{2} + \sqrt{\alpha}\right) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Aufgabe H 84. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_{0+0}^{+\infty} \frac{(\cos(x))^5}{\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\ln(x+2)}{x^3 + x} \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[3]{x^5}} \,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x^7 + 1}} \,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für alle $x \in (0, +\infty)$ gilt

$$0 \leqq \left|\frac{(\cos(x))^5}{\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x}}\right| = \frac{|\cos(x)|^5}{\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x}} \leqq \frac{1}{\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x}} = \mathrm{e}^{-x} x^{\frac{2}{3}-1}\,.$$

Das Integral $\int\limits_{0+0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\frac{2}{3}-1} \,\mathrm{d}\,x$ konvergiert nach 3.7.12 mit $\alpha = \frac{2}{3} > 0$. Nach dem Majoranten-Kriterium 3.7.5.1 (zusammen mit 3.7.7) konvergiert damit $\int\limits_{0+0}^{+\infty} \left|\frac{(\cos(x))^5}{\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x}}\right| \mathrm{d}\,x$.
Weiter folgt mit dem Majoranten-Kriterium 3.7.5.3 (in Kombination mit 3.7.7), dass auch $\int\limits_{0+0}^{+\infty} \frac{(\cos(x))^5}{\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergiert.

(b) Seien $f(x) := \frac{\ln(x+2)}{x^3+x}$ und $g(x) := \frac{1}{x}$. Die Funktionen f und g sind im Intervall $(0,1]$ stetig und positiv. Zudem gilt mit den Grenzwertsätzen 1.12.1 schließlich

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(x+2)}{x^2+1} = \ln(2).$$

Nach dem Grenzwertkriterium 3.7.11.1 haben $\int\limits_{0+0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ und $\int\limits_{0+0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}\,x$ das gleiche Konvergenzverhalten. Nach 3.7.9 ist $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$ divergent ($\gamma = 1$). Damit folgt, dass auch das Integral $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{\ln(x+2)}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x$ divergiert.

Alternative: Für alle $x \in (0,1]$ gilt

$$\frac{\ln(x+2)}{x^3+x} = \frac{\ln(x+2)}{(x^2+1)x} \geqq \frac{\ln(2)}{2x} \geqq 0.$$

Nach 3.7.9 divergiert das Integral $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$, womit auch $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{\ln(2)}{2x}\,\mathrm{d}\,x$ divergiert. Nach 3.7.5.2 divergiert somit schließlich $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{\ln(x+2)}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Seien $f(x) := \frac{\arctan(x)}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{\arctan(x)}{x^{5/3}}$ und $g(x) := \frac{1}{x^{2/3}}$.
Die Funktionen f und g sind im Intervall $(0,1]$ stetig und positiv. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\arctan(x)}{x}$ ist von der Form „$\frac{0}{0}$“. Aus der Konvergenz von

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arctan(x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1\,,$$

folgt nach der Regel von l'Hospital 2.5.1 also $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$.
Nach dem Grenzwertkriterium 3.7.11.1 haben $\int\limits_{0+0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ und $\int\limits_{0+0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}\,x$ das gleiche Konvergenzverhalten. Nach 3.7.9 ist $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{1}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}\,x$ konvergent ($\gamma = 2/3$). Damit folgt, dass auch das Integral $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert.

Alternative: Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}$ ist auf $(0,+\infty)$ monoton fallend und positiv. Wie eben mit der Regel von l'Hospital gezeigt gilt ferner $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$. Für alle $x \in (0,1]$ folgt daraus schließlich

$$0 \leqq \frac{\arctan(x)}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{\arctan(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} \leqq 1 \cdot \frac{1}{x^{2/3}}\,.$$

Nach 3.7.9 konvergiert das Integral $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{1}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}\,x$, womit auch $\int\limits_{0+0}^{1} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}\,x$ nach dem Majoranten-Kriterium 3.7.5.1 konvergiert.

(d) Die Nullstellen von x^2-2x-3 sind -1 und 3. Damit teilen wir das Integral auf:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x = \int_0^{3} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x + \int_3^{+\infty} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x\,.$$

Das Integral $\int_0^3 \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergiert nach Satz 3.5.5, da die Funktion $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}}$ auf [0,3] stetig ist.

Für das Integral $\int_3^{+\infty} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x$ bemerken wir, dass für alle $x \in [3,+\infty)$ die Abschätzung

$$0 \leqq \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \leqq \frac{x^2}{\sqrt{x^7+1}} \leqq \frac{x^2}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad (\star)$$

gilt. Nach 3.7.8 ist $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergent ($\gamma = 3/2$). Aus der Monotonie des Integrals 3.5.7 folgt $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \,\mathrm{d}\,x \leqq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \,\mathrm{d}\,x$, wonach auch $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergent ist. Wegen ($\star$) folgt daraus mit dem Majoranten-Kriterium 3.7.5.1, dass $\int_3^{+\infty} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergiert. Insgesamt erhalten wir somit, dass $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergiert.

Bemerkung: Die Konvergenz von $\int_3^{+\infty} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x$ kann auch mit dem Grenzwertkriterium eingesehen werden. Sei f wie zuvor gegeben und betrachte nun $g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$. Die Funktionen f und g sind auf dem Intervall $[3,+\infty)$ stetig und positiv. Außerdem gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}(x^2-2x-3)}{\sqrt{x^7+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{7/2}(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}{x^{7/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^7}}} = 1\,.$$

Nach dem Grenzwertkriterium 3.7.11.1 haben $\int_3^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}\,x$ und $\int_3^{+\infty} g(x) \,\mathrm{d}\,x$ das gleiche Konvergenzverhalten. Wie zuvor sehen wir mit Hilfe von 3.7.8, dass $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergent ist. Damit folgt schließlich, dass auch $\int_3^{+\infty} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^7+1}} \,\mathrm{d}\,x$ konvergent ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 85. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.
Ist es sinnvoll, das Integral-Vergleichskriterium 3.8.1 anzuwenden?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,\mathrm{e}^{-n}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **1. Möglichkeit:** Für $f\colon [2,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \to x^2\mathrm{e}^{-x}$ gilt

$$f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x} \leqq 0$$

für alle $x \in [2,+\infty)$. Folglich ist f monoton fallend und da f offensichtlich auch positiv ist, sind alle Voraussetzungen des Integral-Vergleichskriteriums 3.8.1 erfüllt. Also haben

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2\mathrm{e}^{-n} \quad \text{und} \quad \int_2^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$$

das gleiche Konvergenzverhalten. Für das Integral bekommen wir wegen $x^2\mathrm{e}^{-x} \geqq 0$ und Bemerkung 3.7.13 die Abschätzung

$$\int_2^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x \leqq \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

Also sind das Integral und somit auch die Reihe beide (absolut) konvergent.

2. Möglichkeit: Alternativ gilt mit $a_n = n^2\,\mathrm{e}^{-n}$, dass

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2\mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^2\mathrm{e}^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

Somit folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe wegen Bemerkung 1.9.15.1 auch aus dem Quotientenkriterium. Analog lässt sich auch das Wurzelkriterium anwenden.

(b) **1. Möglichkeit:** Eine kurze, direkte Lösung verwendet die Ungleichung $|\sin(x)| \leqq x$ für $x \geqq 0$. Dies führt auf die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung

$$\left|\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqq \frac{1}{n^2},$$

sodass die nach Beispiel 1.8.2 absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Daher folgt die (absolute) Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ aus dem Majorantenkriterium 1.9.10.

2. Möglichkeit: Alternativ kann man auch hier das Integral-Vergleichskriterium anwenden, was aber viel aufwendiger ist: Für $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \to \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right) < 0,$$

denn es ist $\sin(y) > 0$ und $\cos(y) > 0$ für alle $y = \frac{1}{x} \in (0, 1]$. Daher ist f monoton fallend und positiv. Nach dem Integral-Vergleichskriterium haben also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}\, x$$

das gleiche Konvergenzverhalten. Um die Konvergenz des Integrals zu untersuchen, substituieren wir zunächst $y = \frac{1}{x}$ und bekommen für alle $\beta > 1$ die Gleichheit

$$\int_1^{\beta} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}\, x = \int_{1/\beta}^{1} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}\, y.$$

Da wir aus Beispiel 3.8.7 wissen, dass

$$\mathsf{Si}\, t = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}\, x$$

für alle $t \geqq 0$ existiert, bekommen wir insgesamt

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}\, x = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}\, x &= \lim_{\beta \to +\infty} \int_{1/\beta}^{1} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}\, y \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}\, y = \mathsf{Si}\, 1 < \infty,\end{aligned}$$

d.h. das Integral und somit auch die Reihe sind beide (absolut) konvergent.

(c) Für $f\colon [2, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \to \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}}$ gilt

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{3}{2}\ln(x)}{x^{5/2}} < 0,$$

denn für $x \geqq 2$ gilt $\frac{3}{2}\ln(x) \geqq \frac{3}{2}\ln(2) > 1$. Also ist f monoton fallend und da f offensichtlich auch positiv ist, können wir das Integral-Vergleichskriterium wieder anwenden. Mit partieller Integration folgt

$$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}} \mathrm{d}\, x = \left[-2\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right] + 2\int x^{-3/2} \mathrm{d}\, x = \left[-\frac{2\ln(x) + 4}{\sqrt{x}}\right].$$

Damit berechnen wir nun das Integral:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}} \mathrm{d}\, x &= \lim_{\beta \to +\infty} \int_2^{\beta} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}} \mathrm{d}\, x \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left[-\frac{2\ln(x) + 4}{\sqrt{x}}\right]_2^{\beta} \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} -2\frac{\ln(\beta)}{\sqrt{\beta}} - \frac{4}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{2}\ln(2) + 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}(2 + \ln(2)),\end{aligned}$$

wobei der Grenzwert des ersten Terms zum Beispiel mit der Regel von l'Hospital berechnet werden kann:

$$\lim_{\beta \to +\infty} -2\frac{\ln(\beta)}{\sqrt{\beta}} = \lim_{\beta \to +\infty} -2\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\beta}\ln(\beta)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\beta}\sqrt{\beta}} = \lim_{\beta \to +\infty} -\frac{4}{\sqrt{\beta}} = 0.$$

Also sind das Integral und somit auch die Reihe wieder (absolut) konvergent.

Aufgabe H 86. *Geschlossene Darstellung von Potenzreihen*
Wir betrachten die durch eine Potenzreihe definierte Funktion

$$f\colon (2-\rho, 2+\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} (2x-4)^{2k}.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe.

(b) Finden Sie eine Reihendarstellung für die Ableitung f' von f.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Potenzreihe kann man umschreiben zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} (2x-4)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^{2k}}{2k} (x-2)^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^{n/2+1}2^n n^{-1} & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wegen $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt dabei

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2.$$

Aus 1.14.7 bekommen wir daher den Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{2}$.

(b) Nach Satz 3.8.4 darf man die Potenzreihe gliedweise differenzieren. Für $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ führt dies auf

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} 2^{2k} (x-2)^{2k-1}.$$

(c) Wir formen die Reihe aus **(b)** zunächst um:

$$\begin{aligned} f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} 2^{2k} (x-2)^{2k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} 2^{2k+2} (x-2)^{2k+1} \\ &= 4(x-2) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-4(x-2)^2\right)^k . \end{aligned}$$

Für $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ und $z = -4(x-2)^2$ gilt nun $|z| < 1$. Wie in Beispiel 1.14.8 können wir somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-4(x-2)^2\right)^k = \frac{1}{1+4(x-2)^2}$$

als geometrische Reihe in z identifizieren. Einsetzen in obiger Reihendarstellung für $f'(x)$ liefert

$$f'(x) = \frac{4(x-2)}{1+4(x-2)^2}.$$

(d) Mit der Substitution $u = 4(x-2)^2$ können wir das Ergebnis aus **(c)** integrieren:

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{4(x-2)}{1+4(x-2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{2(1+u)}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u)\right]$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+4(x-2)^2\right)\right].$$

Daraus folgt

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+4(x-2)^2\right) + C$$

mit einer noch zu bestimmenden Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$. Den Wert von C kann man durch Einsetzen ermitteln: Aus der Potenzreihendarstellung von f erhält man $f(2) = 0$, weshalb $C = 0$ gelten muss. Also ist

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+4(x-2)^2\right).$$

Aufgabe H 87. *Stetigkeit und Folgen*

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}, \\ \dfrac{x_1^2 + (x_1^2 + x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \binom{x_1}{x_2} \neq \binom{0}{0}. \end{cases}$

(a) Stellen Sie Zähler und Nenner von $\dfrac{x_1^2 + (x_1^2 + x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2}$ in der Multi-Index-Notation von Lemma 4.2.10 dar. Geben Sie jeweils alle nichtverschwindenden Koeffizienten an.

(b) Beweisen Sie, dass f im Punkt $\binom{0}{0}$ stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$ für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Den Zähler kann man schreiben als

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + (x_1^2 + x_2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + x_1^2 + x_2^2 = \sum_{\alpha\in J_1} a_\alpha x^\alpha,$$

wobei $J_1 = \{(4,0),(2,1),(2,0),(0,2)\}$ alle Multi-Indizes mit nichtverschwindenden Koeffizienten enthält. Diese lauten $a_{(4,0)} = 1, a_{(2,1)} = 2, a_{(2,0)} = 1$ und $a_{(0,2)} = 1$.
Der Nenner ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 = \sum_{\alpha\in J_2} a_\alpha x^\alpha,$$

wobei hier $J_2 = \{(2,0),(0,2)\}$ ist. Die zugehörigen Koeffizienten sind $a_{(2,0)} = 1$ und $a_{(0,2)} = 1$.

(b) Wir zeigen zunächst den Hinweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \binom{0}{0}$. Jedes $a_n \in \mathbb{R}^2$ können wir schreiben als $a_n = \binom{a_{n1}}{a_{n2}}$ für gewisse $a_{n1}, a_{n2} \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 4.2.3 ist dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ äquivalent zu $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ für $k \in \{1,2\}$. Gilt nun $a_n \neq \binom{0}{0}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Definition von f die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(a_n) - 1| &= \left| \frac{a_{n1}^2 + (a_{n1}^2 + a_{n2})^2}{a_{n1}^2 + a_{n2}^2} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{a_{n1}^4 + 2a_{n1}^2 a_{n2}}{a_{n1}^2 + a_{n2}^2} + \frac{a_{n1}^2 + a_{n2}^2}{a_{n1}^2 + a_{n2}^2} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{a_{n1}^4 + 2a_{n1}^2 a_{n2}}{a_{n1}^2 + a_{n2}^2} \right| \\ &= \left| a_{n1}^2 + 2a_{n2} \right| \frac{a_{n1}^2}{a_{n1}^2 + a_{n2}^2} \\ &\leqq \left| a_{n1}^2 + 2a_{n2} \right|. \end{aligned}$$

Wegen $f\binom{0}{0} = 1$ ist diese Abschätzung auch im Fall $a_n = \binom{0}{0}$ noch richtig. Also gilt

$$0 \leqq |f(a_n) - 1| \leqq \left| a_{n1}^2 + 2a_{n2} \right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und aus $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n2}$ folgt außerdem

$$\lim_{n\to+\infty} \left| a_{n1}^2 + 2a_{n2} \right| = \left| \lim_{n\to+\infty} a_{n1}^2 + 2 \lim_{n\to+\infty} a_{n2} \right| = 0.$$

Daher schließen wir mit dem Sandwichsatz 1.5.6, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 1$. Damit ist der Hinweis gezeigt.

Da nun $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 1 = f\binom{0}{0}$ für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \binom{0}{0}$ gilt, folgt aus Lemma 4.2.7, dass f stetig in $\binom{0}{0}$ ist.

Aufgabe H 88. *Untersuchung einer Funktion in mehreren Variablen*

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{4y^2 - xy}{x^2+y^2}$
und dazu die Funktionenschar $g_s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon y \mapsto f\binom{s}{y}$ für $s \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Der Graph von g_s ist also der achsenparallele Schnitt des Graphen von f mit der Ebene $E\colon x = s$.

(a) Zeichnen Sie die Niveaulinien N_t von f zu $t \in \{0, 2, 4\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von g_1 im Bereich $-6 \leqq y \leqq 6$.

(c) Bestimmen Sie das globale Minimum von g_s in Abhängigkeit von s.

(d) Bestimmen Sie das globale Minimum von f auf $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = t \Leftrightarrow \frac{4y^2 - xy}{x^2+y^2} = t \Leftrightarrow 4y^2 - xy = t(x^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow (4-t)y^2 - xy - tx^2 = 0.$$

Die Niveaulinien zu $t = 0$ bekommen wir somit durch Lösen von $4y^2 - xy = 0$, also

$$N_0 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix}x\\x/4\end{pmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}.$$

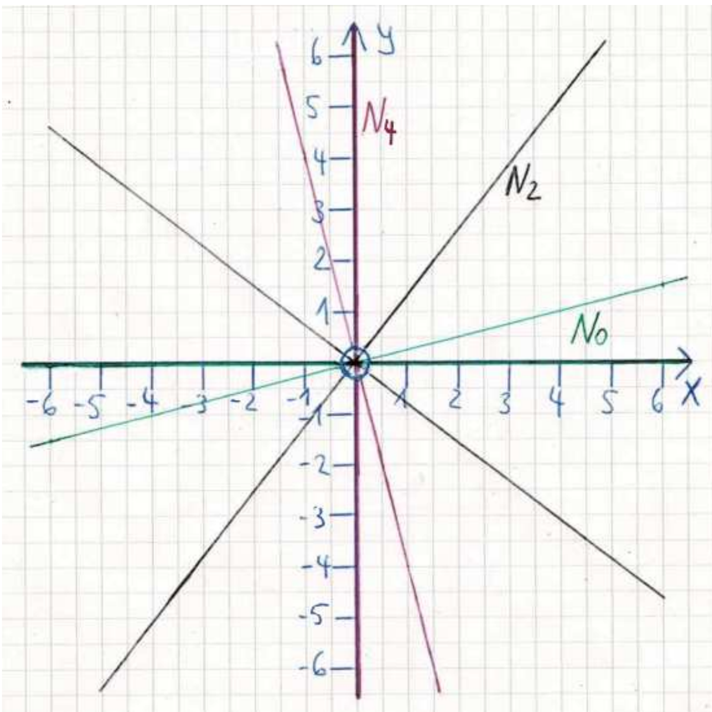
Analog erhält man die Niveaulinien zu $t = 4$ durch Lösen von $-xy - 4x^2 = 0$, also

$$N_4 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \middle| \, y \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix}x\\-4x\end{pmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}.$$

Im Fall $t = 2$ müssen wir die quadratische Gleichung $2y^2 - xy - 2x^2 = 0$ lösen. Auflösen nach y ergibt $y = \alpha_+ x$ oder $y = \alpha_- x$ mit $\alpha_\pm = (1 \pm \sqrt{17})/4$. Somit ist

$$N_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\\alpha_+ x\end{pmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix}x\\\alpha_- x\end{pmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}.$$

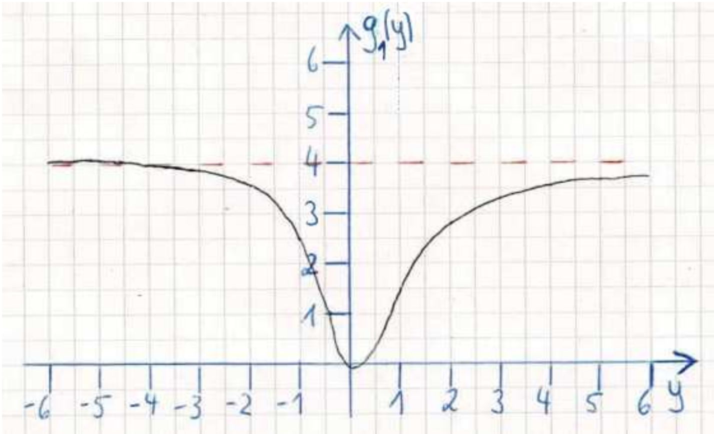
Damit erhalten wir insgesamt folgende Skizze:



(b) Der Graph von

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, y \mapsto \frac{4y^2 - y}{1 + y^2}$$

ist für $-6 \leqq y \leqq 6$ in der folgenden Skizze dargestellt:



(c) **1. Möglichkeit:** Ein eleganter Lösungsweg besteht darin, zunächst alle $t \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für welche die Gleichung

$$g_s(y) = t \;\Leftrightarrow\; \frac{4y^2 - sy}{s^2 + y^2} = t \;\Leftrightarrow\; (4-t)y^2 - sy - ts^2 = 0$$

eine Lösung $y \in \mathbb{R}$ besitzt. Diese quadratische Gleichung in y hat eine Lösung $y \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn der Wurzelterm in der Mitternachtsformel (Diskriminante) nichtnegativ ist, d.h.

$$s^2\left(1 + 4t(4-t)\right) \geqq 0.$$

Das globale Minimum von g_s ist dann das kleinste $t \in \mathbb{R}$, welches diese Bedingung erfüllt. Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$s^2\left(1 + 4t(4-t)\right) \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; -4t^2 + 16t + 1 \overset{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$t_\pm = 2 \pm \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Davon ist $t_+ = 2 + \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 4.0616$ das globale Maximum und $t_- = 2 - \frac{\sqrt{17}}{2} \approx -0.0616$ das globale Minimum von g_s. Folglich gilt für alle $s \neq 0$, dass

$$\min_{y\in\mathbb{R}} g_s(y) = 2 - \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

2. Möglichkeit: Ein alternativer Lösungsweg besteht darin, mit der Quotientenregel die Ableitung

$$g_s'(y) = \frac{(8y - s)(s^2 + y^2) - 2y(4y^2 - sy)}{(s^2 + y^2)^2} = \frac{sy^2 + 8ys^2 - s^3}{(s^2 + y^2)^2}$$

zu berechnen. Die notwendige Bedingung für ein (lokales) Minimum $g_s'(y) \overset{!}{=} 0$ führt dann auf die quadratische Gleichung

$$y^2 + 8ys - s^2 \overset{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$y_\pm = \left(-4 \pm \sqrt{17}\right) s.$$

Einsetzen dieser beiden Werte in g_s liefert

$$g_s(y_+) = 2 - \frac{\sqrt{17}}{2} \approx -0.0616, \qquad g_s(y_-) = 2 + \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 4.0616.$$

Wegen

$$\lim_{y\to+\infty} g_s(y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{4 - \frac{s}{y}}{1 + \frac{s^2}{y^2}} = 4 = \lim_{y\to-\infty} g_s(y)$$

nimmt g_s also bei y_+ sein globales Minimum und bei y_- sein globales Maximum an.

(d) Wegen $f\binom{0}{y} = 4$ für alle $y \neq 0$ folgt

$$\min_{\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \min_{s\neq0} \min_{y\in\mathbb{R}} f\begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} = \min_{s\neq0} \min_{y\in\mathbb{R}} g_s(y) = 2 - \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 89. *Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen*

Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \arctan(\sinh(xyz)),$$

den Punkt $P = (\pi, 2, 0)^\intercal$ und den Vektor $v = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1)^\intercal$. Bestimmen Sie

(a) $\operatorname{grad} f(x,y,z)$, **(b)** $\partial_v f(P)$, **(c)** $\mathrm{H}f(x,y,z)$, **(d)** $\mathrm{H}f\,(P)$.

Hinweis. Mit der Formel $1 + \big(\sinh(x)\big)^2 = \big(\cosh(x)\big)^2$ können Sie $\operatorname{grad} f$ vereinfachen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erinnern daran, dass $\frac{\partial}{\partial x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{\partial}{\partial x}\sinh(x) = \cosh(x)$. Also

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y,z) &= \Big(\frac{\cosh(xyz)yz}{1+(\sinh(xyz))^2}, \frac{\cosh(xyz)xz}{1+(\sinh(xyz))^2}, \frac{\cosh(xyz)xy}{1+(\sinh(xyz))^2}\Big)^\intercal \\ &= \Big(\frac{yz}{\cosh(xyz)}, \frac{xz}{\cosh(xyz)}, \frac{xy}{\cosh(xyz)}\Big)^\intercal \\ &= \frac{1}{\cosh(xyz)}(yz, xz, xy)^\intercal,\end{aligned}$$

wobei wir im Schritt von der ersten zur zweiten Zeile den Hinweis aus der Aufgabenstellung verwendet haben für die folgende Vereinfachung:

$$\frac{\cosh(xyz)}{1+(\sinh(xyz))^2} = \frac{\cosh(xyz)}{(\cosh(xyz))^2} = \frac{1}{\cosh(xyz)}.$$

(b) Da $\cosh(0) = 1$, gilt $\operatorname{grad} f(P) = (0, 0, 2\pi)^\intercal$. Also

$$\partial_v f(P) = \operatorname{grad} f(P) \bullet v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi.$$

(c) Es reicht, $\partial_{xx} f$ und $\partial_{xy} f$ auszurechnen. Dazu erinnern wir daran, dass $\frac{\partial}{\partial x}\cosh(x) = \sinh(x)$. Die anderen Ableitungen bekommt man umsonst dank des Satzes von Schwarz oder durch Permutation der Variabeln. Man berechnet

$$\mathrm{H}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{y^2z^2\sinh(xyz)}{\cosh^2(xyz)} & \frac{z(\cosh(xyz)-xyz\sinh(xyz))}{\cosh^2(xyz)} & \frac{y(\cosh(xyz)-xyz\sinh(xyz))}{\cosh^2(xyz)} \\ \frac{z(\cosh(xyz)-xyz\sinh(xyz))}{\cosh^2(xyz)} & -\frac{x^2z^2\sinh(xyz)}{\cosh^2(xyz)} & \frac{x(\cosh(xyz)-xyz\sinh(xyz))}{\cosh^2(xyz)} \\ \frac{y(\cosh(xyz)-xyz\sinh(xyz))}{\cosh^2(xyz)} & \frac{x(\cosh(xyz)-xyz\sinh(xyz))}{\cosh^2(xyz)} & -\frac{x^2y^2\sinh(xyz)}{\cosh^2(xyz)} \end{pmatrix}$$

(d) Da $\sinh(0) = 0$ und $\cosh(0) = 1$, bekommen wir durch Einsetzen

$$\mathrm{H}f\,(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \pi \\ 2 & \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 90. *Satz von Taylor in Dimension* 2

Es sei $a = \binom{0}{\pi} \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sin(x_1)\sin(x_2).$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_1(f, x, a)$.

(b) Finden Sie eine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{T}_1(g, x, a) = \mathrm{T}_1(f, x, a)$ und $g\binom{2}{0} = 4$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f, x, a)$.

(d) Es sei $v = \binom{\pi/2}{-\pi/2}$. Schätzen Sie den Fehler

$$|f(a+v) - \mathrm{T}_1(f, a+v, a)|$$

mit Hilfe des Restglieds aus 4.4.12 nach oben ab. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x) = (\cos(x_1)\sin(x_2), \sin(x_1)\cos(x_2))^\intercal$, also $\operatorname{grad} f(a) = (0,0)^\intercal$ und

$$\mathrm{T}_1(f, x, a) = f(a) + (x-a) \bullet \operatorname{grad} f(a) = 0.$$

(b) Es sei p ein Polynom ohne Terme von Grad 0 oder 1. Die Abbildung $g(x) = p(x_1, x_2 - \pi)$ erfüllt dann $\mathrm{T}_1(g, x, a) = 0$. Wir können also zum Beispiel $g(x) = x_1^2$ wählen.

(c) Es gilt

$$\mathrm{H}f\,(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1)\sin(x_2) & \cos(x_1)\cos(x_2) \\ \cos(x_1)\cos(x_2) & -\sin(x_1)\sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

also $\mathrm{H}f\,(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_2(f, x, a) &= \mathrm{T}_1(f, x, a) + \frac{1}{2}(x-a)^\intercal \mathrm{H}f\,(a)\,(x-a) \\ &= 0 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 - \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \pi \end{pmatrix} \\ &= -x_1(x_2 - \pi). \end{aligned}$$

(d) Nach Definition 4.4.13 ist

$$|f(a+v) - \mathrm{T}_1(f, a+v, a)| = |R_1(a, v)|,$$

und nach 4.4.12 ist $R_1(a, v) = \frac{1}{2}\partial_v^2 f(a + \xi v)$ mit geeignetem $\xi \in [0,1]$. Es gilt

$$\partial_v^2 f(x) = v^\intercal \mathrm{H}f\,(x)\, v = -\tfrac{\pi^2}{4}\sin(x_1)\sin(x_2) - \tfrac{\pi^2}{4}\cos(x_1)\cos(x_2)$$

also (wir benutzen $|A + B| \leqq |A| + |B|$)

$$\begin{aligned} |R_1(a, v)| &= \tfrac{1}{2}\Big| -\tfrac{\pi^2}{4}\sin\left(\xi\tfrac{\pi}{2}\right)\sin(\pi - \xi\tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{\pi^2}{4}\cos\left(\xi\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - \xi\tfrac{\pi}{2})\Big| \\ &\leqq \tfrac{\pi^2}{8}\Big(\big|\sin\left(\xi\tfrac{\pi}{2}\right)\sin(\pi - \xi\tfrac{\pi}{2})\big| + \big|\cos\left(\xi\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - \xi\tfrac{\pi}{2})\big|\Big) \\ &\leqq \tfrac{\pi^2}{8}(1+1) = \tfrac{\pi^2}{4} \approx 2.46740. \end{aligned}$$

Als tatsächlicher Fehler ergibt sich

$$|f(a+v) - \mathrm{T}_1(f, a+v, a)| = |f(\pi/2, \pi/2) - 0| = 1.$$

Aufgabe H 91. *Modell: Schmiegquadriken*
Seien $f\colon [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}\colon \binom{x}{y}\mapsto \cos(x)\cos(y)$ und $P_2=\binom{-\pi/2}{-\pi/2}$, $P_3=\binom{\pi/4}{\pi/4}$.
Ein interaktives Modell des Graphen von f finden Sie auf
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/
In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.

(a) Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f in P_2 und P_3.

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Tangentialebene an den Graphen von f in den Punkten P_2 und P_3.

(c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schmiegquadrik an den Graphen von f in P_2 und geben Sie eine euklidische Normalform an. Welche Gestalt hat die Quadrik?

Lösungshinweise hierzu: Aus den Präsenzübungen kennen wir den Gradienten und die Hesse-Matrix von f:

$$\operatorname{grad} f\big((x,y)^\intercal\big)=\begin{pmatrix}-\sin(x)\cos(y)\\-\cos(x)\sin(y)\end{pmatrix},\quad \mathrm{H}f\big((x,y)^\intercal\big)=\begin{pmatrix}-\cos(x)\cos(y) & \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x)\sin(y) & -\cos(x)\cos(y)\end{pmatrix}.$$

(a) Das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f in P_2 ist

$$\begin{aligned}
&T_2\big(f,(x,y)^\intercal,(-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2})^\intercal\big)\\
&= f\big((-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2})^\intercal\big)+\begin{pmatrix}x+\frac{\pi}{2}\\y+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\bullet\operatorname{grad} f\big((-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2})^\intercal\big)+\frac12\begin{pmatrix}x+\frac{\pi}{2}\\y+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}^{\intercal}\mathrm{H}f\big((-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2})^\intercal\big)\begin{pmatrix}x+\frac{\pi}{2}\\y+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\\
&= 0+\begin{pmatrix}x+\frac{\pi}{2}\\y+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\frac12\begin{pmatrix}x+\frac{\pi}{2}\\y+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}^{\intercal}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+\frac{\pi}{2}\\y+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\\
&= \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(y+\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f in P_3 ist

$$\begin{aligned}
&T_2\big(f,(x,y)^\intercal,(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4})^\intercal\big)\\
&= f\big((\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4})^\intercal\big)+\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\y-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\bullet\operatorname{grad} f\big((\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4})^\intercal\big)+\frac12\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\y-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^{\intercal}\mathrm{H}f\big((\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4})^\intercal\big)\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\y-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\\
&= \frac12+\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\y-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\end{pmatrix}+\frac12\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\y-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^{\intercal}\begin{pmatrix}-\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\y-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\\
&= \frac12-\frac12\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac12\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac14\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac12\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac14\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2.
\end{aligned}$$

Vorsicht: Dies ist jeweils die endgültige Antwort für das Taylorpolynom. Man sollte die Klammern nicht durch Ausmultiplizieren auflösen!

Das Taylorpolynom ist anzusehen als ein Polynom in den Variablen $(x-a_1)$ und $(y-a_2)$ (die die Abweichung von den Komponenten des Entwicklungspunktes $\binom{a_1}{a_2}$ angeben).

(b) Die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt P_i, $i=2,3$, ist der Graph des Taylorpolynoms erster Stufe zu f im Punkt P_i, d.h.

$$\left\{(x,y,z)^\intercal\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;z=T_1(f,(x,y)^\intercal,P_i)\right\}.$$

Damit ergeben sich die Ebenengleichungen

$$z=0\quad\text{für } P_2,$$
$$z=\frac12-\frac12\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac12\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\quad\Leftrightarrow\quad x+y+2z=1+\frac{\pi}{2}\quad\text{für } P_3.$$

(c) Die Schmiegquadrik an den Graphen von f im Punkt P_2 ist der Graph des Taylorpolynoms zweiter Stufe zu f im Punkt P_2, d.h.

$$\left\{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = T_2(f,(x,y)^\intercal, P_2)\right\}.$$

Die Schmiegquadrik an P_2 wird somit beschrieben durch die Gleichung

$$z = \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 4xy + 2\pi x + 2\pi y - 4z + \pi^2 = 0\,.$$

Für die Matrixform der Gleichung der Quadrik erhalten wir damit $(x,y,z)A(x,y,z)^\intercal + 2a^\intercal(x,y,z)^\intercal + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c = \pi^2.$$

Um eine euklidische Normalform zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Eigenwerte von A. Da A Blockdiagonalgestalt hat erhalten wir für das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E_3) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}(-\lambda) = -(\lambda^2-4)\lambda = -(\lambda+2)(\lambda-2)\lambda\,.$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Zugehörige normierte Eigenvektoren sind

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Transformationsmatrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Mit $F^\intercal a = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\pi \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich die transformierte Gleichung

$$-2y_1^2 + 2y_2^2 + 2\sqrt{2}\,\pi y_2 - 4y_3 + \pi^2 = 0\,.$$

Mit quadratischer Ergänzung folgt daraus

$$-2y_1^2 + 2\big(y_2 + \tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\big)^2 - 4y_3 = 0\,.$$

Wir setzen daher $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $z_3 := y_3$ und erhalten die Gleichung

$$-2z_1^2 + 2z_2^2 - 4z_3 = 0\,.$$

Eine euklidische Normalform ist somit gegeben durch

$$z_1^2 - z_2^2 + 2z_3 = 0\,,$$

womit die Gestalt der Quadrik ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Aufgabe H 92. *Mengen*

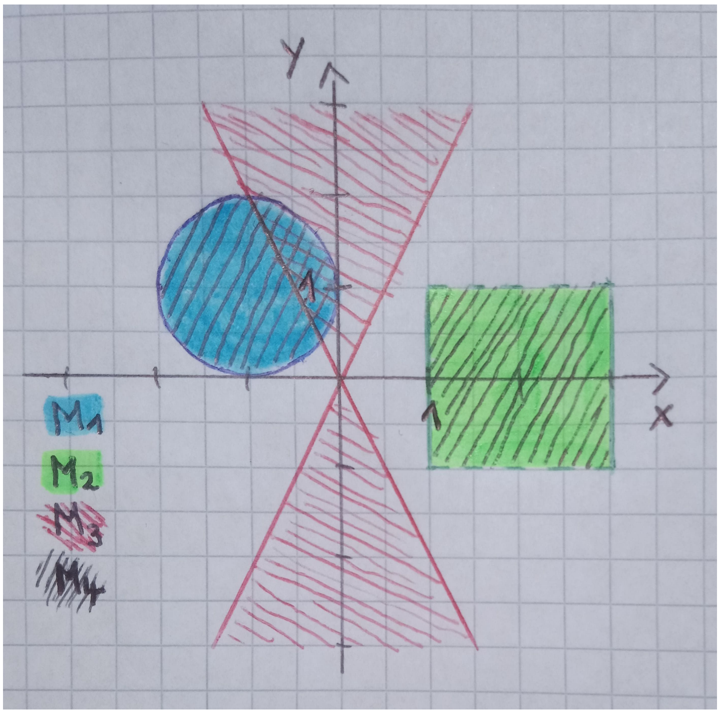
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen M_i des $\mathbb{R}^2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem und untersuchen Sie jeweils, ob diese beschränkt, kompakt bzw. konvex sind.

$$M_1 := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+1)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \right\}, \qquad M_2 := [1,3] \times (-1,1)\,,$$
$$M_3 := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2|x| \leqq |y| \right\}, \qquad M_4 := M_1 \cup M_2\,.$$

Lösungshinweise hierzu: Zum Skizzieren der Mengen M_i machen wir Vorüberlegungen.

- Wir erkennen in M_1 eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(-1,1)^\intercal$, wobei der Rand $\partial M_1 = \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1\right\}$ zu M_1 gehört.
- Die Menge M_2 beschreibt die Fläche des Rechtecks mit Eckpunkten $(1,-1)^\intercal, (1,1)^\intercal, (3,1)^\intercal$ und $(3,-1)$ in $\mathbb{R}^2$. Dabei fehlt sowohl die Kante zwischen $(1,-1)^\intercal$ und $(3,-1)^\intercal$, als auch die Kante zwischen $(1,1)^\intercal$ und $(3,1)^\intercal$.
- Für Punkte $(x,y)^\intercal \in M_3$ gilt im 1. Quadranten $2x \leqq y$, im 2. Quadranten $-2x \leqq y$, im 3. Quadranten $2x \geqq y$ und im 4. Quadranten $-2x \geqq y$. Die Menge M_3 wird damit durch ein nach oben und unten geöffnetes Dreieck beschrieben. Dabei sind die Dreiecke jeweils durch die Geraden $\left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 2x\right\}$ und $\left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = -2x\right\}$ begrenzt, welche zu M_3 gehören.

Wir erhalten damit die folgende Skizze für M_1 (blau mit Rand), M_2 (grün, gestrichelte Linien gehören nicht zum Rand) und M_3 (rot schraffiert mit Rand). Die Menge M_4 ist als Vereinigung von M_1 und M_2 schwarz schraffiert dargestellt; wir erkennen aus der Skizze, dass der Rand von M_4 gerade aus den Rändern von M_1 und M_2 besteht.



Als Nächstes untersuchen wir, ob die Mengen M_i beschränkt, kompakt bzw. konvex sind.

- M_1 ist beschränkt, da $M_1 \subseteqq U_3(0)$: Aus $(x,y)^\intercal \in M_1$ folgt $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqq -2x + 2y - 1$. Da zudem für $(x,y)^\intercal \in M_1$ stets $x \in [-2,0]$ und $y \in [0,2]$ gilt, folgt somit insgesamt $x^2 + y^2 \leqq -2x + 2y - 1 \leqq 4 + 4 - 1 = 7 < 9$, womit $(x,y)^\intercal \in U_3(0)$ (diese Abschätzung zeigt sogar $M_1 \subseteqq U_r(0)$ für $r > \sqrt{7}$).
  Nach obiger Überlegung für M_1 gilt $\partial M_1 \subseteqq M_1$, womit M_1 nach 4.2.16 abgeschlossen

ist. Da M_1 zudem beschränkt ist, folgt mit 4.2.16, dass M_1 auch kompakt ist.
Nach 4.4.7 ist in $\mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Kugel $\overline{U_1(0)}$ konvex, da die offene Kugel $U_1(0)$ konvex ist. Da M_1 nur die auf den Mittelpunkt $(-1,1)^\intercal$ verschobene Kugel $\overline{U_1(0)}$ darstellt, folgt, dass M_1 ebenfalls konvex ist.

- M_2 ist beschränkt, da $M_2 \subsetneqq U_4(0)$: Für $(x,y)^\intercal \in M_2$ ist $x \in [1,3]$ und $y \in (-1,1)$, also $x^2+y^2 < 9+1 < 16$ (diese Abschätzung zeigt sogar $M_2 \subsetneqq U_r(0)$ für $r \geqq \sqrt{10}$). Nach obiger Betrachtung für M_2, ist

$$\partial M_2 = \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x \leqq 3,\ y=-1 \vee y=1\right\} \cup \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x=1 \vee x=3,\ -1 \leqq y \leqq 1\right\},$$

womit $\partial M_2 \not\subseteqq M_2$ (z.B. liegen alle 4 Eckpunkte des Rechtecks nicht in M_2). Also ist M_2 nicht abgeschlossen und daher nach 4.2.16 nicht kompakt.
Als Rechteck ist M_2 nach 4.4.7 konvex. Dies kann man auch unmittelbar verifizieren: Seien $(x_1,y_1)^\intercal, (x_2,y_2)^\intercal \in M_2$. Dann ist die Verbindungsstrecke parametrisiert durch

$$(1-t)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)x_1 + tx_2 \\ (1-t)y_1 + ty_2 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0,1].$$

Nun gilt für alle $t \in [0,1]$ die Relation $1 = (1-t)\cdot 1 + t\cdot 1 \leqq (1-t)x_1 + tx_2 \leqq (1-t)\cdot 3 + t\cdot 3 = 3$, und analog $-1 < (1-t)y_1 + ty_2 < 1$. Also ist $(1-t)(x_1,y_1)^\intercal + t(x_2,y_2)^\intercal \in M_2$ für alle $t \in [0,1]$, woraus die Konvexität von M_2 folgt.

- M_3 ist nicht beschränkt: Die Folge $\left((0,n)^\intercal\right)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in M_3 mit

$$\lim_{n\to+\infty} \left|(0,n)^\intercal\right| = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Egal wie groß $S \in \mathbb{R}$ gewählt wird, können daher nie alle Folgenglieder in $U_S(0)$ liegen. Da M_3 nicht beschränkt ist, ist M_3 nach 4.2.16 nicht kompakt.
M_3 ist nicht konvex: Die beiden Punkte $(1,-2)^\intercal$ und $(1,2)^\intercal$ liegen in M_3, jedoch nicht deren Mittelpunkt $(1,0)$, da $2 = 2|1| \leqq |0| = 0$ ein Widerspruch ist.

- M_4 ist beschränkt: Wie bereits gesehen gilt $M_1 \subsetneqq U_3(0) \subsetneqq U_4(0)$, $M_2 \subsetneqq U_4(0)$, und somit $M_4 = M_1 \cup M_2 \subsetneqq U_4(0)$.
Da $M_1 = \overline{M_1}$, und für alle $(x,y)^\intercal \in \overline{M_2} = M_2 \cup \partial M_2 = [1,3] \times [-1,1]$ wegen $x \in [1,3]$ stets $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geqq (x+1)^2 \geqq 4 > 1$ gilt, ist der Schnitt $\overline{M_1} \cap \overline{M_2}$ die leere Menge. Damit ist der Rand von M_4 gerade die Vereinigung der Ränder von M_1 und M_2, also $\partial M_4 = \partial M_1 \cup \partial M_2$ und es gilt $\partial M_2 \not\subseteqq M_1$. Zudem haben wir bereits gesehen, dass $\partial M_2 \not\subseteqq M_2$ und somit $\partial M_2 \not\subseteqq M_1 \cup M_2 = M_4$. Damit ist M_4 nicht abgeschlossen, also nach 4.2.16 auch nicht kompakt.
M_4 ist nicht konvex: Die Punkt $(-1,0)^\intercal \in M_1$ und $(1,0)^\intercal \in M_2$ liegen nach Definition in M_4, jedoch nicht deren Mittelpunkt $(0,0)^\intercal$. Letzteres sieht man unmittelbar, da Einsetzen in die Kreisgleichung von M_1 den Widerspruch $2 = (0+1)^2 + (0-1)^2 \leqq 1$ ergibt und $0 \notin [1,3]$, also $(0,0)^\intercal \notin M_1$ und $(0,0)^\intercal \notin M_2$.
Bemerkung: Die Menge M_4 bestätigt die Behauptung in 4.4.7, wonach die Vereinigung konvexer Mengen (hier M_1 und M_2) im Allgemeinen nicht mehr konvex ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 93. *Kritische Stellen*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto f\binom{x}{y} = (x^4 + y^4)(x-3)(y-3)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f.

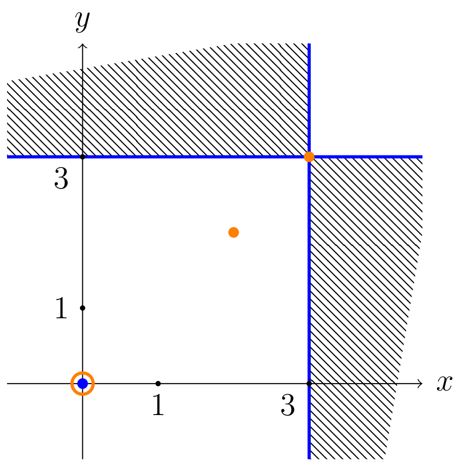
(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

(c) Finden Sie die kritischen Stellen von f.
Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass das Gleichungssystem $\begin{cases} 5y^4 - 12y^3 + x^4 = 0 \\ 5x^4 - 12x^3 + y^4 = 0 \end{cases}$ genau zwei reelle Lösungen besitzt, nämlich $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ und $\binom{x}{y} = \binom{2}{2}$.

(d) Bestimmen Sie den Typ jeder kritischen Stelle.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Nullstellenmenge von f (blau im Bild) besteht aus den Geraden $x = 3, y = 3$ und aus dem Punkt $\binom{0}{0}$. Im gekennzeichneten Gebiet auf dem Bild ist f negativ, im weißen positiv.



(b) Es gilt

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y-3)\,(5x^4 - 12x^3 + y^4) \\ (x-3)\,(5y^4 - 12y^3 + x^4) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y-3)\,(20x^3 - 36x^2) & 5x^4 - 12x^3 + 5y^4 - 12y^3 \\ 5x^4 - 12x^3 + 5y^4 - 12y^3 & (x-3)\,(20y^3 - 36y^2)\,. \end{pmatrix}$$

(c) Wir setzen beide Komponenten von $\operatorname{grad} f\binom{x}{y}$ gleich Null.

Die erste dieser Komponente ist ein Produkt $(y-3)\,(5x^4 - 12x^3 + y^4)$ und wird nur Null, wenn einer der Faktoren Null wird (also $y = 3$ oder $5x^4 - 12x^3 + y^4 = 0$).

Ebenso wird die zweite Komponente nur Null, wenn $x = 3$ oder $5y^4 - 12y^3 + x^4 = 0$ ist.

Dies liefert zunächst den Fall $\binom{x}{y} = \binom{3}{3}$. Als Nächstes betrachten wir den Fall $x = 3$, aber $y \neq 3$: Dann muss (damit die erste Komponente Null wird) $5x^4 - 12x^3 + y^4 = 0$ sein. Wir setzen $x = 3$ in diese Gleichung ein und erhalten die Bedingung $y^4 = -5 \cdot 3^4 + 12 \cdot 3^3 = (-1) \cdot 3^4$. Diese ist nicht lösbar mit $y \in \mathbb{R}$. Analog finden wir, dass es keine Lösungen mit $y = 3$ aber $x \neq 3$ gibt.

Es bleibt der Fall $x \neq 3 \neq y$. Dann suchen wir nach Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x^4 - 12x^3 + y^4 &= 0, \\ 5y^4 - 12y^3 + x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Dank des Hinweises wissen wir, dass das letzte System die Lösungen $\binom{0}{0}$ und $\binom{2}{2}$ besitzt — und keine anderen! [Dass $\binom{0}{0}$ und $\binom{2}{2}$ Lösungen sind, ist leicht durch eine Probe zu überprüfen; dass es keine anderen gibt, ist schwierig einzusehen — deswegen gab es ja den Hinweis.]

Die kritischen Stellen sind also $\binom{0}{0}, \binom{2}{2}, \binom{3}{3}$ (orange im Bild).

(d) Aus der vorher untersuchten Vorzeichenverteilung wissen wir, dass $f\binom{x}{y} > 0$ in einer Umgebung von $\binom{0}{0}$. Da $f\binom{0}{0} = 0$, liegt beim Punkt $\binom{0}{0}$ ein lokales Minimum vor. Auswertung liefert

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16 & -32\\-32 & -16\end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}f\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a\\b & 0\end{pmatrix}$$

mit $a = b$ (es ist nicht notwendig, a und b explizit auszurechnen). Bei den Punkten $\binom{2}{2}$ und $\binom{3}{3}$ liegen also Sattelpunkte vor, da $\det \mathrm{H}f\binom{2}{2}$ und $\det \mathrm{H}f\binom{3}{3}$ beide negativ sind (siehe 4.5.8).

(Alternativ kann man mit der Vorzeichenverteilung argumentieren: In jeder Umgebung von $\binom{3}{3}$ gibt es sowohl Stellen, an denen f positive Werte annimmt, als auch solche, an denen f negativ wird. Also muss bei $\binom{3}{3}$ ein Sattelpunkt vorliegen. Dieses Argument greift aber nicht für $\binom{2}{2}$. Wir bemerken, dass das Hesse-Matrix-Kriterium keine Aussage für den Punkt $\binom{0}{0}$ liefert, vgl. Aufgabe P 94. An der Stelle $\binom{0}{0}$ ist deswegen die Argumentation mit der Vorzeichenverteilung sinnvoll.)

Aufgabe H 94. *Optimierung*

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 3xy - 4x$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto y^3 - x$.

(a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

(b) Skizzieren Sie $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid g\binom{x}{y} = 0, x \in [-1, 8]\}$ und die Nullstellenmenge von f.

(c) Finden Sie die kritischen Stellen von f auf M, d.h. die Punkte $\binom{x}{y} \in M$, die die Lagrange-Multiplikator-Bedingung erfüllen.

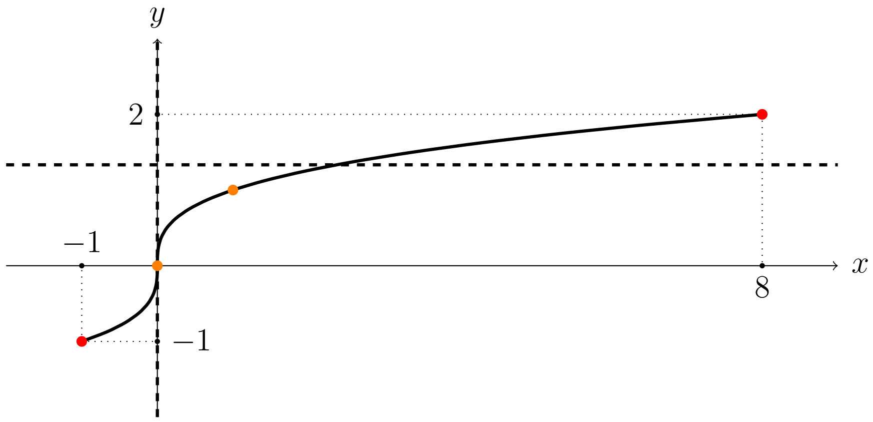
(d) Finden Sie das Minimum und das Maximum von f auf M.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3y-4\\3x\end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3y^2\end{pmatrix}.$$

(b) Da $f\binom{x}{y} = x(3y-4)$, besteht die Nullstellenmenge von f aus den durch $x = 0$ bzw. $y = 4/3$ definierten Geraden. Wir skizzieren die Menge M (durchgezogen) und die Nullstellenmenge von f (gestrichelt).



(c) Wir erstellen das Lagrange-Multiplikator-System und wir lösen es.

$$\begin{cases} g\binom{x}{y} = 0, \\ \operatorname{grad} f\binom{x}{y} \\ \qquad + \lambda \operatorname{grad} g\binom{x}{y} = 0. \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y^3 - x = 0, \\ 3y - 4 - \lambda = 0, \\ 3x + 3\lambda y^2 = 0. \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = y^3, \\ \lambda = 3y - 4, \\ 12y^2(y-1) = 0. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung ist nur für $y \in \{0, 1\}$ erfüllt. In diesen Fällen liefert die erste Gleichung dann $x = y$. Wir unterscheiden die Fälle $y = 0$ und $y = 1$. Die kritischen Stellen sind also $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{1}$; den Wert für λ können wir jedesmal passend wählen.

(d) Die Funktion f besitzt ein Maximum und ein Minimum auf der Menge M, weil M kompakt ist. Das Minimum und das Maximum von f und M müssen bei kritischen Stellen (orange) oder bei Randpunkten (rot) vorliegen. (Randpunkte werden nämlich nicht von der Lagrange-Methode berücksichtigt!) Auswertung liefert

$$f\binom{-1}{-1} = 7, \quad f\binom{0}{0} = 0, \quad f\binom{1}{1} = -1, \quad f\binom{8}{2} = 16.$$

Das Minimum bzw. das Maximum von f auf M werden also an den Stellen $\binom{1}{1}$ bzw. $\binom{8}{2}$ angenommen; das Minimum ist der Punkt $(\binom{1}{1}, -1)$ auf dem Graphen von f, das Maximum ist $(\binom{8}{2}, 16)$.

Aufgabe H 95. *Extremalstellen*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f\binom{x}{y} = 3x^2y + 4x^2 - 19x$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

(b) Finden Sie die kritischen Stellen von f auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Skizzieren Sie die Menge $M := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0 \wedge xy \geqq 1 \wedge 3y \leqq -3x + 10 \right\}$.

(d) Finden Sie das Minimum und das Maximum von f auf M.

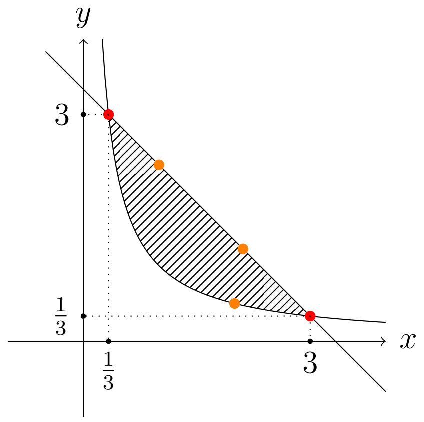
Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy + 8x - 19 \\ 3x^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Komponenten von $\operatorname{grad} f$ können nicht gleichzeitig gleich Null sein. Also besitzt f keine kritischen Stellen auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Die Menge M ist zwischen zwei Graphen enthalten, siehe Bild.



(d) Da f keine kritischen Stellen auf $\mathbb{R}^2$ besitzt, müssen die Extremalstellen von f auf M auf dem Rand von M liegen. Der Rand besteht aus zwei Teilen. Auf jedem Teil wenden wir die Lagrange-Multiplikatoren-Methode an. Wir fangen mit dem Teil an, der in der Nullstellenmenge von $g_1\binom{x}{y} = xy - 1$ enthalten ist.

$$\begin{cases} g_1\binom{x}{y} = 0, \\ \operatorname{grad} f\binom{x}{y} + \lambda \operatorname{grad} g_1\binom{x}{y} = 0. \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} xy - 1 = 0, \\ 6xy + 8x - 19 + \lambda y = 0, \\ 3x^2 + \lambda x = x(3x + \lambda) = 0. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung sehen wir, dass die Fälle $x = 0$ und $\lambda = 3x$ zu unterscheiden sind. Die Gerade $x = 0$ schneidet aber die Menge M nicht. Wir können also ruhig $\lambda = 3x$ und $y = 1/x$ substituieren. Wir bekommen $\binom{x}{y} = \binom{2}{1/2}$.

Nun betrachten wir den in der Nullstellenmenge von $g_2\binom{x}{y} = 3y + 3x - 10$ enthaltenen Teil.

$$\begin{cases} g_2\binom{x}{y} = 0, \\ \operatorname{grad} f\binom{x}{y} + \lambda \operatorname{grad} g_2\binom{x}{y} = 0. \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3y + 3x - 10 = 0, \\ 6xy + 8x - 19 + 3\lambda = 0, \\ 3x^2 + 3\lambda = 0. \end{cases}$$

Wir substituieren $y = -x + 10/3, \lambda = -x^2$ in die zweite Gleichung und erhalten

$$9x^2 - 28x + 19 = 0.$$

Die Mitternachtsformel (oder jede andere Lösungsmethode für quadratische Gleichungen) liefert also die Lösungen $\binom{x}{y} = \binom{1}{7/3}$ und $\binom{19/9}{11/9}$.

Als visuelles Hilfsmittel haben wir die drei gerade gefundenen kritischen Punkten auf dem Bild im Orange hervorgehoben. Außerdem sind auch die Randpunkte $\binom{1/3}{3}$ und $\binom{3}{1/3}$ mögliche Kandidaten als Extremalstellen (auf dem Bild im Rot hervorgehoben). (Randpunkte werden nämlich nicht von der Lagrange-Methode berücksichtigt!)

Auswertung der Funktion f liefert

$$\begin{aligned} f\tbinom{2}{1/2} &= -16, & f\tbinom{19/9}{11/9} &= -1444/243 \in [-6, -5], \\ f\tbinom{1}{7/3} &= -8, & f\tbinom{1/3}{3} &= -44/9 \in [-5, -4], \\ f\tbinom{3}{1/3} &= -12. \end{aligned}$$

Das Minimum bzw. das Maximum von f auf M werden also an den Stellen $\binom{2}{1/2}$ bzw. $\binom{1/3}{3}$ angenommen; das Minimum ist der Punkt $(\binom{2}{1/2}, -16)$ auf dem Graphen von f, das Maximum ist $(\binom{1/3}{3}, -44/9)$.

Aufgabe H 96. *Verlauf einer berühmten Kurve*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto f\binom{x}{y} = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ und die Kurve $B = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid f\binom{x}{y} = 0\}$.

(a) Finden Sie die Schnittpunkte von B mit den Koordinatenachsen und mit dem Einheitskreis.

(b) Berechnen Sie die zugehörigen Tangenten mittels des Gradienten, wo möglich.

(c) Versuchen Sie mit diesen Informationen eine Skizze der Kurve zu entwerfen.

(d) Es seien $F_1 = \binom{-1}{0}$ und $F_2 = \binom{1}{0}$. Überprüfen Sie, dass jeder Punkt P auf der Kurve B die folgende Bedingung erfüllt: $|F_1 - P| \cdot |F_2 - P| = 1$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der einzige Schnittpunkt von B mit der y-Achse ist $\binom{0}{0}$. Für $y = 0$ bekommen wir drei Lösungen, nämlich $\binom{0}{0}$ und $\pm\binom{\sqrt{2}}{0}$. Für $\binom{x}{y} \in B \cap K$, wobei K der Einheitskreis ist, gilt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 1/2. \end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{cases} x^2 = 3/4, \\ y^2 = 1/4. \end{cases}$$

Wir finden also vier weitere Punkte und zwar $\binom{\sqrt{3}/2}{1/2}$, $\binom{\sqrt{3}/2}{-1/2}$, $\binom{-\sqrt{3}/2}{1/2}$, $\binom{-\sqrt{3}/2}{-1/2}$.

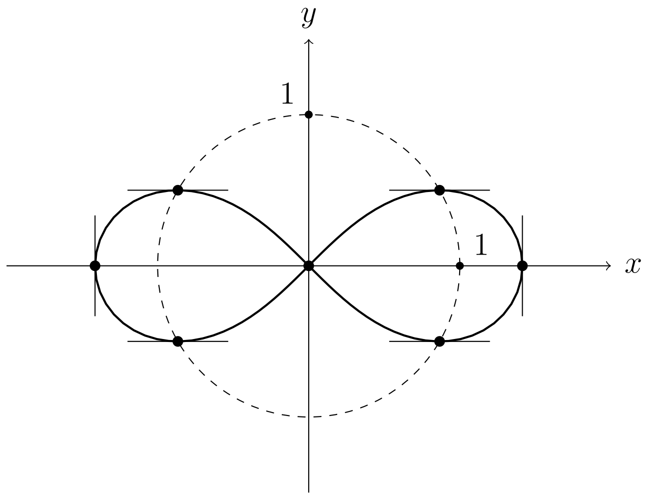
(b) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = 4\begin{pmatrix} x(x^2+y^2-1) \\ y(x^2+y^2+1) \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern daran, dass der Gradient senkrecht zur Tangente steht (4.9.3). Falls $P \in B$ auf der x-Achse liegt, gilt $\operatorname{grad} f(P) = \binom{u}{0}$. Also ist die Tangente parallel zur y-Achse, falls $u \neq 0$. Im Ursprung haben wir tatsächlich $\operatorname{grad} f(P) = \binom{0}{0}$. An dieser Stelle können wir mittels des Gradienten nichts über die Tangente sagen.

Falls $P \in B$ auf dem Einheitskreis K liegt, gilt $\operatorname{grad} f(P) = \binom{0}{v}$ mit $v \neq 0$. Also ist die Tangente an solchen Stellen parallel zur x-Achse.

(c) Die Kurve B heißt *Lemniskate von Bernoulli* (mit Parameter $a = 1$). Wir zeichnen sie mit den Tangenten, die wir gefunden haben.



In der Skizze erkennen wir nachträglich, warum ein Problem mit der Tangentenbestimmung am Punkt $\binom{0}{0}$ auftritt: Weil die Kurve B sich dort selbst überkreuzt, ist die Tangente nicht eindeutig bestimmt.

(d) Falls P ein Punkt mit Koordinaten $\binom{x}{y}$ ist, gilt

$$|F_1 - P| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}, \qquad |F_2 - P| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

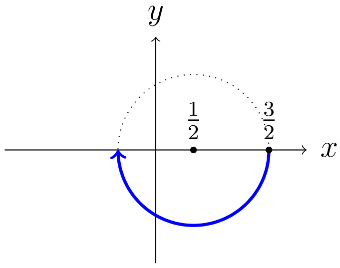
Die Bedingungen $P \in B$ und $|F_1 - P| \cdot |F_2 - P| = 1$ sind äquivalent. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
|F_1 - P| \cdot |F_2 - P| = 1 &\iff \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1 \\
&\iff \big((x+1)^2 + y^2\big) \cdot \big((x-1)^2 + y^2\big) = 1 \\
&\iff (x^2 + y^2 + 1 + 2x) \cdot (x^2 + y^2 + 1 - 2x) = 1 \\
&\iff (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = 1 \\
&\iff (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + 1 - 4x^2 = 1 \\
&\iff (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \\
&\iff P \in B.
\end{aligned}$$

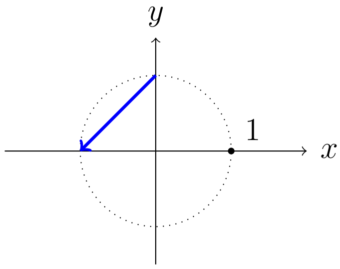
Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 97. *Parametrisierungen*

(a) Geben Sie eine Parametrisierung der folgenden blauen Kurve an.

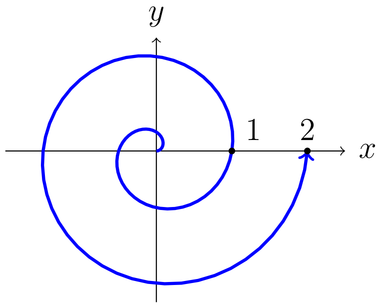


(b) Geben Sie eine Parametrisierung der folgenden blauen Kurve an.



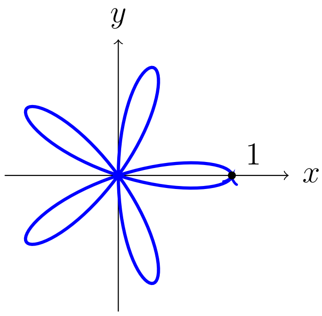
(c) Leiten Sie aus dem Bild die Parameter a und b der blauen Kurve S her.
(Die Kurve heißt *archimedische Spirale*.)

$$S\colon [0,b] \to \mathbb{R}^2\colon \quad t \mapsto \begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \end{pmatrix}.$$



(d) Leiten Sie aus dem Bild die Parameter a und n der blauen Kurve R her.
(Die Kurve heißt *Rosette*.)

$$R\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon \quad t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(nt)\cos t \\ a\cos(nt)\sin t \end{pmatrix}.$$



Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir parametrisieren den Kreis um $\binom{1/2}{0}$ mit Radius 1 im Uhrzeigersinn. Wir umlaufen ihn aber nicht komplett, sondern nur bis zur Hälfte. Also ist die folgende eine mögliche Parametrisierung:

$$C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1/2 + \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

(Beachten Sie: t läuft von 0 bis π, nicht bis 2π — das leistet die Angabe des Definitionsbereiches $[0,\pi]$ für die Abbildung C.)

(b) Wir laufen geradlinig vom $\binom{0}{1}$ bis zu $\binom{-1}{0}$. Also ist die folgende eine mögliche Parametrisierung:

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

(c) Die Kurve schneidet die positive x-Halbachse zweimal, also ist $b = 4\pi$. Für $t = 4\pi$ landen wir im Punkt $\binom{4a\pi}{0}$. Da wir als Endpunkt $C(4\pi)$ der Kurve (laut Skizze) den Punkt $\binom{2}{0}$ erreichen wollen, muss $a = \frac{1}{2\pi}$ sein.

(d) Die Kurve fängt im Punkt $\binom{a}{0}$ an, also ist $a = 1$. Die Kurve läuft fünfmal durch den Ursprung, also muss $n = 5$ sein.

Aufgabe H 98. *Kurvenintegrale*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2^2 \cos(x_1) \\ \exp(x_2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und die Kurven K_1 und K_2, die durch

$$\begin{aligned} C_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \colon \quad & t \mapsto \big(t, 2\pi t, 0\big)^\intercal, \\ C_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \colon \quad & t \mapsto \big(t, t^2, t(t-2\pi)\big)^\intercal \end{aligned}$$

parametrisiert werden.

(a) Entscheiden Sie, ob das Vektorfeld g wirbelfrei ist.

(b) Berechnen Sie jeweils den Anfangs- und den Endpunkt der durch C_1 bzw. C_2 parametrisierten Kurve K_1 bzw. K_2.

(c) Berechnen Sie $\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(d) Berechnen Sie $\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$. Stimmt das Ergebnis überein mit dem aus **(c)**?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt zum Beispiel $\partial_2 g_1 \neq \partial_1 g_2$, also ist das Vektorfeld g nicht wirbelfrei.
(Insbesondere besitzt g kein Potential.)

(b) Die Parametrisierungen C_1 und C_2 haben den gleichen Anfangspunkt $(0,0,0)^\intercal$ und den gleichen Endpunkt $(2\pi, 4\pi^2, 0)^\intercal$.

(c) Es gilt $C_1'(t) = \big(1, 2\pi, 0\big)^\intercal$. Wir benutzen zweimal partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^{2\pi} g(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 4\pi^2 t^2 \cos t \\ \exp(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= 4\pi^2 \int_0^{2\pi} t^2 \cos t \,\mathrm{d}\,t + 2\pi \int_0^{2\pi} \exp(2\pi t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= 4\pi^2 \Big[t^2 \sin t\Big]_0^{2\pi} - 8\pi^2 \Big(- \big[t \cos t\big]_0^{2\pi} + \big[\sin t\big]_0^{2\pi} \Big) + \big[\exp(2\pi t)\big]_0^{2\pi} \\
&= 16\pi^3 + \exp(4\pi^2) - 1.
\end{aligned}$$

(d) Es gilt $C_2'(t) = \big(1, 2t, 2t - 2\pi\big)^\intercal$. Ähnlich wie oben,

$$\begin{aligned}
\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} t^4 \cos t \\ \exp(t^2) \\ t(t-2\pi) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t - 2\pi \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} t^4 \cos t \,\mathrm{d}\,t + 2 \int_0^{2\pi} t \exp(t^2)\,\mathrm{d}\,t + 2 \int_0^{2\pi} t(t-2\pi)(t-\pi)\,\mathrm{d}\,t \\
&= 32\pi^3 - 48\pi + \exp(4\pi^2) - 1.
\end{aligned}$$

Die zwei Integrale sind verschieden, aber das ist kein Wunder. Da das Vektorfeld kein Potential besitzt, kann das Integral vom Weg abhängen und nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt.

Aufgabe H 99. *Kurvenintegral einer reellwertigen Funktion (Pascalsche Schnecke)*
Betrachten Sie die Kurve K mit der folgenden Parametrisierung:

$$C\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2\colon \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} (2\cos t + 1)\cos t \\ (2\cos t + 1)\sin t \end{pmatrix}.$$

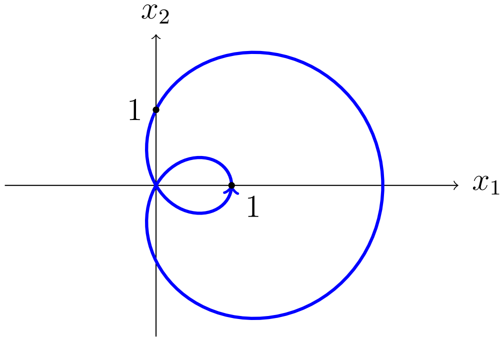
(a) Finden Sie alle $t \in [-\pi, \pi]$, für die der Bildpunkt $C(t)$ auf der x_1- bzw. auf der x_2-Achse liegt. Ist die Parametrisierung C doppelpunktfrei?

(b) Berechnen Sie $|C'(t)|$.

(c) Zeigen Sie, dass die Kurve symmetrisch bezüglich der x_1-Achse ist.

(d) Berechnen Sie $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ mit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_2$.
Hinweis: Statt die übliche Formel 5.4.1 zu verwenden (siehe Bemerkung 5.3.3) kann man auch die Symmetrie der Kurve ausnutzen.

Lösungshinweise hierzu: Die Kurve sieht folgendermaßen aus.



(a) Der Punkt $C(t)$ liegt auf der x_1-Achse falls $(2\cos t + 1)\sin t = 0$, also falls $t \in \{-\pi, -2\pi/3, 0, 2\pi/3, \pi\}$.
Der Punkt $C(t)$ liegt auf der x_2-Achse falls $t \in \{-2\pi/3, -\pi/2, \pi/2, 2\pi/3\}$.
Insbesondere ist $C(2\pi/3) = C(-2\pi/3) = \binom{0}{0}$, also ist C nicht doppelpunktfrei.

(b) Wir berechnen

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -4\cos t \sin t - \sin t \\ 2\cos^2 t + \cos t - 2\sin^2 t \end{pmatrix},$$

also ist

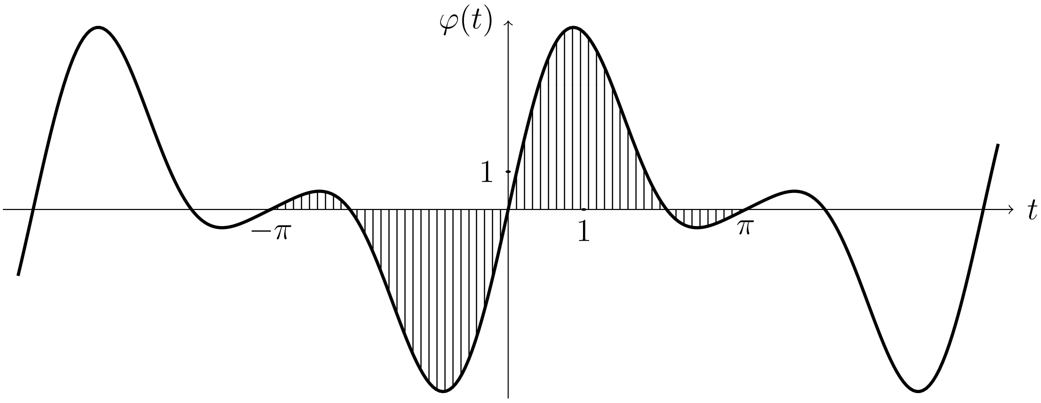
$$\begin{aligned} |C'(t)| &= \sqrt{(-4\cos t \sin t - \sin t)^2 + (2\cos^2 t + \cos t - 2\sin^2 t)^2} \\ &= \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 + 4\cos t(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{4\cos t + 5} \end{aligned}$$

(c) Da $\cos(-t) = \cos t$ und $\sin(-t) = -\sin t$, liegen die Punkte $C(-t)$ und $C(t)$ symmetrisch bezüglich der y-Achse.

(d) Per Definition gilt $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$ mit

$$\varphi(t) = f(C(t))|C'(t)| = (2\cos t + 1)\sin t \cdot \sqrt{4\cos t + 5}.$$

Diese Funktion ist ungerade, das heißt $\varphi(-t) = \varphi(t)$. Weil das Parameterintervall $[-\pi, \pi]$ symmetrisch zu 0 liegt, impliziert dies $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$. (Siehe Bild.)



Alternativ kann man durch Substitution $u = 4\cos t + 5$ eine Stammfunktion Φ von φ finden, z. B.

$$\Phi(t) = \frac{1}{5}\cos t(4\cos t + 5)^{3/2}.$$

Aufgabe H 100. *Potential*

Gegeben ist das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2x_3 - 1 \\ x_1x_3 - 1 \\ x_1x_2 - 1 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten die Kurven K_1 und K_2, die durch

$$\begin{aligned} &C_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon &&t \mapsto \left(2t, -t, -t\right)^\intercal, \\ &C_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon &&t \mapsto \left((2\cos t + 1)\cos t, (2\cos t + 1)\sin t, t(t - 2\pi)\right)^\intercal. \end{aligned}$$

parametrisiert werden.

(a) Entscheiden Sie, ob das Vektorfeld g quellen- bzw. wirbelfrei ist.

(b) Besitzt g ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

(c) Berechnen Sie $\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(d) Bestimmen Sie $\oint_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man sieht, dass $\operatorname{div} g = 0$ und $\operatorname{rot} g = 0$. Also ist g ist sowohl quellen- als auch wirbelfrei.

(b) Da g wirbelfrei und $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, muss es ein Potential $U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für g geben (Satz 5.2.4). Um ein explizites Potential U zu finden, untersuchen wir die Bedingung $\operatorname{grad} U = g$. Durch Integration der ersten Komponente finden wir einen Ansatz für $U(x_1, x_2, x_3)$:

$$\partial_{x_1} U = x_2 x_3 - 1 \implies U(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - x_1 + W(x_2, x_3).$$

Nun betrachten wir die zweite Komponente.

$$\partial_{x_3} U = x_1 x_3 - 1 \implies x_1 x_3 + \partial_{x_2} W(x_2, x_3) = x_1 x_3 - 1 \implies W(x_2, x_3) = -x_2 + V(x_3)$$

Das heißt, $U(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_2 + V(x_3)$. Schließlich fassen wir die dritte Komponente ins Auge.

$$\partial_{x_3} U = x_1 x_2 - 1 \implies x_1 x_2 + \partial_{x_3} V(x_3) = x_1 x_2 - 1 \implies V(x_3) = -x_3 + k.$$

Die Konstante k können wir beliebig wählen. Wir setzen einfach $k = 0$. Ein Potential für g ist also gegeben durch

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_2 - x_3.$$

(Es empfiehlt sich immer eine Probe.)

(c) Da es ein Potential gibt, hängt das Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt ab (Satz 5.3.10). Wir erhalten den Wert als Potentialdifferenz:

$$\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = U(C_1(1)) - U(C_1(0)) = U(2, -1, -1) - U(0, 0, 0) = 2.$$

Alternativ kann man das Integral direkt ausrechnen. Wir haben $C_1'(t) = (2, -1, -1)^\intercal$, also

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 g(C_1(t)) \bullet C_1'(t) \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ -2t^2 - 1 \\ -2t^2 - 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= 6 \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}\,t = 2.
\end{aligned}$$

(d) Aus dem gleichen Grund (Satz 5.3.10) gilt $\oint_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0$.
Alternativ könnte man das Integral direkt ausrechnen, aber das ist sehr mühsam.

Aufgabe H 101. *Wirbelfeld*

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$w_a \colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2 \colon \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2\pi(u^2+v^2)^a} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von w_a.

(b) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld w_a quellen- bzw. wirbelfrei?

Wir setzen nun $a = 1$ und schreiben w statt w_a. Es sei K der Kreis um $\binom{0}{0}$ mit Radius 1, einmal gegen den Uhrzeigersinn umlaufen.

(c) Berechnen Sie $\oint_K w(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(d) Besitzt das Vektorfeld w ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

[Das Integral in **(c)** ist gleich einer ganzen Zahl. Das Vektorfeld w ist tatsächlich ein spezielles Vektorfeld und heißt *Wirbelfeld*. Für jede Parametrisierung C, deren Bild den Ursprung nicht enthält, ist das Integral $\oint_C w \bullet \mathrm{d}\,x$ eine ganze Zahl und hängt nur davon ab, wie oft die Parametrisierung C um den Ursprung umläuft. Deshalb wird sie auch *Umlaufzahl* der Parametrisierung C genannt.]

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\mathrm{J}w_a(u,v) = \frac{1}{2\pi(u^2+v^2)^{a+1}} \begin{pmatrix} 2auv & -u^2+(2a-1)v^2 \\ (1-2a)u^2+v^2 & -2auv \end{pmatrix}$$

(b) Das Vektorfeld w_a ist quellenfrei für jedes $a \in \mathbb{R}$. Das Vektorfeld w_a ist genau dann wirbelfrei, wenn $a = 1$.

(c) Wir benutzen die herkömmliche Parametrisierung:

$$C \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \oint_C w(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^{2\pi} w(C(t)) \bullet C'(t) \,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \,\mathrm{d}\,t = 1. \end{aligned}$$

(d) Da $\int_C w(x) \bullet \mathrm{d}\,x \neq 0$, besitzt w kein Potential (5.3.14).

(Passen Sie auf: Das Vektorfeld w ist zwar wirbelfrei, aber $\mathbb{R} \smallsetminus \{\binom{0}{0}\}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Deshalb kann man Satz 5.2.4 hier nicht anwenden.)

Aufgabe H 102. *Quellenfeld*

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_a \colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2 \colon \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von g_a.

(b) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld g_a quellen- bzw. wirbelfrei?

Sei K der Einheitskreis (einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen).

(c) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g_a, K)$ von g_a längs K in Abhängigkeit von a.

(d) Berechnen Sie den Ausfluss $A(g_a, K)$ von g_a durch K in Abhängigkeit von a.

Zusatz: Für welches $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld g_a ein Potential?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\mathrm{J}g_a = \frac{1}{(x^2+y^2)^{a+1}} \begin{pmatrix} (1-2a)x^2+y^2 & -2axy \\ -2axy & x^2+(1-2a)y^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Das Vektorfeld g_a ist genau dann quellenfrei, wenn die Summe der Diagonaleinträge von $\mathrm{J}g_a$ gleich 0 ist, also wenn $a = 1$.

Das Vektorfeld g_a ist genau dann wirbelfrei, wenn $\mathrm{J}g_a$ eine symmetrische Matrix ist, also für jedes $a \in \mathbb{R}$.

(c) Wir benutzen die übliche Parametrisierung $C(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$. Es gilt

$$Z(g_a, K) = \int g_a(C(t)) \bullet C'(t) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 0.$$

(d) Es gilt

$$A(g_a, K) = \int g_a(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = 2\pi.$$

Wir bemerken, dass weder die Zirkulation noch der Ausfluss von a abhängen.

Zusatz: Das Vektorfeld g_a besitzt ein Potential für jedes $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $U_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ gegeben durch

$$U_a(x,y) = -\frac{1}{2(a-1)(x^2+y^2)^{a-1}}$$

erfüllt nämlich $\operatorname{grad} U_a = g_a$. Falls $a = 1$ hat g_a das folgende Potential

$$U_1(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

(Passen Sie auf: Hier kann man nicht mit Satz 5.2.4 argumentieren, da $\mathbb{R} \setminus \{\binom{0}{0}\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Trotzdem haben wir ein Potential gefunden.)

Aufgabe H 103. *Potential und Kurvenintegral*

In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}^+$ sind das Vektorfeld v_b und die durch C_γ parametrisierte Kurve K_γ gegeben:

$$v_b \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_3^2 + x_3 \\ 1 + 6x_2x_3 + bx_2 \end{pmatrix},$$

$$C_\gamma \colon [0,\gamma] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto (2\sin t, \cos(2t), \cos t)^\mathsf{T}.$$

(a) Finden Sie ein b so, dass v_b ein Potential besitzt und berechnen Sie ein Potential.

(b) Finden Sie das kleinstmögliche (positive) γ so, dass die Kurve K_γ geschlossen ist.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_\pi} v_1(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_\pi} v_0(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

Hinweis: Die Identitäten $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ und $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ könnten helfen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\operatorname{rot}(v_b) = (b-1, 0, 0)^\intercal$. Notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials ist, dass die Rotation gleich null ist. Dies ist auch eine hinreichende Bedingung, da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist. Ein Potential existiert also genau dann, wenn $b = 1$. Um ein explizites Potential U zu finden, untersuchen wir die Bedingung $\operatorname{grad} U = g$. Durch Integration der ersten Komponente finden wir einen Ansatz für $U(x_1, x_2, x_3)$:

$$\partial_{x_1} U = 2x_1 \implies U(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + W(x_2, x_3).$$

Nun betrachten wir die zweite Komponente.

$$\begin{aligned} \partial_{x_2} U = 3{x_3}^2 + x_3 \quad &\implies \partial_{x_2} W(x_2, x_3) = 3{x_3}^2 + x_3 \\ &\implies W(x_2, x_3) = 3x_2{x_3}^2 + x_2 x_3 + V(x_3) \end{aligned}$$

Das heißt, $U(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 3x_2{x_3}^2 + x_2x_3 + V(x_3)$. Schließlich fassen wir die dritte Komponente ins Auge.

$$\begin{aligned} \partial_{x_3} U(x_1, x_2, x_3) = 1 + 6x_2x_3 + x_2 \quad &\implies 6x_2x_3 + x_2 + \partial_{x_3} W(x_3) = 1 + 6x_2x_3 + x_2 \\ &\implies W(x_3) = x_3 + k. \end{aligned}$$

Die Konstante k können wir beliebig wählen. Wir setzen einfach $k = 0$. Ein Potential für g ist also gegeben durch

$$U(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 3x_2{x_3}^2 + x_2x_3 + x_3.$$

(Es empfiehlt sich immer eine Probe.)

(b) Für $\gamma = 0$ erhalten wir $C_\gamma(\gamma) = C_\gamma(0) = (0, 1, 1)^\intercal$. Die Nullstellenmenge der ersten Komponente von C_γ ist $\mathcal{A}_1 = \{x = k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$; die zweite Komponente wird wieder 1 in $\mathcal{A}_2 = \{x = \pi k \mid k \in \mathbb{N}\}$ und die dritte Komponente nimmt den Wert 1 wieder in $\mathcal{A}_3 = \{x = 2\pi k \mid k \in \mathbb{N}\}$ an. Das gesuchte γ ist der kleinste Wert in $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$. Also $\gamma = 2\pi$.

(c) Wir setzen hier $b = 1$. Aus **(a)** kennen wir ein explizites Potential. Wir setzen 0 beziehungsweise π in unsere Parametrisierung ein und erhalten als Anfangs- bzw. Endpunkt $x_a = (0, 1, 1)^\intercal$, $x_e = (0, 1, -1)^\intercal$. Dies ergibt

$$\int_{K_\pi} v_b(x)\, \mathrm{d}\, x = U(x_e) - U(x_a) = 1 - 5 = -4.$$

(d) Wir setzen hier $b = 0$. Wir berechnen

$$C'_\pi(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin 2t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{K_\pi} v_b(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^\pi v_b\left(C_\pi(t)\right) \bullet C'_\pi(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 4\sin t \\ 3\cos^2(t)+\cos t \\ 1+6\cos 2t\cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin 2t \\ -\sin t \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi 8\sin t\cos t\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi -6\cos^2 t\sin 2t\,\mathrm{d}\,t \\
&\quad + \int_0^\pi -2\sin 2t\cos t\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi -\sin t\,\mathrm{d}\,t \\
&\quad + \int_0^\pi -6\cos 2t\sin t\cos t\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}$$

Von dieser Summe sind der erste, der zweite und der fünfte Integrand punktsymmetrisch zum Punkt $\pi/2$, was (wegen der Symmetrie des Paramterintervalls zu $\pi/2$) bedeutet, dass diese Integrale gleich null sind. Offensichtlich ist

$$\int_0^\pi -\sin t\,\mathrm{d}\,t = -2.$$

Für das verbleibende Integral verwenden wir den Hinweis. Also haben wir

$$\int_0^\pi -2\sin 2t\cos t\,\mathrm{d}\,t = -4\int_0^\pi \cos^2(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t.$$

Durch die Substitution $u=\cos t$ folgt

$$-4\int \cos^2(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t = \int 4u^2\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{4}{3}u^3\right]$$

und damit

$$\int_0^\pi -2\sin 2t\cos t\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{4}{3}\cos^3(t)\right]_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$

Also haben wir

$$\int_{K_\pi} v_b(x)\,\mathrm{d}\,x = -2-\frac{8}{3} = -\frac{14}{3}.$$

Aufgabe H 104. *Harmonische Funktionen*

(a) Finden Sie jeweils das größte Definitionsgebiet $D \subsetneqq \mathbb{R}^2$ für die reellwertigen Funktionen, die durch die folgenden Funktionsterme gegeben sind:

(i) $H\binom{x}{y} = \exp(x)\sin(y)$.

(ii) $L\binom{x}{y} = \ln(x^2+y^2)$.

(b) Entscheiden Sie, ob die Funktion H aus **(a)** harmonisch ist.

(c) Entscheiden Sie, ob die Funktion L aus **(a)** harmonisch ist.

(d) Verwenden Sie die Parametrisierung $C\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{\cos t}{\sin t}$ des Einheitskreises K, um

$$\frac{1}{2\pi}\int_K H(s)\,\mathrm{d}\,s$$

zu berechnen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** $D = \mathbb{R}^2$.

(ii) $D = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\binom{0}{0}\}$.

(b,c) Es genügt, den Laplace-Operator Δ bei H bzw. L auszuwerten, also ΔH und ΔL auszurechnen. Es stellt sich heraus, dass sowohl H als auch L harmonisch ist. Wir haben nämlich:

(i)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \exp x \sin y, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\exp x \sin y.$$

(ii)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2\,(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die Summe der angegebenen zweiten Ableitungen ist jeweils gleich Null.

(d) Es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_C H(s) \,\mathrm{d}\, s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(C(t))|C'(t)| \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \,\mathrm{d}\, t$$

mit

$$\varphi(t) = \exp(\cos t) \sin(\sin t).$$

Wir bemerken, dass die Funktion φ ungerade ist, sprich

$$\varphi(-t) = \exp(\cos(-t)) \sin(\sin(-t)) = \exp(\cos t) \sin(-\sin t) = -\varphi(t).$$

Deshalb ist $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \,\mathrm{d}\, t = 0$. Wir erhalten also

$$\frac{1}{2\pi} \int_K H(s) \,\mathrm{d}\, s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \,\mathrm{d}\, t = 0.$$

Als visuelle Hilfe zeichnen wir die Funktion φ.