T. Holicki, R. Schmähl,
A. Zvonareva

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2021

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 49. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

(a) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ so, dass $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(c) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

(d) Ist g stetig im Punkt $x_0 = 0$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Folge mit Folgengliedern $a_n := -\frac{1}{n}$ erfüllt offenbar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n} = 0.$$

(b) Die Folge mit Folgengliedern $b_n := \frac{1}{n}$ erfüllt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, aber

$$f(b_n) = \mathrm{e}^n \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

(c) Wäre f stetig in $x_0 = 0$, dann müsste nach Definition 1.10.3 auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ gelten, da die Folgen (a_n) und (b_n) beide gegen 0 konvergieren für n gegen unendlich. Nach den Teilen (a) und (b) ist dies aber nicht der Fall und somit ist f nicht stetig in 0.

(d) Sei $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig. Wir setzen $\delta := \frac{1}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} > 0$ und beobachten, dass dann für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| < \delta$ gilt

$$|g(x) - g(0)| = |\exp(-\tfrac{1}{|x|})| = \exp(-\tfrac{1}{|x|}) = \frac{1}{\exp(\frac{1}{|x|})} < \frac{1}{\exp(\frac{1}{\delta})} = \frac{1}{\exp(\ln(\frac{1}{\varepsilon}))} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Die Ungleichung folgt hierbei aus der Monotonie der Exponentialfunktion. Damit ist g stetig im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe H 50. *Majoranten- und Minorantenkriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie eine geeignete Majorante oder Minorante finden.

(a) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+4}{j^2 - 3j + 1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{3\ell}{\ell^3 + 1}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^m}{m!\,\pi^m}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt zum Beispiel

$$\frac{j+4}{j^2-3j+1} \geqq \frac{j}{j^2-3j+1} \geqq \frac{j}{j^2} = \frac{1}{j} \quad \text{für alle} \quad j \geqq 3.$$

Daher bildet die (harmonische) Reihe $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j}$ eine Minorante von $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+4}{j^2-3j+1}$. Weiter haben wir bereits in Beispiel 1.8.5 festgehalten, dass die Reihe $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergiert und somit muss auch $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+4}{j^2-3j+1}$ divergieren.

(b) Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+k} \\ &= \frac{k+1-k}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+k} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+k} \geqq \frac{1}{2k+1} \geqq \frac{1}{3k}\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher bildet die (skalierte harmonische) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k}$ eine Minorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$. Weiter haben wir bereits in Beispiel 1.8.5 festgehalten, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k}$ divergiert und somit muss auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$ divergieren.

(c) Es gilt zum Beispiel

$$\left|\frac{3\ell}{\ell^3+1}\right| = \frac{3\ell}{\ell^3+1} \leqq \frac{3\ell}{\ell^3} = 3\frac{1}{\ell^2} \quad \text{für alle} \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Damit bildet die Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} 3\frac{1}{\ell^2}$ eine Majorante von $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{3\ell}{\ell^2+1}$. Weiter wissen wir aus Beispiel 1.8.2 (und 1.9.3), dass die Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} 3\frac{1}{\ell^2}$ konvergent ist. Somit ist nach dem Majoranten-Kriterium die Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{3\ell}{\ell^2+1}$ konvergent (und absolut konvergent).

(d) Da $\mathrm{e} < \pi$ ist, gilt zum Beispiel

$$\left|\frac{\mathrm{e}^m}{m!\;\pi^m}\right| = \frac{\mathrm{e}^m}{m!\;\pi^m} \leqq \frac{1}{m!} \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Damit bildet die (exponential) Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$ eine Majorante von $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^m}{m!\;\pi^m}$. Weiter wissen wir bereits aus Beispiel 1.8.6, dass die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$ konvergent ist. Somit ist nach dem Majoranten-Kriterium auch die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^m}{m!\;\pi^m}$ konvergent (und absolut konvergent).

Aufgabe H 51. *Konvergenzuntersuchung*

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\displaystyle\sum_{k=7}^{\infty} \frac{(7x)^{7k}}{k^7}$ konvergiert.

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten vier Fälle.

- *Fall 1:* $|x| < \frac{1}{7}$*:* Wir wollen das Wurzelkriterium benutzen und beobachten, dass wegen den Grenzwertsätzen

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(7x)^{7k}}{k^7}\right|} = \lim_{k\to\infty} 7^7|x|^7 \frac{1}{\sqrt[k]{k^7}} = 7^7|x|^7 \frac{1}{\left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\right)^7} = 7^7|x|^7 < 1$$

  erfüllt ist, denn aus Beispiel 1.5.10 wissen wir bereits, dass $\lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{k}) = 1$ gilt. Somit ist die Reihe in diesem Fall (absolut) konvergent nach dem Wurzelkriterium.

- *Fall 2:* $|x| > \frac{1}{7}$*:* Wir wollen wieder das Wurzelkriterium benutzen und beobachten, dass analog

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(7x)^{7k}}{k^7}\right|} = \lim_{k\to\infty} 7^7|x|^7 \frac{1}{\sqrt[k]{k^7}} = 7^7|x|^7 \frac{1}{\left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\right)^7} = 7^7|x|^7 > 1$$

  folgt. Somit ist die Reihe in diesem Fall divergent nach dem Wurzelkriterium.

- *Fall 3:* $x = \frac{1}{7}$*:* In diesem Fall vereinfacht sich die Reihe zu $\sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{k^7}$. In Beispiel 1.9.11 haben wir schon gesehen, dass diese Reihe konvergent ist.

- *Fall 4:* $x = -\frac{1}{7}$*:* In diesem Fall vereinfacht sich die Reihe zu $\sum_{k=7}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^7}$. Man kann nun die Konvergenz zum Beispiel aus dem Leibniz-Kriterium folgern oder bemerken, dass $\sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{k^7}$ offenbar eine konvergente Majorante bildet.

Insgesamt erhalten wir also, dass die angegebene Reihe für alle $x \in [-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}]$ konvergiert.

Aufgabe H 52. *Raabesches Konvergenzkriterium*

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gebe es ein $\beta > 1$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq 1 - \frac{\beta}{n+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $b_n := na_n$ monoton fällt.

(b) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ konvergiert. *Hinweis:* Teleskopsumme.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta-1}(b_n - b_{n+1})$ eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bildet.

(d) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Voraussetzung gilt

$$b_{n+1} = (n+1)a_{n+1} \leqq (n+1-\beta)a_n \overset{\beta>1}{\leqq} na_n = b_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

und somit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

(b) Wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusätlich nach unten beschränkt ist, konvergiert diese Folge gegen einen Wert b_* (1.6.5, Satz von Bolzano und Weierstraß). Die angebene Reihe involviert nun offenbar eine Teleskopsumme, weshalb wir folgern können, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1} = \lim_{k\to\infty} -\sum_{n=1}^{k}(b_{n+1} - b_n) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \lim_{k\to\infty} -(b_{k+1} - b_1) = b_1 - b_*.$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$ damitkonvergent.

(c) Wie in Teil (a) folgt aus den Voraussetzungen, dass

$$b_n = na_n = (n+1-\beta)a_n + (\beta-1)a_n \geqq b_{n+1} + (\beta-1)a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $\beta > 1$ liefer dies

$$\frac{1}{\beta-1}(b_n - b_{n+1}) \geqq \frac{1}{\beta-1}(\beta-1)a_n = a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit bildet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta-1}(b_n - b_{n+1})$ eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(d) Wegen den Grenzwertsätzen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta-1}(b_n - b_{n+1})$ konvergent und nach dem Majoranten-Kriterium muss dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent sein.

Frischhaltebox

Aufgabe H 53. *Vollständige Induktion und Konvergenz*

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
Hinweis: Beispiel 1.2.2 aus dem LA Skript kann hier und in Teil **(d)** helfen.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$.

IH Wir nehmen an, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} \overset{\text{IH}}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ = \frac{(n+1)}{6}\big(6(n+1) + n(2n+1)\big) = \frac{(n+1)}{6}\big(7n + 6 + 2n^2\big) \\ = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{[n+1]([n+1]+1)(2[n+1]+1)}{6}.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Wegen Teil (a) und den Grenzwersätzen 1.5.3 und 1.5.4 folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\left(2+\tfrac{1}{n}\right) = \frac{2}{2} = 1.$$

(c) In dem genannten Beispiel ist gezeigt, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir zeigen nun die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es ist $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = 1^2 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$.

IH Wir nehmen an, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

IS : Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&\overset{\text{IH}}{=} (n+1)^2 + (n+1)^2 n + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} (n+1)^2 + 2(n+1)\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\
&= \left((n+1) + \sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(d) Wegen Teil (c) und den Grenzwertsätzen 1.5.3 und 1.5.4 folgt

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\frac{n^2(n+1)^2}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 54. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2+2x}-2x$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan(5x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos(10x^{10})}{\sqrt[10]{x}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2+2x}-2x &= \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{4x^2+2x}-2x)\cdot \frac{\sqrt{4x^2+2x}+2x}{\sqrt{4x^2+2x}+2x}\\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2+2x-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x}+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+2x}+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{4+2\frac{1}{x}}+2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan(5x)} \overset{u=5x}{=} \lim_{u\to 0} \frac{1}{5}\frac{u}{\tan(u)} = \frac{1}{5},$$

denn wir haben in Beispiel 1.12.5 gesehen, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. Damit gilt auch $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan(x)} = 1$ nach den Grenzwertsätzen 1.12.1.

(d) Es gilt $|\cos(10x^{10})| \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher

$$0 \leqq \left|\frac{\cos(10x^{10})}{\sqrt[10]{x}}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt[10]{x}} \quad \text{für alle} \quad x > 0.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[10]{x}} = 0$ folgt daher $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos(10x^{10})}{\sqrt[10]{x}} = 0$ mit einem Sandwich-Argument.

Aufgabe H 55. *Intervallhalbierungsmethode*

Gegeben sei die stetige Funktion $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos\left(\dfrac{4\pi}{x-4}\right)$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

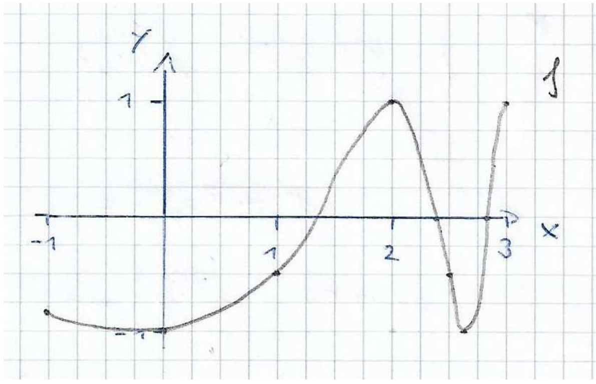
(b) Zeigen Sie, dass f im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt.

(c) Finden Sie mittels der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall $I = [a,b]$, das diese Nullstelle enthält und $b-a < 0{,}1$ erfüllt.

Hinweis: Funktionswerte dürfen elektronisch näherungsweise bestimmt werden.

Lösungshinweise hierzu:

(a)



(b) Es gelten $f(0) = \cos(-\pi) = -1 < 0$ und $f(2) = \cos(-2\pi) = 1 > 0$. Da f stetig ist, liefert der Nullstellensatz von Bolzano die Existenz von (mindestens) einer Nullstelle von f in dem Intervall $[0, 2]$.

Für die Eindeutigkeit der Nullstelle benötigen wir weitere Argumente. Zum Beispiel kann man schon anhand der Skizze erahnen, dass f auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton wächst, was die Eindeutigkeit liefern würde. Wir können aber auch benutzen, dass wir die Nullstellen der Cosinus-Funktion schon gut kennen:

Seien $x, y \in [0, 2]$ mit $f(x) = 0 = f(y)$. Dann gilt also

$$0 = \cos\left(\frac{4\pi}{x-4}\right) \quad \text{und daher} \quad \frac{4\pi}{x-4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \text{also} \ \frac{4}{x-4} = \frac{1}{2} + k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $x \in [0, 2]$ folgt $\frac{4}{x-4} \in [-2, -1]$ und somit ist k eindeutig gegeben durch $k = -2$. Für y argumentieren wir genauso und erhalten

$$\frac{4}{x-4} = -\frac{3}{2} = \frac{4}{y-4}.$$

Nach ein paar weiteren Umformung liefert dies $y = x$ und somit die Eindeutigkeit der Nullstelle.

Bemerkung: Weil die Funktion so explizit gegeben ist, können wir hier prinzipiell die Nullstelle sogar exakt bestimmen als $x = \frac{4}{3}$. Bei weniger freundlichen Funktionen braucht man elektronische Hilfsmittel zur näheren Bestimmung der Nullstelle, wie im nächsten Aufgabenteil illustriert.

(c) Wir wenden die Intervallhalbierungsmethode an und starten mit $a_1 = 0$ und $b_1 = 2$. Dies liefert sukzessive:

$$f(a_1)f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \approx 0.5 > 0 \text{ und daher } a_2 := 1 \text{ und } b_2 := 2.$$

$$f(a_2)f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) \approx -0.1545 < 0 \text{ und daher } a_3 := 1 \text{ und } b_3 := 1.5.$$

$$f(a_3)f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) \approx 0.0712 > 0 \text{ und daher } a_4 := 1.25 \text{ und } b_4 := 1.5.$$

$$f(a_4)f\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right) \approx -0.0106 < 0 \text{ und daher } a_5 := 1.25 \text{ und } b_5 := 1.375.$$

$$f(a_5)f\left(\frac{a_5+b_5}{2}\right) \approx 0.0052 > 0 \text{ und daher } a_6 := 1.3125 \text{ und } b_6 := 1.375.$$

Wegen $b_6 - a_6 = 0.0625$, enthält das Intervall $I = [a_6, b_6]$ die gesuchte Nullstelle mit der gewünschten Genauigkeit.

Aufgabe H 56. *Umkehrfunktion*

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$

(a) Begründen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wächst.

(c) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(d) Bestimmen Sie f^{-1} explizit.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktionen $x \mapsto 2x$ und $x \mapsto 1-x^2$ sind beide stetig auf dem Intervall $(-1,1)$. Weiter wird letztere Funktion nie Null auf diesem Intervall, sodass der Quotient der beiden Funktionen stetig nach Satz 1.12.4 ist.

(b) Seien $x, y \in (-1,1)$ mit $x < y$ beliebig. Dann gelten insbesondere $|x| < 1$ und $|y| < 1$ und somit

$$1-x^2 > 0, \quad 1-y^2 > 0 \quad \text{und} \quad 1+xy \geqq 1-|xy| > 0.$$

Damit ist $f(x) = \frac{2x}{1-x^2} < \frac{2y}{1-y^2} = f(y)$ äquivalent zu

$$x(1-y^2) < y(1-x^2).$$

Letzteres ist nun immer wahr, denn

$$x(1-y^2)-y(1-x^2) = x-xy^2-y+yx^2 = (x-y)+yx(x-y) = \underbrace{(x-y)}_{<0}\cdot\underbrace{(1+yx)}_{>0} < 0.$$

Alternative: Mit der Quotientenregel 2.2.1.4 gilt

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)-(-2x)2x}{(1-x^2)^2} = 2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0 \text{ für alle } x \in (-1,1).$$

Aus Satz 2.4.8 folgt daher, dass f streng monoton steigend ist.

(c) Da f stetig und streng monoton ist, liefert Satz 1.13.11 die Injektivität und es bleibt nur die Surjektivität von f zu zeigen.

Sei also $y \in \mathbb{R}$ beliebig und wir suchen ein $x \in (-1,1)$ mit $f(x) = y$. Wir betrachten dazu zwei Fälle:

- *Fall 1: $y = 0$:* In diesem Fall erfüllt $x = 0 \in (-1,1)$ trivialerweise $f(x) = 0 = y$.
- *Fall 2: $y \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$:* Umformen der Gleichung $f(x) = y$ liefert

$$yx^2 + 2x - y = 0.$$

Durch Einsetzen in die übliche Formel bekommen wir zwei Lösungen dieser Gleichung $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4y^2}}{2y} = \frac{-1\pm\sqrt{1+y^2}}{y}$. Es bleibt noch zu prüfen, ob eine dieser Lösungen tatsächlich in dem Intervall $(-1,1)$ liegt, also ob ihr Betrag kleiner als eins ist. Dazu hier zwei verschiedene Möglichkeiten:

– Es gilt

$$\left|\frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}\right| = \left|\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y}\frac{\sqrt{1+y^2}+1}{\sqrt{1+y^2}+1}\right| = \left|\frac{1+y^2-1}{y(\sqrt{1+y^2}+1)}\right|$$
$$= \frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}+1} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}}_{>1}+\underbrace{\frac{1}{|y|}}_{>0}} < 1$$

– Ausgehend von der wegen $y\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ immer wahren Ungleichung $\sqrt{1+y^2}>1$ betrachten wir die Äquivalenzkette

$$\begin{array}{rrcl} & 1 & < & \sqrt{1+y^2} \\ \iff & -2 & > & -2\sqrt{1+y^2} \\ \iff & y^2 & > & 2+y^2-2\sqrt{1+y^2} \\ \iff & 1 & > & \frac{2+y^2-2\sqrt{1+y^2}}{y^2} = \frac{1-2\sqrt{1+y^2}+(1+y^2)}{y^2} = \left|\frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}\right|^2 \\ \iff & 1 & > & \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} > -1 \\ \iff & & & \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} \in (-1,1) \end{array}$$

Demzufolge erfüllt $x := \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}$ die Gleichung $f(x)=y$ und $x\in(-1,1)$.

Da y beliebig war, folgt die Surjektivität von f.

Alternative: Da $x\mapsto 1-x^2$ stetig auf $[-1,1]$ ist mit $1-x^2>0$ für alle $x\in(-1,1)$ und $1-x^2=0$ für $x\in\{-1,1\}$, erhalten wir

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow -1} f(x) = -\infty.$$

Sei nun $y\in\mathbb{R}$ beliebig. Nach Definition 1.11.3 gibt es nun

- ein $\delta_+>0$ so, dass $b:=\max\{1-\delta_+,0.5\}\in(-1,1)$ die Ungleichung $f(b)>y$ erfüllt und
- ein $\delta_->0$ so, dass $a:=\min\{-1+\delta_-,-0.5\}\in(-1,1)$ die Ungleichung $f(a)<y$ erfüllt.

Wegen $a<b$, $y\in[f(a),f(b)]$ und da f offenbar auch stetig auf $[a,b]$ ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz 1.13.6 nun ein $x\in[a,b]\subsetneq(-1,1)$ mit $f(x)=y$.

(d) Das haben wir in Teil (c) im Prinzip schon gemacht. Mit den dortigen Überlegungen erhalten wir

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}\to(-1,1)\colon\ f^{-1}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y=0 \\ \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} & \text{für } y\neq 0. \end{cases}$$

Aufgabe H 57. *Eine unstetige Umkehrfunktion*

Wir betrachten die Funktion

$$g\colon (-1,0]\cup(1,2)\to(-1,1)\colon g(x) = \begin{cases} x & \text{für } x\in(-1,0] \\ x-1 & \text{für } x\in(1,2) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass g stetig, bijektiv und streng monoton wachsend ist.

(b) Zeigen Sie, dass g^{-1} *nicht* stetig ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zum Abkürzen setzen wir $M := (-1,0] \cup (1,2)$.

- *Stetigkeit:* Sei zuerst $x_0 \in (-1,0]$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wählen wir $\delta := \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$. Nun gilt für jedes $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $x \in (-1,0]$. Damit bekommen wir
$$|g(x) - g(x_0)| = |x - x_0| < \delta \leqq \varepsilon.$$
Also ist g stetig auf $(-1,0]$. Die Stetigkeit von g auf $(1,2)$ folgt quasi genauso.
- *Strenge Monotonie:* Seien $x, y \in M$ mit $x < y$ beliebig. Wir betrachten vier Fälle:
  - *Fall 1: $x, y \in (-1,0]$:* In diesem Fall ist $g(x) = x < y = g(y)$.
  - *Fall 2: $x, y \in (1,2)$:* In diesem Fall ist $g(x) = x - 1 < y - 1 = g(y)$.
  - *Fall 3: $x \in (-1,0]$ und $y \in (1,2)$:* In diesem Fall ist $g(x) = x < y - 1 = g(y)$.
  - *Fall 4: $x \in (1,2)$ und $y \in (-1,0]$:* Dieser Fall kann wegen $x < y$ nicht auftreten.

  Insgesamt bekommen wir also, dass g streng monoton wächst.
- *Injektivität:* Folgt aus Satz 1.13.11.
- *Surjektivität:* Sei $y \in (-1,1)$ beliebig und wir suchen $x \in M$ mit $g(x) = y$. Dazu betrachten wir zwei Fälle:
  - *Fall 1: $y \in (-1,0]$:* Dann ist $g(x) = y$ für $x = y \in (-1,0] \subseteqq M$.
  - *Fall 2: $y \in (0,1)$:* Dann ist $g(x) = x - 1 = y$ für $x := y + 1 \in (1,2) \subseteqq M$.

  Insgesamt ist also g surjektiv.

(b) Aus Teil (a) können wir folgern, dass die Umkehrabbildung g^{-1} existiert und gegeben ist durch
$$g^{-1}\colon (-1,1) \to M\colon\ g^{-1}(y) := \begin{cases} y & \text{für } y \in (-1,0] \\ y+1 & \text{für } y \in (0,1). \end{cases}$$
Diese Funktion ist nicht stetig, denn
$$\lim_{y \searrow 0} g^{-1}(y) = \lim_{y \searrow 0} y + 1 = 1 \quad \text{während} \quad \lim_{y \nearrow 0} g^{-1}(y) = \lim_{y \nearrow 0} y = 0.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 58. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie für jede der folgenden Folgen möglichst viele Häufungspunkte, indem Sie entsprechende konvergente oder bestimmt divergente Teilfolgen angeben.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (1 + (-1)^n)\mathrm{e}^n$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-1)^n \frac{2n^2}{n^2+2}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \sqrt[n]{n}\ \sin(\pi\frac{n}{2})$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \big(\cos(\pi\frac{n}{4})\big)^2 + \sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{3})^j$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Folge häuft sich in 0 und in $+\infty$. Eine gegen 0 konvergente Teilfolge ist gegeben durch $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, denn $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem, gilt für die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} 2e^{2k} = +\infty$.

(b) Die Folge häuft sich nur in 2 und -2. Konvergente Teilfolgen erhalten wir durch $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, denn aus der Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k^2}{k^2+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{1+2\frac{1}{k^2}} = 2$$

folgen

$$\lim_{k\to\infty} b_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(2k)^2}{(2k)^2+2} = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} -\frac{2(2k+1)^2}{(2k+1)^2+2} = -2.$$

Die Folgen $\left(\frac{2(2k)^2}{(2k)^2+2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{2(2k+1)^2}{(2k+1)^2+2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sind Teilfolgen der Folge $\left(\frac{2k^2}{k^2+2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und somit stimmen die Grenzwerte überein.

(c) Die Folge häuft sich nur in -1, 0 und 1. Zugehörige konvergente Teilfolgen erhalten wir durch $(c_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, denn aus der Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{n} \overset{1.5.10}{=} 1$$

und den Identitäten $\sin\left(\pi\frac{4k+3}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \pi\frac{3}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\pi\frac{2k}{2}\right) = \sin(\pi k) = 0$ und $\sin\left(\pi\frac{4k+1}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \pi\frac{1}{2}\right) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgen

$$\lim_{k\to\infty} c_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} (-1)\cdot \sqrt[4k+3]{4k+3} = -1, \qquad \lim_{k\to\infty} c_{2k} = \lim_{k\to\infty} 0 \cdot \sqrt[2k]{2k} = 0$$

und

$$\lim_{k\to\infty} c_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} 1 \cdot \sqrt[4k+1]{4k+1} = 1.$$

Die Folgen $\left(\sqrt[4k+3]{4k+3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(\sqrt[2k]{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(\sqrt[4k+1]{4k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sind hierbei Teilfolgen der Folge $\left(\sqrt[k]{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und somit stimmen die Grenzwerte überein.

(d) Wir berechnen zuerst mit der Formel für die (Partialsummen der) geometrische Reihe

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \to \frac{3}{2} \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

Außerdem bekommen wir

$$\left(\cos\left(\pi\frac{2k+1}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(\cos\left(\pi\frac{4k+2}{4}\right)\right)^2 = 0 \ \text{ und } \ \left(\cos\left(\pi\frac{4k+4}{4}\right)\right)^2 = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit bekommen wir die Häufungspunkte 2, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$. Zugehörige konvergente Teilfolgen erhalten wir zum Beispiel durch $(d_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(d_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(d_{4k+4})_{k\in\mathbb{N}}$. In der Tat gilt

$$\lim_{k\to\infty} d_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 2$$

aus den selben Gründen wie vorher. Die anderen beiden Grenzwerte bekommt man genauso.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 59. *Konvergenz von Potenzreihen*

Stellen Sie die folgenden Reihen als komplexe Potenzreihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dar mit geeignetem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und geeigneter Koeffizienten-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Bestimmen Sie anschließend die zugehörigen Konvergenzradien.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z+2)^n}{n+4}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{3n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Reihe lässt sich umschreiben als Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(z+\frac{2}{3})^n}{n+4}$$

mit dem Entwicklungspunkt $z_0 := -\frac{2}{3}$ und den Koeffizienten $a_n := \dfrac{3^n}{n+4}$. Wir berechnen nun

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{n+5}}{\frac{3^n}{n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot(n+4)}{3^n\cdot(n+5)} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{n+4}{n+5} = 3$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{3}$.

(b) Die Reihe lässt sich umschreiben als Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $z_0 := 0$ und den Koeffizienten

$$a_n := \begin{cases} \frac{n^n}{n!} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(c) Die Reihe lässt sich umschreiben als Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $z_0 := 0$ und den Koeffizienten

$$a_n := \begin{cases} 3^{\frac{n}{3}} & \text{falls } \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Die Koeffizienten-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nicht und hat mehrere Häufungspunkte. Wir berechnen daher

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{\frac{n}{3}}} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}.$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Aufgabe H 60. *Potenzreihenentwicklung komplexer Funktionen*
Seien $f, g, h\colon \mathbb{C} \setminus \{5, -5\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z-5}$, $g(z) = \frac{1}{z+5}$ und $h(z) = \frac{10z-20}{z^2-25}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{10z-20}{z^2-25} = \frac{a}{z-5} + \frac{b}{z+5}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{5, -5\}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 2$, die innerhalb ihres Konvergenzkreises $U_{\rho_f}(z_0)$ bzw. $U_{\rho_g}(z_0)$ mit f bzw. g übereinstimmt.

(c) Bestimmen Sie eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 2$, die innerhalb von $U_{\rho_f}(z_0) \cap U_{\rho_g}(z_0)$ mit h übereinstimmt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $z^2 - 25 = (z-5)(z+5)$, können wir $z^2 - 25$ auf beiden Seiten multiplizieren und erhalten

$$10z - 20 = a(z+5) + b(z-5) \iff 0 = (-20 - 5a + 5b) + (10 - a - b)z,$$

also $10 - b = a$ und $-20 + 5b = 5a$. Durch ineinander Einsetzen bekommen wir $-20 + 5b = 5a = 50 - 5b$, also $10b = 70$ und somit $b = 7$. Damit erhalten wir auch $a = 3$.

(b) Hier kann der Ansatz aus Aufgabe P56 helfen. Man kann die Umformungen aber auch direkt machen. Mit der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z-5} = \frac{-1}{3-(z-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{z-2}{3}} &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}_{=:a_n}(z-2)^n \end{aligned}$$

für alle $z \in U_{\rho_f}(2)$ mit $\rho_f = 3$.

Ähnlich bekommen wir

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{z+5} = \frac{-1}{-7-(z-2)} = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{z-2}{-7}} &= \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{-7}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)\cdot\left(\frac{-1}{7}\right)^{n+1}}_{=:b_n}(z-2)^n \end{aligned}$$

für alle $z \in U_{\rho_g}(2)$ mit $\rho_g = 7$.

(c) Wegen (a), (b) und den Rechenregeln für Potenzreihen 1.14.11 gilt

$$h(z) = 3f(z) + 7g(z) = 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n + 7\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(3a_n + 7b_n)}_{=:c_n}(z-2)^n$$

mit

$$c_n = -\frac{1}{3^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{7^n} = -\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{7^n}$$

für alle $z \in U_{\rho_f}(2) \cap U_{\rho_g}(2)$.

Aufgabe H 61. *Produkt von Potenzreihen*

Gegeben seien die Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f und ρ_g von g.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe f und g als gebrochen rationale Funktionen von z dar.

(c) Stellen Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und als gebrochen rationale Funktion von z dar.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen 1.14.7 können wir die Konvergenzradien bestimmen durch Berechnen der Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3^n|} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{2^n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten damit $\rho_f = \frac{1}{3}$ und $\rho_g = 2$.

(b) Mit der Formel für die geometrische Reihe folgt direkt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n = \frac{1}{1-3z} \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}$$

für alle $z \in U_{\rho_f}(0)$ bzw. alle $z \in U_{\rho_g}(0)$.

(c) Wir setzen nun $a_n := 3^n$ und $b_n := \frac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt nach Satz 1.14.11 für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqq \min\{\rho_f, \rho_g\}$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 3^k \cdot \frac{1}{2^{n-k}} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} 6^k \right) \frac{1}{2^n}}_{=:c_n} z^n.$$

Andererseits gilt mit Aufgabenteil (b)

$$f(z)g(z) = \frac{1}{1-3z} \frac{2}{2-z} = \frac{2}{2-7z+3z^2}$$

und wir sind fertig.

Bemerkung: Die Koeffizienten c_n können wir noch etwas expliziter darstellen als

$$c_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 6^k = \frac{1}{2^n} \frac{1-6^{n+1}}{1-6} = \frac{1}{5} \frac{6^{n+1}-1}{2^n}$$

und damit den Konvergenzradius $\rho_{f\cdot g}$ von $f \cdot g$ bestimmen. Der Konvergenzradius $\rho_{f\cdot g}$ kann größer sein als $\min\{\rho_f, \rho_g\}$ (muss aber nicht)!

Um 1.14.7 zu benutzen, berechnen wir mit den Grenzwertsätzen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5} \frac{6^{n+1}-1}{2^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[n]{5}} \sqrt[n]{6^{n+1}-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^{n+1}-1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3. \end{aligned}$$

Hierbei folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^{n+1}-1} = 6$ aus einem Sandwich-Argument und wegen $-\frac{1}{6} \leqq -\frac{1}{6^n} \leqq 0$. In der Tat haben wir

$$6\sqrt[n]{\frac{35}{6}} = 6\sqrt[n]{6-\frac{1}{6}} \leqq 6\sqrt[n]{6-\frac{1}{6^n}} = \sqrt[n]{6^{n+1}-1} = 6\sqrt[n]{6-\frac{1}{6^n}} \leqq 6\sqrt[n]{6}$$

und Grenzwertbildung liefert die Behauptung. Damit ist der Konvergenzradius der Reihe $f \cdot g$ gleich $\frac{1}{3}$ und für diese Reihen also gleich $\min\{\rho_f, \rho_g\}$.

Aufgabe H 62. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Zeigen Sie, dass $4\big(|\cos(z)|^2 - \big(\cos(x)\big)^2\big) = \big(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}\big)^2 = 4\big(|\sin(z)|^2 - \big(\sin(x)\big)^2\big)$ für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit der geometrischen Summenformel in 1.8.4, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \big\{2\pi k \bigm| k \in \mathbb{Z}\big\}$ gilt

$$2\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = 1 + \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})x\big)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned}
4\big(|\cos(z)|^2 - \big(\cos(x)\big)^2\big) &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)\overline{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)} - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2 \\
&= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right) - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{-2y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - 2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} \\
&= \mathrm{e}^{-2y} + \mathrm{e}^{2y} - 2 \\
&= \left(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}\right)^2.
\end{aligned}$$

Genauso gilt wegen

$$\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)$$

auch

$$\begin{aligned}
4\big(|\sin(z)|^2 - \big(\sin(x)\big)^2\big) &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)\overline{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)} - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{\mathrm{i}}\right)^2 \\
&= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}\right) + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{-2y} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} \\
&= \mathrm{e}^{-2y} + \mathrm{e}^{2y} - 2 \\
&= \left(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}\right)^2.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ikx}+\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-ikx}\\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\\
&= 1+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\\
&= 1+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}
$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 63. *Spezielle Folgen*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen den Grenzwertsätzen 1.5.3 und da $\lim_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}$ für $a_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gilt nach 1.2.9, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n:=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}$ ist eine Teilfolge von a_n, denn offenbar ist $b_n=a_{n^2}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den selben Grenzwert. Insbesondere gilt also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}=\mathrm{e}.$$

(c) Ähnlich wie in (b) bekommen wir wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion auf $[0,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_{2n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}a_{2n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

(d) In Satz 1.2.8 wurde gezeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst und beschränkt ist durch e. Damit bekommt man

$$1\leqq\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n\cdot n}{n}}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}}=\sqrt[n]{a_{n^2}}\leqq\sqrt[n]{\mathrm{e}}$$

Grenzwertbildung liefert nun ein Sandwich-Argument:

$$1 \leqq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}} = 1, \text{ also } \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 64. *Ableitungen*

Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen an, für die der angegebene Funktionsterm sinnvoll als reelle Zahl ausgewertet werden kann. Geben Sie außerdem die Menge aller Stellen an, an denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \sinh(x)\cosh(x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

(c) $f(x) = \sin\big(\cos\big(\tan(x)\big)\big)$

(d) $f(x) = x\sqrt{x\sqrt{x}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Produktregel ist

$$f'(x) = \sinh'(x)\cosh(x) + \sinh(x)\cosh'(x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2.$$

f und f' sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Mit der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1-x^2) - x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

f und f' sind auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1,1\}$ definiert.

(c) Mit der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin'\big(\cos\big(\tan(x)\big)\big)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\cos\circ\tan)(x) \\ &= \sin'\big(\cos\big(\tan(x)\big)\big)\cdot\cos'(\tan(x))\cdot\tan'(x) \\ &= -\cos\big(\cos\big(\tan(x)\big)\big)\cdot\sin(\tan(x))\cdot\frac{1}{(\cos(x))^2}. \end{aligned}$$

f und f' sind definiert auf $\mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(d) Mit der Produkt- und der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right) + x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right) + x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(x\sqrt{x}\right) \\ &= \left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right) + x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\left(1\cdot\sqrt{x} + x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right) + x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} \\ &= \left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right) + \frac{3}{4}\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{7}{4}\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

f und f' sind auf $[0,+\infty)$ definiert. Man kann sich das Leben hier übrigens deutlich erleichtern, wenn man zuerst f vereinfacht zu $f(x) = x^{\frac{7}{4}}$ und dann 2.2.9 benutzt.

Aufgabe H 65. *Schmiegehalbkreis I*

Seien $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $|s| = 1$ und sei

$$g := g_{p,q,r,s}\colon [p-r, p+r] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto q + s\sqrt{r^2 - (x-p)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie $g'(x)$ und $g''(x)$ für $x \in (p-r, p+r)$.

(b) Seien nun $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $d \neq 0$ gegeben. Bestimmen Sie $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $|s| = 1$ so, dass $g(a) = b$, $g'(a) = c$ und $g''(a) = d$ gelten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen der Quotientenregel und der Kettenregel folgen

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{r^2-(x-p)^2}} \cdot (-2)(x-p) = \frac{-s(x-p)}{\sqrt{r^2-(x-p)^2}}$$

und

$$\begin{aligned} g''(x) = s&\frac{(-1)\cdot\sqrt{r^2-(x-p)^2} - [-(x-p)]\cdot\frac{1}{2}\frac{-2(x-p)}{\sqrt{r^2-(x-p)^2}}}{r^2-(x-p)^2} \\ &= s\frac{-(r^2-(x-p)^2)-(x-p)^2}{(r^2-(x-p)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-sr^2}{(r^2-(x-p)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(b) Damit die Funktionsauswertungen wohldefiniert sind, muss offenbar $|a-p| \leqq r$ gelten. Die erste Gleichung liefert $b = g(a) = q + s\sqrt{r^2-(a-p)^2}$, also

$$b - q = s\sqrt{r^2-(a-p)^2} \quad \text{bzw.} \quad r^2 = (b-q)^2 + (a-p)^2$$

wegen $s^2 = |s|^2 = 1$. Damit lässt sich die zweite Gleichung vereinfachen zu

$$c = g'(a) = \frac{-s(a-p)}{\sqrt{r^2-(a-p)^2}} = \frac{-s(a-p)}{|b-q|} \quad \text{bzw.} \quad (a-p) = \frac{-c|b-q|}{s}.$$

Einsetzen in die dritte Gleichung liefert dann

$$\begin{aligned} d = g''(a) = \frac{-sr^2}{(r^2-(a-p)^2)^{\frac{3}{2}}} &= s\frac{-(a-p)^2-(b-q)^2}{|b-q|^3} \\ &= s\frac{-c^2(b-q)^2-(b-q)^2}{|b-q|^3} = \frac{-s(c^2+1)}{|b-q|}. \end{aligned}$$

Dies ist nun wegen $d \neq 0$ äquivalent zu

$$|b-q| = \frac{-s(c^2+1)}{d}.$$

Da die linke Seite nicht negativ ist, muss auch die rechte Seite nicht negativ sein, was nur für $s = -\frac{d}{|d|}$ der Fall ist.

Mit der ersten Gleichung bekommen wir damit

$$q = b - s\sqrt{r^2-(a-p)^2} = b - s|b-q| = b + \frac{s^2(c^2+1)}{d} = b + \frac{(c^2+1)}{d}$$

und mit der zweiten

$$p = a + \frac{c}{s}|b - q| = a - c\left(\frac{c^2+1}{d}\right).$$

Einsetzen in die Gleichung für r^2 liefert dann schließlich

$$r = \sqrt{(b-q)^2 + (a-p)^2} = \sqrt{\left(\frac{c^2+1}{d}\right)^2 + c^2\left(\frac{c^2+1}{d}\right)^2} = \sqrt{\frac{(c^2+1)^3}{d^2}} = \frac{(c^2+1)^{\frac{3}{2}}}{|d|}.$$

Aufgabe H 66. *Schmiegehalbkreis II*

Sei $f\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x) + \frac{x}{2}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

(b) Sei nun g die Abbildung aus der vorherigen Aufgabe H65. Bestimmen Sie $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $|s| = 1$ jetzt so, dass

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad g''(a) = f''(a) \;\text{ gelten für }\; a = \frac{2\pi}{3}.$$

Skizzieren Sie den Graphen der Abbildungen g.

(c) Wiederholen Sie Aufgabenteil **(b)** für $a = \frac{4\pi}{3}$ und skizzieren Sie anschließend den Graphen der Abbilung f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten

$$f'(x) = \cos(x) + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\sin(x).$$

(b) Es sind

$$f(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}, \quad f'(a) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{und} \quad f''(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit Aufgabe H65 erhalten wir dann

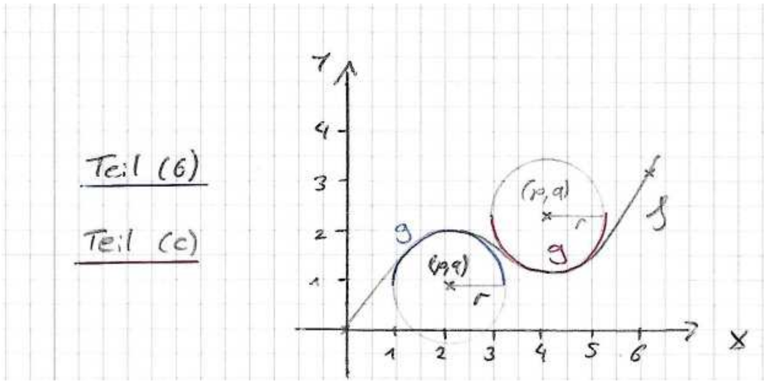
$$\begin{aligned}
p &= a - f'(a)\frac{(f'(a))^2+1}{f''(a)} = a = \frac{2\pi}{3} \approx 2.09, \\
q &= f(a) + \frac{(f'(a))^2+1}{f''(a)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0.76 \text{ und} \\
r &= \frac{((f'(a))^2+1)^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.16, \\
s &= -\frac{f''(a)}{|f''(a)|} = 1.
\end{aligned}$$

(c) Es sind

$$f(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}, \quad f'(a) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{und} \quad f''(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit Aufgabe H65 erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
p &= a - f'(a)\frac{(f'(a))^2+1}{f''(a)} = a = \frac{4\pi}{3} \approx 4.18,\\
q &= f(a) + \frac{(f'(a))^2+1}{f''(a)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2.38 \text{ und}\\
r &= \frac{((f'(a))^2+1)^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.16,\\
s &= -\frac{f''(a)}{|f''(a)|} = -1.
\end{aligned}$$



Aufgabe H 67. *Monotonie, Ungleichungen und Grenzwerte*

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von 2.4.8, dass $\frac{t}{t+1} \leqq \ln(1+t) \leqq t$ für alle $t \geqq 0$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass $\exp\left(\frac{a}{\frac{a}{n}+1}\right) \leqq \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leqq \exp(a)$ für alle $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Folgern Sie daraus, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a)$ für alle $a \geqq 0$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir definieren die Abbildungen $f, g\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ durch

$$f(t) := \ln(1+t) - \frac{t}{t+1} \quad \text{und} \quad g(t) := t - \ln(1+t).$$

Dann gelten

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \geqq 0 \quad \text{und} \quad g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \geqq 0$$

für alle $t \geqq 0$. Wegen 2.4.8 sind die Funktionen f und g monoton steigend. Dann gelten insbesondere

$$0 = f(0) \leqq f(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{t+1} \quad \text{und} \quad 0 = g(0) \leqq g(t) = t - \ln(1+t)$$

für alle $t \geqq 0$. Dies war zu zeigen.

(b) Wir benutzen Aufgabenteil (a) mit $t := \frac{a}{n}$, dass $\exp$ die Umkehrfunktion von $\ln$ ist und die Monotonie der Funktion $x \mapsto \exp(x)^n$. Damit folgen

$$\exp\left(\frac{a}{\frac{a}{n}+1}\right) = \exp\left(\frac{tn}{t+1}\right) = \exp\left(\frac{t}{t+1}\right)^n \leqq \exp\left(\ln(1+t)\right)^n = (1+t)^n$$

und

$$(1+t)^n = \exp\left(\ln(1+t)\right)^n \leqq \exp(t)^n = \exp\left(tn\right) = \exp(a).$$

(c) Wegen der Stetigkeit von $\exp$ haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{a}{\frac{a}{n}+1}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a}{\frac{a}{n}+1}\right) = \exp(a)$$

und somit folgt die Behauptung aus dem Sandwichsatz 1.5.6.

Frischhaltebox

Aufgabe H 68. *Rang und Determinante*

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \operatorname{Rg}\left(\begin{smallmatrix} t-2 & 0 & t \\ 1 & 2t & 0 \\ 3 & 6t & t^2-2t \end{smallmatrix}\right)$ nicht stetig ist.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und seien $u, v \in \mathbb{R}^2$.
Begründen Sie, dass die Abbildung $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \det(A - tuv^\intercal)$ stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass die Ableitung von g durch $g'(t) = -\det(A)\operatorname{Sp}(A^{-1}uv^\intercal)$ gegeben ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen den Rang der Matrix, indem wir zuerst einige elementare Umformungen durchfüren:
Addition des $-(t-2)$-Fachen der ersten Zeile zur dritten Zeile liefert

$$\begin{pmatrix} t-2 & 0 & t \\ 1 & 2t & 0 \\ 3-(t-2)^2 & 6t & 0 \end{pmatrix}.$$

Addition des -3-Fachen der zweiten Zeile zur dritten Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} t-2 & 0 & t \\ 1 & 2t & 0 \\ -(t-2)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vertauschen der Zeilen 1 und 3 liefert schließlich

$$\begin{pmatrix} -(t-2)^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 0 \\ t-2 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Damit ist also

$$f(t) = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} -(t-2)^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 0 \\ t-2 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{falls } t = 2 \\ 1 & \text{falls } t = 0 \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere ist f nicht stetig in $x_0 = 0$, denn einerseits gilt $f(x_0) = 1$ und andererseits haben wir $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 3$, obwohl $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x_0$.

(b) Wir beweisen die Aussage für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit der Schur-Determinantenformel für Blockmatrizen:

- Ist die Matrix A invertierbar, dann gilt

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D - CA^{-1}B).$$

- Ist die Matrix D invertierbar, dann gilt

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D)\cdot\det(A - BD^{-1}C).$$

- Sind die Matrizen A und D invertierbar, dann gilt also

$$\det(A)\cdot\det(D - CA^{-1}B) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D)\cdot\det(A - BD^{-1}C).$$

Wir erhalten nun

$$g(t) = \det(A - tuv^\intercal)\cdot 1 = \det\begin{pmatrix} A & tu \\ v^\intercal & 1 \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(1 - tv^\intercal A^{-1}u)$$
$$= \det(A)\cdot(1 - tv^\intercal A^{-1}u) = \det(A)\cdot(1 - tv^\intercal A^{-1}u).$$

Damit ist g also eine affine Abbildung, stetig differenzierbar und es gilt offenbar

$$g'(t) = -\det(A)v^\intercal A^{-1}u = -\det(A)\,\mathrm{Sp}(v^\intercal A^{-1}u) = -\det(A)\,\mathrm{Sp}(A^{-1}uv^\intercal).$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 69. *Die Regel von l'Hospital*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4(\sin x)^2 - 6\sin x + 2}{2(\sin x)^2 + 5\sin x - 3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - (\ln x)^2}{5x^2 + (\ln x)^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, haben wir

$$4\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 - 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \text{ und}$$

$$2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + 5\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0,$$

also ist der Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4(\sin x)^2 - 6\sin x + 2}{2(\sin x)^2 + 5\sin x - 3}$ der Form $\frac{0}{0}$. Fur die Berechnung der Ableitungen werden wir die Kettenregel benutzen:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(4(\sin x)^2 - 6\sin x + 2)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(2(\sin x)^2 + 5\sin x - 3)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{8\sin x\cos x - 6\cos x}{4\sin x\cos x + 5\cos x} = \frac{8\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{7}.$$

Die Regel von l'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4(\sin x)^2 - 6\sin x + 2}{2(\sin x)^2 + 5\sin x - 3} = -\frac{2}{7}.$$

(b) Für $x \to +\infty$ streben x^2 und $\ln x$ gegen $+\infty$, also strebt $5x^2 + (\ln x)^2$ auch gegen $+\infty$. Da $3x^2 - (\ln x)^2 = (\sqrt{3}x - \ln x)(\sqrt{3}x + \ln x)$ und für $x \to +\infty$ nach P61(d) $\sqrt{3}x - \ln x$ gegen $+\infty$ strebt, bekommen wir, dass $3x^2 - (\ln x)^2$ für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ strebt und der Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - (\ln x)^2}{5x^2 + (\ln x)^2}$ der Form $\frac{+\infty}{+\infty}$ ist.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(3x^2 - (\ln x)^2)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(5x^2 + (\ln x)^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 2(\ln x)\frac{1}{x}}{10x + 2(\ln x)\frac{1}{x}}.$$

Mit der Regel von l'Hospital bekommt man

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\ln x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

also auch $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Beide $6x - 2(\ln x)\frac{1}{x}$ und $10x + 2(\ln x)\frac{1}{x}$ streben gegen $+\infty$ für $x \to +\infty$. Der Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 2(\ln x)\frac{1}{x}}{10x + 2(\ln x)\frac{1}{x}}$ ist der Form $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(6x - 2(\ln x)\frac{1}{x})}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(10x + 2(\ln x)\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6 - 2\frac{1}{x^2} + 2(\ln x)\frac{1}{x^2}}{10 + 2\frac{1}{x^2} - 2(\ln x)\frac{1}{x^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

In der letzten Gleichung haben wir benutzt, dass $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{\ln x}{x^2}$ für $x \to +\infty$ gegen 0 streben. Hier $0 \leqq \frac{\ln x}{x^2} \leqq \frac{\ln x}{x}$ für $x > 1$, also strebt $\frac{\ln x}{x^2}$ gegen 0 für $x \to +\infty$.
Letztendlich liefert die Regel von l'Hospital, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - (\ln x)^2}{5x^2 + (\ln x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 2(\ln x)\frac{1}{x}}{10x + 2(\ln x)\frac{1}{x}} = \frac{3}{5}.$$

Alternativ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - (\ln x)^2}{5x^2 + (\ln x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3 - \frac{(\ln x)^2}{x^2})}{x^2(5 + \frac{(\ln x)^2}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{(\ln x)^2}{x^2}}{5 + \frac{(\ln x)^2}{x^2}}.$$

Bestimmen wir den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x^2}$. Um das zu machen wenden wir die Regel von l'Hospital zwei mal an.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Damit bekommen wir

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - (\ln x)^2}{5x^2 + (\ln x)^2} = \frac{3}{5}.$$

Aufgabe H 70. *Taylorreihen*
Gegeben sei die folgende Funktion: $f\colon (-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln \frac{2-3x}{3+2x}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 4 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$.

Hinweis: Es könnte helfen, vorab Rechenregeln für Logarithmen zu nutzen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$f(x) = \ln(2-3x) - \ln(3+2x), \quad f(0) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$f'(x) = -3(2-3x)^{-1} - 2(3+2x)^{-1}, \quad f'(0) = \frac{-3^2 - 2^2}{2\cdot 3} = -\frac{17}{6};$$

$$f''(x) = -3^2(2-3x)^{-2} + 2^2(3+2x)^{-2}, \quad f''(0) = \frac{-3^4 + 2^4}{2^2 \cdot 3^2} = -\frac{65}{36};$$

$$f^{(3)}(x) = -2\cdot 3^3(2-3x)^{-3} - 2\cdot 2^3(3+2x)^{-3}, \quad f^{(3)}(0) = 2\left(\frac{-3^6 - 2^6}{2^3 \cdot 3^3}\right) = -2\cdot\frac{793}{216};$$

$$f^{(4)}(x) = -6\cdot 3^4(2-3x)^{-4} + 6\cdot 2^4(3+2x)^{-4}, \quad f^{(4)}(0) = 6\left(\frac{-3^8 + 2^8}{2^4 \cdot 3^4}\right) = -6\cdot\frac{6305}{1296}.$$

Somit ist das Taylorpolynom vierter Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gerade

$$T_4(f, x, 0) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{17}{6}x - \frac{65}{72}x^2 - \frac{793}{648}x^3 - \frac{6305}{5184}x^4.$$

(b) Beweisen wir mit vollständiger Induktion, dass die n-te Ableitung von $g(x) = \ln(a + bx)$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ gleich

$$(-1)^{n-1}(n-1)!(a+bx)^{-n}b^n$$

ist.

IA Es gilt $g'(x) = (a+bx)^{-1}b$ und damit ist die Induktionsanfang gezeigt.

IH Nehmen wir an, dass $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(a+bx)^{-n}b^n$.

IS Berechnen wir die $(n+1)$-te Ableitung:

$$g^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!b^n(-n)(a+bx)^{-n-1}b = (-1)^n n!(a+bx)^{-(n+1)}b^{n+1}.$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Mit der Summenregel bekommen wir:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!((2-3x)^{-n}(-3)^n - (3+2x)^{-n}2^n).$$

(c) Berechnen wir $f^{(n)}(0)$ für $n \geqq 1$:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{(-3)^n}{2^n} - \frac{2^n}{3^n}\right) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(-1)^n 3^{2n} - 2^{2n}}{3^n 2^n}.$$

Damit ist die Taylorreihe

$$\begin{aligned} T(f,x,0) &= \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(-1)^n 3^{2n} - 2^{2n}}{n!3^n 2^n}x^n \\ &= \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} - 3^{2n}}{n \cdot 3^n 2^n}x^n. \end{aligned}$$

Aufgabe H 71. *Taylorreihen 2*

Gegeben sei die folgende Funktion: $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{5x-1}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von g.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(g, x, 0)$.

(d) Weisen Sie mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange die Übereinstimmung von $T(g, x, 0)$ und $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ nach.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{e}^{5x-1}, \quad g(0) = \frac{1}{\mathrm{e}} \\ g'(x) &= \mathrm{e}^{5x-1}5, \quad g'(0) = \frac{5}{\mathrm{e}} \\ g''(x) &= \mathrm{e}^{5x-1}5^2, \quad g''(0) = \frac{25}{\mathrm{e}} \\ g'''(x) &= \mathrm{e}^{5x-1}5^3, \quad g'''(0) = \frac{125}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom dritter Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gerade

$$T_3(g,x,0) = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{5}{\mathrm{e}}x + \frac{25}{2\mathrm{e}}x^2 + \frac{125}{6\mathrm{e}}x^3.$$

(b) Beweisen wir mit vollständiger Induktion, dass die n-te Ableitung von $g(x)$ gleich $\mathrm{e}^{5x-1}5^n$ ist.

IA Der Induktionsanfang folgt aus (a).

IH Nehmen wir an, dass $g^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{5x-1}5^n$.

IS Berechnen wir die $(n+1)$-te Ableitung:

$$g^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^{5x-1}5^n \cdot 5 = \mathrm{e}^{5x-1}5^{n+1}.$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(c) Es gilt

$$g^{(n)}(0) = \frac{5^n}{\mathrm{e}}.$$

Damit ist die Taylorreihe

$$T(g,x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!\mathrm{e}} x^n.$$

(d) Für $x \in \mathbb{R}$ ist das Restglied nach Lagrange der Form:

$$R_n(g,x,0) = \frac{\mathrm{e}^{5(\vartheta_x x)-1}5^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit $0 \leqq \vartheta_x < 1$ und $\vartheta_x x \in [-|x|, |x|]$. Da e^{5t-1} stetig ist, existiert $m_x := \max\{|\mathrm{e}^{5t-1}| \mid t \in [-|x|, |x|]\}$ und $|\mathrm{e}^{5(\vartheta_x x)-1}| \leqq m_x$.
Damit sehen wir, dass die Folge der Restglieder konvergiert:

$$|R_n(g,x,0)| \leqq \left| \frac{m_x 5^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leqq m_x \frac{|5x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Also stimmen $T(g,x,0)$ und $g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ überein.

Aufgabe H 72. *Kurvendiskussion*

Wie betrachten die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^2}{x^3+8}$, dabei sei D die Menge aller reellen Zahlen, für die der Funktionsterm $\frac{x^2}{x^3+8}$ definiert ist.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D, den Wertebereich und die Nullstellen von f.

(b) Berechnen Sie f' und f''.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $x^3 + 8 = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $x = -2$, und damit ist $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+8} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3+8} = 0,$$
$$\lim_{x\to-2+0} \frac{x^2}{x^3+8} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-2-0} \frac{x^2}{x^3+8} = -\infty.$$

$f(x) = 0$ genau dann, wenn $x^2 = 0$ also für $x = 0$. Die Nullstelle von f ist 0.
Auf den Intervalen $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ ist f stätig. Merken wir, dass $f(1) = \frac{1}{9} > 0$ und $f(-1) = \frac{1}{7} > 0$, damit wechselt $f(x)$ im $x = 0$ das Vorzeichen nicht.
Der Wertebereich von $f(x)$ für $x \in (-2, +\infty)$ ist $[0, +\infty)$. Der Wertebereich von $f(x)$ für $x \in (-\infty, -2)$ ist $(-\infty, 0)$. Damit ist der maximale Wertebereich ganz $\mathbb{R}$.

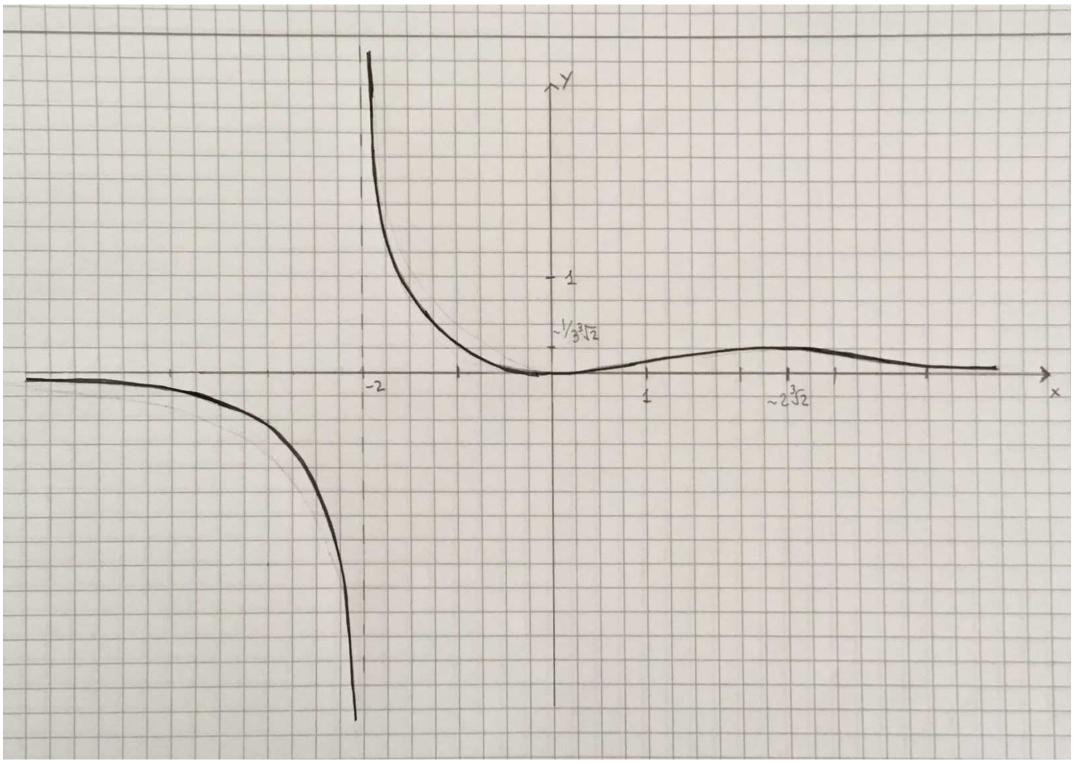
(b) $f'(x) = \frac{2x(x^3+8)-x^2 3x^2}{(x^3+8)^2} = \frac{16x-x^4}{(x^3+8)^2}$.
$f''(x) = \frac{(16-4x^3)(x^3+8)^2-(16x-x^4)2(x^3+8)3x^2}{(x^3+8)^4} = \frac{2x^6-112x^3+128}{(x^3+8)^3}$.

(c) Um die lokalen Extrema von f zu bestimmen, bestimmen wir zuerst die Nulstellen von $f'(x)$:

$$\frac{16x - x^4}{(x^3+8)^2} = 0 \Leftrightarrow 16x - x^4 = x(16 - x^3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 2\sqrt[3]{2}.$$

Wir haben: $f'(x) < 0$ für $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (2\sqrt[3]{2}, +\infty)$ und $f'(x) > 0$ für $(0, 2\sqrt[3]{2})$. Also hat $f(x)$ in $x = 0$ ein lokales Minimum und in $x = 2\sqrt[3]{2}$ ein lokales Maximum. $f(2\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$.

(d)



Frischhaltebox

Aufgabe H 73. *Teleskopreihen*

Berechnen Sie für die folgenden Reihen jeweils die Partialsummen S_N für $N \in \{1, 2, 3, 1000\}$. Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Betrachten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

$$S_1=\sum_{n=1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-1.$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-1.$$

$$S_3=\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{4}}-1.$$

Beweisen wir mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $S_N=\frac{1}{\sqrt{N+1}}-1$.

IA Der Induktionsanfang ist schon bewiesen.

IH Nehmen wir an, dass $S_N=\frac{1}{\sqrt{N+1}}-1$ für N gilt.

IS Zeigen wir die Aussage für $N+1$:

$$S_{N+1}=\sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=S_N+\frac{1}{\sqrt{N+2}}-\frac{1}{\sqrt{N+1}}=\frac{1}{\sqrt{N+2}}-1.$$

Damit ist die Aussage für alle $N\in\mathbb{N}$ bewiesen.

Alternativ:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{N+1}}-\frac{1}{1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N+1}}-1.$$

$$S_{1000}=\frac{1}{\sqrt{1001}}-1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}}-1\right)=-1,$$

da $\frac{1}{\sqrt{N+1}}\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$

(b) Betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n-\ln(n+1)).$$

$$S_1=\sum_{n=1}^{1}(\ln n-\ln(n+1))=\ln 1-\ln 2=-\ln 2.$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{2}(\ln n-\ln(n+1))=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3=-\ln 3.$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{3} (\ln n - \ln(n+1)) = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4.$$

Beweisen wir mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $S_N = -\ln(N+1)$.

IA Der Induktionsanfang ist schon bewiesen.

IH Nehmen wir an, dass $S_N = -\ln(N+1)$ für N gilt.

IS Zeigen wir die Aussage für $N+1$:

$$S_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} (\ln n - \ln(n+1)) = S_N + (\ln(N+1) - \ln(N+2)) = -\ln(N+2).$$

Damit ist die Aussage für alle $N \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Die alternative Lösung mit der Differenz von zwei Summen und Indexverschiebung ist hier auch möglich.

$$S_{1000} = -\ln(1001).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(-\ln(N+1)\right).$$

Die Reihe divergiert, da $-\ln(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} -\infty$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 74. *Partielle Integration und Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x(1-x)}}$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{x}-1}\ \mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Substitution $u=\sqrt{x}, \mathrm{d}\,u = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}\,u = [2\arcsin(t)] = \left[2\arcsin\sqrt{x}\right].$$

(b) Substitution $t=\sqrt{x}, x=t^2, \mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t^2 = 2t\,\mathrm{d}\,t$:

$$\int \sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}\,x = \int \sqrt{t-1}\cdot 2t\,\mathrm{d}\,t = \int \sqrt{t-1}\cdot 2(t-1)\,\mathrm{d}\,t + \int \sqrt{t-1}\cdot 2\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \left[\frac{4}{5}(t-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{4}{15}(t-1)^{\frac{3}{2}}(3t+2)\right] = \left[\frac{4}{15}(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x}+2)\right].$$

Alternativ: $\displaystyle\int t\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}\,t$ kann leicht mit partieller Integration berechnet werden:

$$\int t\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}\,t = \left[t\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{2}{3}\int (t-1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{2}{3}t(t-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(t-1)^{\frac{5}{2}}\right].$$

(c)

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}\,x - \int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}\,x\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)\right] = \left[\frac{1}{3}((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}})\right].$$

Die zwei Integrale wurden entsprechend mit Substitutionen $u=x+1, du=dx$ und $t=x-1, dt=dx$ berechnet.

Aufgabe H 75. *Partielle Integration und Substitution 2*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+9}}$ **(b)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Substitution $u = \frac{x}{3}, x = 3u, \mathrm{d}\,x = 3\,\mathrm{d}\,u$:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{9((\frac{x}{3})^2+1)}} = \int \frac{3\,\mathrm{d}\,u}{3\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}\,u = [\operatorname{arsinh}(u)] = \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{3}\right)\right].$$

(b) Partielle Integration mit $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = -\sin(x)$ liefert

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}\,x = [\mathrm{e}^x \cos x] + \int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}\,x = [\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x] - \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}\,x.$$

Die letzte Gleichung wurde mit noch einer Verwendung von partieller Integration bekommen. Lösen wir die Gleichung nach $\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}\,x$:

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)\right].$$

Alternativ: Hier könnten wir auch die allgemeine Formel aus P69 benutzen.

(c) Substitution $t = 1-x, x = 1-t, \mathrm{d}\,x = -\,\mathrm{d}\,t$:

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}\,x = -\int \frac{t^2-2t+1}{t^{100}}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \left[\frac{1}{97}\cdot\frac{1}{t^{97}} - \frac{2}{98}\cdot\frac{1}{t^{98}} + \frac{1}{99}\cdot\frac{1}{t^{99}}\right] = \left[\frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}}\right].$$

Alternativ: Mit partieller Intergation bekommt man:

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{99(1-x)^{99}}\cdot x^2\right] - \int \frac{2x}{99(1-x)^{99}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \left[\frac{x^2}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{99\cdot 49(1-x)^{98}}\cdot x\right] + \int \frac{1}{99\cdot 49(1-x)^{98}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \left[\frac{x^2}{99(1-x)^{99}} - \frac{x}{99\cdot 49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99\cdot 49\cdot 97(1-x)^{97}}\right].$$

Aufgabe H 76. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3+1}$

(b) $\displaystyle\int_4^5 \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Polynomendivision bekommen wir:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Das Polynom $x^2 - x + 1$ hat keine reelen Nullstellen, also gibt es nach 3.4.5 solche A, B und C, dass

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Wir haben: $A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1) = 1$, also

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 1. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$. Wir erhalten nach Lemma 3.4.8 und 3.4.9:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x+1} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(b) Wir haben: $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$. Mit Polynomdivision bekommen wir:

$$x^3 + 1 = (x^3 - 5x^2 + 6x) + (5x^2 - 6x + 1).$$

Es gibt solche A, B und C, dass

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Wir haben: $A(x^2 - 5x + 6) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 - 2x) = 5x^2 - 6x + 1$, also

$$\begin{cases} A + B + C = 5 \\ -5A - 3B - 2C = -6 \\ 6A = 1. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{9}{2}, C = \frac{28}{3}$.

$$\int_4^5 \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}\,x = \int_4^5 1\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{6}\int_4^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x - \frac{9}{2}\int_4^5 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{28}{3}\int_4^5 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \left[x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3|\right]_4^5$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(\ln 5 - \ln 4) - \frac{9}{2}(\ln 3 - \ln 2) + \frac{28}{3}\ln 2 = 1 + \frac{\ln 5}{6} - \frac{9\ln 3}{2} + \frac{27\ln 2}{2}.$$

Aufgabe H 77. *Noch ein Integral*

(a) Leiten Sie die Funktion $f(x) = \arccos x$ ab.

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int x^2 \arccos x \,\mathrm{d}\, x$.

(c) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arccos x \,\mathrm{d}\, x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion $f : x \to \cos x$ ist im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und stetig, Außerdem ist f differenzierbar im $(0, \pi)$ mit $f'(x) = -\sin x \neq 0$. Satz 2.3.1 ergibt für die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ und $y_0 = \cos(x_0) \in (-1, 1)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, y} \arccos y \bigg|_{y=y_0} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}(\cos x)|_{x=x_0}} = -\frac{1}{\sin x_0} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos x_0)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

Wir haben benutzt, dass für $x_0 \in [0, \pi]$ die Funktion $\sin(x_0) \geqq 0$ ist. Also, $\arccos y$ ist in $(-1, 1)$ differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, y} \arccos y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Alternativ: Wir könnten die Formel $\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$ beweisen und sie differenzieren.

(b) Partielle Integration ergibt:

$$\int x^2 \arccos x \,\mathrm{d}\, x = \left[\frac{x^3}{3} \arccos x\right] + \int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x.$$

Mit Substitution $t = x^2, \mathrm{d}\, t = 2x \,\mathrm{d}\, x$ und mit weiterer Substitution $u = 1 - t$ bekommen wir

$$\int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x = \int \frac{t}{6\sqrt{1-t}} \,\mathrm{d}\, t = \int \frac{-(1-t)+1}{6\sqrt{1-t}} \,\mathrm{d}\, t = \left[\frac{1}{9}(1-t)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{1-t}\right]$$

$$= -\frac{1}{9}\sqrt{1-t}(t+2) = -\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(x^2+2).$$

Die Substitution $t = x^2$ kann nur für $x \in (-1, 0)$ oder $x \in (0, 1)$ benutzt werden (siehe 3.3.8). Durch Ableiten verifizieren wir, dass $\displaystyle\int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x = -\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)$ auf dem ganzen Intervall $(-1, 1)$. Das ergibt:

$$\int x^2 \arccos x \,\mathrm{d}\, x = \left[\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)\right].$$

Hier kann man auch durch Ableiten verifizieren, dass die Formel auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ und nicht nur auf $(-1, 1)$ gilt.

(c)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arccos x \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{9}{4} - 0 + \frac{1}{9}\cdot 2 = \frac{\pi}{72} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{2}{9}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 78. *Stetigkeit*

Entscheiden Sie jeweils, ob die Funktion in x_0 stetig fortsetzbar ist:

(a) $f\colon (0,2\pi) \smallsetminus \{\pi\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-\pi)\cot x, \quad x_0 = \pi$

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}, \quad x_0 = 0$

(c) $h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{falls } x < 0 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{|x-1|} & \text{falls } x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Regel von L'Hospital bekommen wir:

$$\lim_{x\to\pi}[(x-\pi)\cot x] = \lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)\cos x}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}((x-\pi)\cos x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sin x}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{\cos x - (x-\pi)\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Die Funktion f ist in $x_0 = \pi$ mit 1 stetig fortsetzbar.

(b) Mit zwei Anwendungen von der Regel von L'Hospital bekommen wir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(1-\cos x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sin x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion g ist in $x_0 = \mathbf{0}$ mit $\frac{1}{2}$ stetig fortsetzbar.

(c) In diesem Fall müssen wir den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert berechnen. Mit der Regel von L'Hospital bekommen wir:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\mathrm{e}^x - 1)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}x} = \lim_{x\to 0-0}\frac{\mathrm{e}^x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Um den rechtsseitigen Grenzwert in 0 zu bestimmen, können wir nur $x < 1$ betrachten, dann $x - 1 < 0$ und $|x-1| = 1-x$. Die Wurzelfunktion $y \mapsto \sqrt{y}$ ist auf dem Intervall $[0,+\infty)$ stätig (insbesondere, $\lim\limits_{y\to 1}\sqrt{y} = \sqrt{1} = 1$), damit ist

$$\lim_{x\to 0+0}(\sqrt{x+1} - \sqrt{|x-1|}) = \lim_{x\to 0+0}(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}) = 1 - 1 = 0.$$

Die Funktion h ist in $x_0 = 0$ nicht stätig fortsetzbar, da $\lim\limits_{x\to 0-0} h(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0+0} h(x)$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

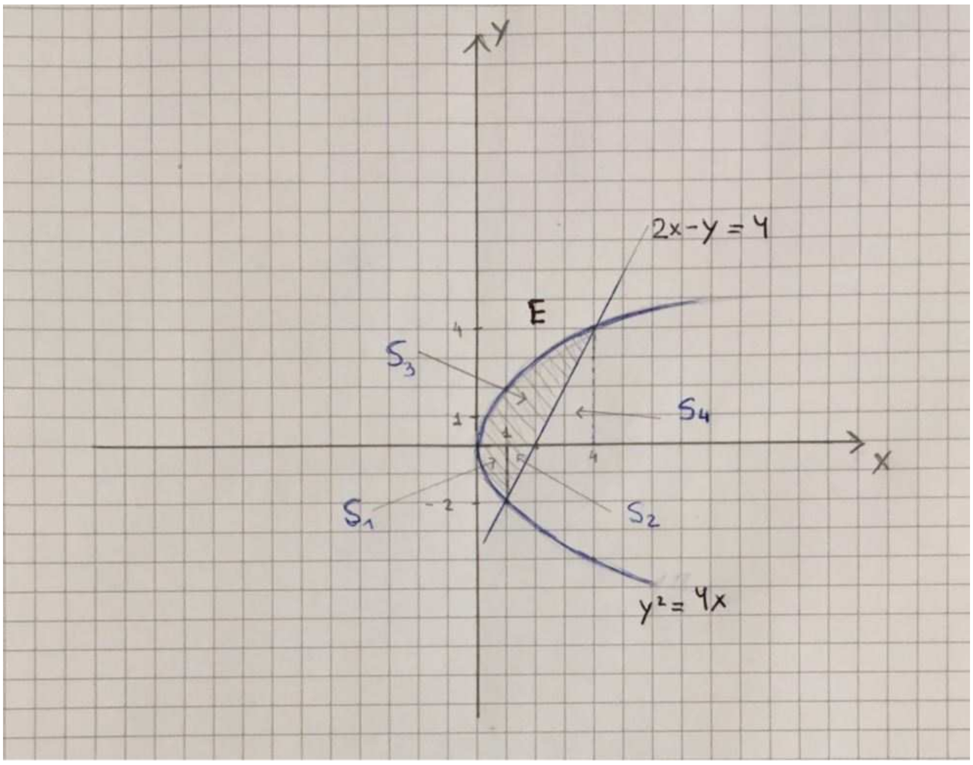
Aufgabe H 79. *Flächen*

Bestimmen Sie die Fläche der beschränkten Figur E, die durch Linien begrenzt ist, die den Gleichungen $y^2 = 4x$ bzw. $2x - y = 4$ genügen; d.h. $E := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y \leqq 4, y^2 \leqq 4x\}$.
Hinweis: Machen Sie zuerst eine Skizze von E.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst bestimmen wir die Schnittpunkte von $2x - y = 4$ und $y^2 = 4x$, indem wir das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ (2x-4)^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ 4x^2 - 20x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases}$$

Die untere Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. Die obere Gleichung liefert $y_1 = 2x_1 - 4 = -2$ und $y_2 = 2x_2 - 4 = 4$. Damit sind die Schnittpunkte $\binom{1}{-2}$ und $\binom{4}{4}$.



Aus der Skizze sieht man, dass die Fläche S von E als die Summe $S = S_1 + S_2 + S_3$ dargestellt werden kann. Dabei sind S_1, S_2 und S_3 die Flächen der entsprechenden Figuren. $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$, da die entsprechende Figur ein Dreieck ist und der Schnittpunkt von $2x - y = 4$ und $y = 0$ der Punkt $\binom{2}{0}$ ist.

$$S_3 = \int_0^4 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x - S_4 = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{32}{3} - 4.$$

$$S_1 = \int_0^1 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Das ergibt:

$$S = \frac{4}{3} + 1 + \frac{32}{3} - 4 = 9.$$

Alternativ: Man könnte auch die Rolle von x und y umtauschen und S als Differenz der Fläche vom Trapez und des Integrals $\int\limits_{-2}^{4} \frac{y^2}{4} \,\mathrm{d}\, y$ berechnen.

Aufgabe H 80. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^5+7}{\sqrt[3]{x^{16}+2}} \,\mathrm{d}\, x$ **(b)** $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} \,\mathrm{d}\, x$ **(c)** $\int\limits_{0}^{\pi} \ln(\sin x) \,\mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x \geqq 2$ gilt:

$$0 \leqq \frac{x^5}{\sqrt[3]{2x^{16}}} \leqq \frac{x^5+7}{\sqrt[3]{x^{16}+2}},$$

da $2x^{16} \geqq x^{16} + 2$ gilt. Das Integral

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^5}{\sqrt[3]{2x^{16}}} \,\mathrm{d}\, x = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}x^{\frac{1}{3}}} \,\mathrm{d}\, x$$

divergiert nach 3.7.8, da $\frac{1}{3} < 1$. Deswegen ist $\frac{1}{\sqrt[3]{2}x^{\frac{1}{3}}}$ eine divergente Minorante für $\frac{x^5+7}{\sqrt[3]{x^{16}+2}}$ auf $[2, +\infty)$ (die Funktion $\frac{1}{\sqrt[3]{2}x^{\frac{1}{3}}}$ ist in jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subsetneqq [2, +\infty)$ integrierbar). Das Integral

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^5+7}{\sqrt[3]{x^{16}+2}} \,\mathrm{d}\, x = \int\limits_{1}^{2} \frac{x^5+7}{\sqrt[3]{x^{16}+2}} \,\mathrm{d}\, x + \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^5+7}{\sqrt[3]{x^{16}+2}} \,\mathrm{d}\, x \quad \text{divergiert.}$$

Hier haben wir benutzt, dass das Integral von 1 bis 2 existiert und eine reelle Zahl ist.

(b) Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{x^2}2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0.$$

Nach dem Grenzwertkriterium folgt aus der Konvergenz von $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\, x$ die Konvergenz von $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} \,\mathrm{d}\, x$ (beide Funktionen sind im $[2, +\infty)$ stetig und positiv). Die Konvergenz von $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\, x$ folgt aus 3.7.8. Also konvergiert das Integral (b).

(c) Die zu integrierende Funktion ist in beiden Randpunkten des Integrationsintevalls nicht definiert. Deswegen müssen wir zwei uneigentliche Integrale betrachten: von 0 bis z.B. 1 und von 1 bis π.

$$I_1 := \int_0^1 \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x \text{ und } I_2 := \int_1^\pi \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Die Funktion $\ln(\sin x)$ ist im Intervall $(0,1]$ negativ. Also betrachten wir $|\ln(\sin x)| = -\ln(\sin x)$, um den Grenzwertkriterium anzuwenden. Die Funktion $-\ln x$ ist dann in $(0,1]$ auch stätig und positive.

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{-\ln x}{-\ln(\sin x)} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cos x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\cos x}{\cos x - x\sin x} = 1.$$

Nach dem Grenzwertkriterium folgt aus der Konvergenz von $\int_0^1 -\ln x\,\mathrm{d}\,x$ die Konvergenz von $\int_0^1 |\ln(\sin x)|\,\mathrm{d}\,x$ und auch die Konvergenz von I_1 nach 3.7.5(3).

$$\int_0^1 -\ln x\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y\to 0+0} [-x\ln x + x]_y^1 = \lim_{y\to 0+0} (-1\ln 1 + 1 + y\ln y - y) = -0+1+0-0 = 1$$

nach 2.5.8.

Betrachten wir I_2. Wir können I_2 als Summe von zwei weiteren Integralen darstellen: von 1 bis $\pi - 1$ und von $\pi - 1$ bis π. Die Funktion $\ln(\sin x)$ ist im Intervall $[1, \pi-1]$ stätig, also auch integrierbar, dieses Integral existiert. Folglich ist es genug, nur die Existenz von dem zweiten Integral zu beweisen. Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to \pi-0} \frac{-\ln(\pi - x)}{-\ln(\sin x)} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x\to \pi-0} \frac{-\frac{1}{\pi-x}}{\frac{1}{\sin x}\cos x} = \lim_{x\to \pi-0} \frac{\sin x}{(x-\pi)\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to \pi-0} \frac{\cos x}{\cos x - (x-\pi)\sin x} = 1.$$

Nach dem Grenzwertkriterium folgt aus der Konvergenz von $\int_{\pi-1}^{\pi} -\ln(\pi - x)\,\mathrm{d}\,x$ die Konvergenz von $\int_{\pi-1}^{\pi} |\ln(\sin x)|\,\mathrm{d}\,x$ und auch von I_2.

$$\int_{\pi-1}^{\pi} -\ln(\pi - x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y\to \pi-0} [(\pi - x)\ln(\pi - x) + x]_{\pi-1}^{y}$$
$$= \lim_{y\to \pi-0} ((\pi - y)\ln(\pi - y) + y - \ln 1 - \pi + 1) = 1.$$

Hier haben wir benutzt, dass $\lim_{y\to \pi-0} ((\pi - y)\ln(\pi - y)) = \lim_{z\to 0+0} (z\ln(z)) = 0$ nach 2.5.8 mit $z = \pi - y$.

Damit konvergieren I_1 und I_2 und auch das Integral (c).

Aufgabe H 81. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+4x+3}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\tan x}}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{(\sin x)(2-\frac{1}{\sin x})}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y\to 1+0}\left[3(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_y^3 = \lim_{y\to 1+0}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{3}} - 3(y-1)^{\frac{1}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{2}.$$

(b) Die Nullstellen von x^2+4x+3 sind -1 und -3, also gibt es solche A und B, dass:

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}.$$

A und B erhalten wir aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+4x+3} = \int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}\,x = \lim_{y\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3|\right]_2^y$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right]_2^y = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y+3}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{5}\right).$$

In der letzten Gleichung haben wir benutzt, dass $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{y+1}{y+3} = 1$, der Logarithmus $\ln z$ ist für $z>0$ stätig, also $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\ln\left(\frac{y+1}{y+3}\right) = \ln 1 = 0$.

(c) Merken wir, dass $t(x)=\tan x$ für $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ bijektiv und differenzierbar mit $t'(x)\neq 0$ ist. Mit Substitution $t=\tan x$, $\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}\,x$ bekommen wir

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-\tan x}}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right] = \left[-\mathrm{e}^{-\tan x}\right].$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\tan x}}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\left[-\mathrm{e}^{-\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^{\tan y}}+1\right) = 1.$$

In der letzte Gleichung benutzen wir dass $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^{\tan y}}\right) = 0$, da $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan y) = +\infty$.

(d) Für $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ ist $t(x) = 2 - \frac{1}{\sin x}$ bijektiv und differenzierbar mit $t'(x) = \frac{1}{(\sin x)^2} \cos x = \frac{\cot x}{\sin x} \neq 0$. Mit Substitution $t(x) = 2 - \frac{1}{\sin x}$, $\mathrm{d}\,t = \frac{\cot x}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$, $t\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ und $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ erhalten wir:

$$\int \frac{\cot x}{(\sin x)(2 - \frac{1}{\sin x})}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = [\ln|t|] = \left[\ln\left|2 - \frac{1}{\sin x}\right|\right].$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{(\sin x)(2 - \frac{1}{\sin x})}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y \to \frac{\pi}{6}+0} \left[\ln\left|2 - \frac{1}{\sin x}\right|\right]_y^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{y \to \frac{\pi}{6}+0} \left(0 - \ln\left|2 - \frac{1}{\sin y}\right|\right) = +\infty,$$

da $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{6}+0} \left(2 - \frac{1}{\sin y}\right) = 0$ gilt und $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{6}+0} \ln\left|2 - \dfrac{1}{\sin y}\right| = -\infty$ nach der Stätigkeit vom Logarithmus gilt. Das Integral divergiert.

Aufgabe H 82. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\;\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (x-2)^2}\;\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_2^3 x \ln(x-2)\;\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos x$ differenzierbar mit $\cos x \neq 0$. Nach 3.3.6

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}-0} [-\ln|\cos x|]_0^y = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}-0} (-\ln(\cos y) + 0) = +\infty.$$

Das Integral divergiert. Hier könnten wir auch die Substitution mit $t(x) = \cos x$ durchführen.

(b) Hier müssen wir zwei Integrale betrachten, z.B. von $-\infty$ bis 3 und von 3 bis $+\infty$. Mit Substitution $t = x - 2$, $\mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,x$ bekommen wir:

$$\int \frac{1}{1 + (x-2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}\,t = [\arctan t] = [\arctan(x-2)].$$

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{1 + (x-2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y \to -\infty} [\arctan(x-2)]_y^3 = \lim_{y \to -\infty} (\arctan 1 - \arctan(y-2)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{1 + (x-2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y \to +\infty} [\arctan(x-2)]_3^y = \lim_{y \to +\infty} (\arctan(y-2) - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Die beiden Integrale existieren, also existiert auch das Integral (b):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (x-2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{1 + (x-2)^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{1 + (x-2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi.$$

(c) Berechnen wir zuerst das unbestimmte Integral mit Substitution $t = x - 2, \mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,x$ und partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int x\ln(x-2)\,\mathrm{d}\,x &= \int (t+2)\ln(t)\,\mathrm{d}\,t = \int (t\ln t + 2\ln t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\ln t + 2t\ln t\right] - \int \left(\frac{1}{2}t + 2\right)\mathrm{d}\,t = \left[\frac{t^2}{2}\ln t + 2t\ln t - \frac{1}{4}t^2 - 2t\right] \\ &= \left[\frac{(x-2)^2}{2}\ln(x-2) + 2(x-2)\ln(x-2) - \frac{1}{4}(x-2)^2 - 2(x-2)\right].\end{aligned}$$

$$\int_2^3 x\ln(x-2)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y\to 2+0}\left[\frac{(x-2)^2}{2}\ln(x-2) + 2(x-2)\ln(x-2) - \frac{1}{4}(x-2)^2 - 2(x-2)\right]_y^3$$

$$= \lim_{y\to 2+0}\left(0+0-\frac{1}{4}-2-\frac{(y-2)^2}{2}\ln(y-2)-2(y-2)\ln(y-2)+\frac{1}{4}(y-2)^2+2(y-2)\right) = -\frac{1}{4}-2 = -\frac{9}{4}.$$

In der letzten Gleichung haben wir $\lim\limits_{y\to 2+0}((y-2)\ln(y-2)) = 0$ [2.5.8] benutzt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 83. *Konvergenzradius*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(3x-1)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{3n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n\,n!}(x-2)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n\,3^n}x^n$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(3x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}3^n\left(x-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Bezeichnen wir mit $a_n = \frac{3^n}{n!}3^n = \frac{3^{2n}}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{2(n+1)}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^2}{n+1}\right) = 0.$$

Nach 1.14.7 ist der Konvergenzradius $+\infty$.

(b) Wir können die zu betrachtende Reihe als folgendes umschreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{3n} = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k,$$

mit

$$a_k = \begin{cases}2^{\frac{k}{3}}, & \text{falls } k = 3n, n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\\ 0, & \text{falls } k\neq 3n, n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\end{cases}$$

Das ergibt: $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[3]{2}$. Der Konvergenzradius von der Reihe in (b) ist $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ nach 1.14.7.

(c) Bezeichnen wir mit $a_n = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n\, n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^n\, n!}{\mathrm{e}^{n+1}\,(n+1)!n^n}\right| = \frac{(n+1)^n\,(n+1)n!}{\mathrm{e}\,(n+1)!n^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1,$$

da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$. Der Konvergenzradius von der Reihe in (c) ist 1 nach 1.14.7.

(d) $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, also $|(1+\mathrm{i})^n| = (\sqrt{2})^n$ und $\left|\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n\,3^n}\right| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n\,3^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n\,3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2})^n}{n\,3^n}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

da $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Der Konvergenzradius von der Reihe in (d) ist $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ nach 1.14.7.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 84. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\ln(n)}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ist für $x \in [3, +\infty)$ positiv und monoton fallend, da für $x \in [3, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} < 0.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{\ln x}{x}\right] + \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right].$$

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{y \to +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_3^y = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + \frac{\ln 3 + 1}{3}\right) = 0 + \frac{\ln 3 + 1}{3}.$$

Hier haben wir benutzt, dass $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} \overset{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$ nach der Regel von L'Hospital. Das Integral I konvergiert, also konvergiert auch die Reihe (a) nach 3.8.1.

(b) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2^{\ln x}}$ ist für $x \in [1, +\infty)$ positiv und monoton fallend. Für $x \in [1, +\infty)$ ist $t(x) = \ln x$ differenzierbar und bijektiv, mit $t'(x) \neq 0$, $x = \mathrm{e}^t, \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t$. Mit Substitution bekommen wir:

$$\int \frac{1}{2^{\ln x}} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{e}^t}{2^t} \,\mathrm{d}\,t = \int \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^t \mathrm{d}\,t = \left[\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^t \cdot \frac{1}{\ln(\frac{\mathrm{e}}{2})}\right] = \left[\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{\ln x} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{\mathrm{e}}{2})}\right].$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln x}} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{y \to +\infty} \left[\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{\ln x} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{\mathrm{e}}{2})}\right]_1^y = \lim_{y \to +\infty} \left(\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{\ln y} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{\mathrm{e}}{2})} - \frac{1}{\ln(\frac{\mathrm{e}}{2})}\right) = +\infty,$$

da $\ln y$ gegen $+\infty$ für $y \to +\infty$ strebt und $\frac{\mathrm{e}}{2} > 1$. Die Reihe (b) divergiert nach 3.8.1.

(c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}}$ ist für $x \in [1, +\infty)$ positiv und monoton fallend. Für $x \in [1, +\infty)$ ist $t(x) = -\sqrt[3]{x}$ differenzierbar und bijektiv, mit $t'(x) \neq 0$, $x = -t^3, \mathrm{d}\,x = -3t^2 \,\mathrm{d}\,t$. Mit Substitution bekommen wir:

$$\int \mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}\,x = \int -\mathrm{e}^t 3t^2 \,\mathrm{d}\,t = \left[-3\mathrm{e}^t t^2\right] + \int 6\mathrm{e}^t t \,\mathrm{d}\,t = \left[-3\mathrm{e}^t t^2 + 6\mathrm{e}^t t\right] - \int 6\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t$$

$$= \left[-3\mathrm{e}^t t^2 + 6\mathrm{e}^t t - 6\mathrm{e}^t\right] = \left[3\mathrm{e}^t(-t^2 + 2t - 2)\right] = \left[3\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x}}(-(\sqrt[3]{x^2}) - 2\sqrt[3]{x} - 2)\right].$$

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{y \to +\infty} \left[3\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x}}(-(\sqrt[3]{x^2}) - 2\sqrt[3]{x} - 2)\right]_1^y$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(3\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{y}}(-(\sqrt[3]{y^2}) - 2\sqrt[3]{y} - 2) + \frac{15}{\mathrm{e}}\right) = \frac{15}{\mathrm{e}}.$$

In der letzten Gleichung haben wir benutzt, dass nach der Regel von L'Hospital

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{e}^{y^{\frac{1}{3}}}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}{\mathrm{e}^{y^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{2y^{\frac{1}{3}}}{\mathrm{e}^{y^{\frac{1}{3}}}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}}{\mathrm{e}^{y^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}} = 0.$$

Die Reihe (c) konvergiert nach 3.8.1.

Aufgabe H 85. *Geschlossener Ausdruck*

Gegeben ist die Funktion $f\colon(-\rho,\rho)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Dabei sei ρ der Konvergenzradius der verwendeten Potenzreihe.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(b) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f'(x)$.

(c) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir können die zu betrachtende Reihe als folgendes umschreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k,$$

mit

$$a_k = \begin{cases}\frac{1}{k}, & \text{falls } k = 2n+1, n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\\ 0, & \text{falls } k\neq 2n+1, n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\end{cases}$$

Das ergibt: $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} = 1$, da $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1$. Der Konvergenzradius von der Reihe in (b) ist 1 nach 1.14.7.

(b) Nach 3.8.4 dürfen wir die Potenzreihe gliedweise für $x\in(-1,1)$ differenzieren:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n.$$

Das ist die geometrische Reihe (1.8.4, $q = x^2$, $|x^2|<1$), also

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \text{ für } x\in(-1,1).$$

(c) Wir bestimmen die Stammfunktion mit Partialbruchzerlegung. Es gibt A und B so, dass

$$\frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Das ergibt: $A+B=0$, $A-B=-1$, also $A = B-1$ und $2B = 1$. Folglich: $B=\frac{1}{2}, A=-\frac{1}{2}$.

$$\int\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + C.$$

Um den Betrag aufzulösen, haben wir hier benuzt, dass $|x| < 1$. Nun bestimmen wir C, indem wir $x = 0$ einsetzen: $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0$. Da $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0+1}{1-0}\right) = 0$, bekommen wir $C = 0$ und

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \text{ für } x \in (-1,1).$$

Aufgabe H 86. *Stetigkeit für Funktionen mehrerer Veränderlicher*

Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{\sin(x^2+y^2)}}$.

Dabei sei D die Menge aller Paare reeller Zahlen, für die der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Skizzieren Sie den Schnitt des Definitionsbereichs D mit der Menge $[-4,4] \times [-4,4]$.

(c) Ist f in $\binom{0}{0}$ stetig fortsetzbar?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Funktionsterm $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{\sin(x^2+y^2)}}$ ist für alle solchen Paare reeller Zahlen $\binom{x}{y}$ definiert, dass $\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ definiert und ungleich Null ist: D.h. für $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ so, dass $\sin(x^2+y^2) > 0$. Die letzte Ungleichung gilt für alle solchen Paare reeller Zahlen $\binom{x}{y}$, dass $x^2+y^2 \in (0,\pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \cdots \cup (2n\pi, (2n+1)\pi) \cup \ldots$. Der Definitionsbereich ist die unendliche Vereinigung von offenen Kreisringen zwischen den konzentrischen Kreisen mit Radien $\sqrt{2n\pi}$ und $\sqrt{(2n+1)\pi}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

$$D = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} (2n\pi, (2n+1)\pi)\}.$$

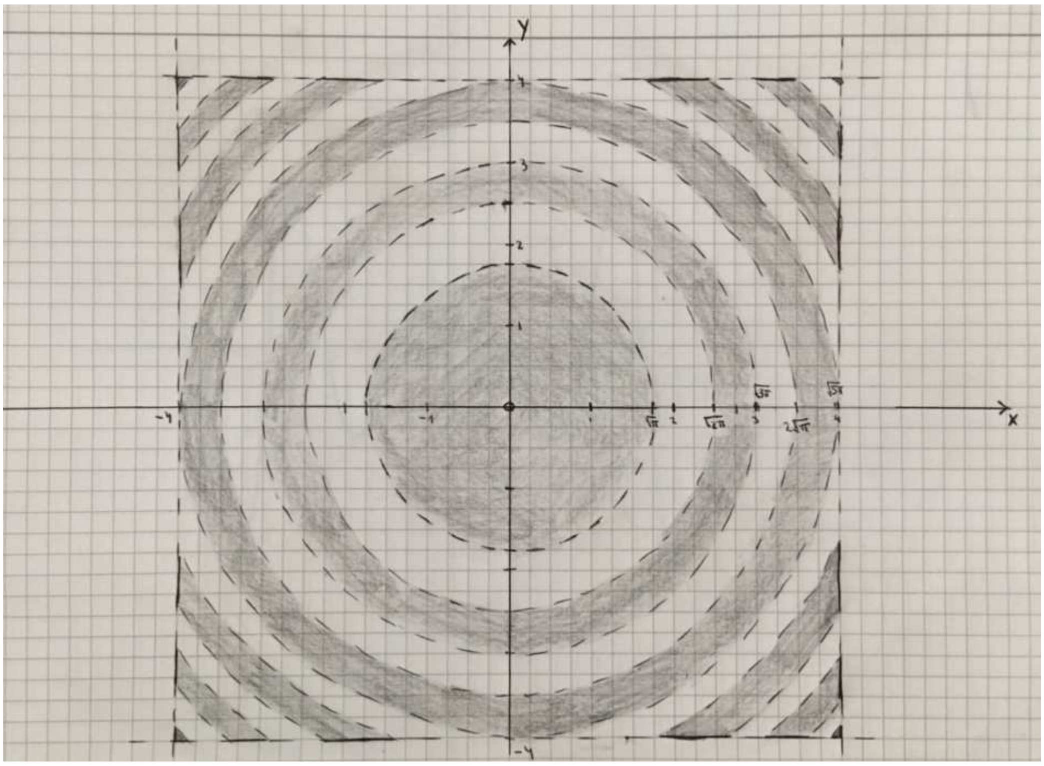
(b) Wir benutzen, dass $\pi \simeq 3,14$. Da $1,7^2 = 2,89$ und $1,8^2 = 3,24$, $\sqrt{\pi} \simeq 1,8$.

Da $\sqrt{2} \simeq 1,4$, $\sqrt{3} \simeq 1,7$ und $\sqrt{5} \simeq 2,2$, erhalten wir, dass $\sqrt{2\pi} \simeq 2,5$, $\sqrt{3\pi} \simeq 3$, $\sqrt{4\pi} \simeq 3,6$ und $\sqrt{5\pi} \simeq 3,96$.

Dabei ist $5\pi < 5 \cdot 3,2 = 16$, also $\sqrt{5\pi} < 4$ und der Bereich $[-4,4] \times [-4,4]$ enthält den Kreis $x^2+y^2 = 5\pi$. Dabei ist auch $6\pi > 6 \cdot 3,1 = 18,6$, also $\sqrt{6\pi} > 4$.

Da $10\pi < 32 = 4^2 + 4^2 < 11 \cdot 3,1 = 34,1 < 11\pi$, ist die Länge des Vektors $(4,4)$ größer als $\sqrt{10\pi}$ und kleiner als $\sqrt{11\pi}$.

Der Bereich enthält die offene Kreisfläche (mit Radius $\sqrt{\pi}$) ohne $\binom{0}{0}$, den offenen Kreisring zwischen den konzentrischen Kreisen mit Radien $\sqrt{2\pi}$ und $\sqrt{3\pi}$ und den offenen Kreisring zwischen den konzentrischen Kreisen mit Radien $\sqrt{4\pi}$ und $\sqrt{5\pi}$. Er enthält auch die Schnitte mit drei weiteren offenen Kreisringen: zwischen den konzentrischen Kreisen mit Radien $\sqrt{6\pi}$ und $\sqrt{7\pi}$; zwischen den konzentrischen Kreisen mit Radien $\sqrt{8\pi}$ und $\sqrt{9\pi}$ und zwischen den konzentrischen Kreisen mit Radien $\sqrt{10\pi}$ und $\sqrt{11\pi}$. Folglich ergibt sich die folgende Skizze:



(c) Betrachten wir die Hilfsfunktion $\frac{t^2}{\sqrt{\sin(t^2)}}, t \in \mathbb{R}, t > 0$. Die Regel von L'Hospital liefert:

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{t^2}{\sqrt{\sin(t^2)}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0+0} \frac{2t}{\frac{1}{2}(\sin(t^2))^{-\frac{1}{2}}\cos(t^2)\cdot 2t} = \lim_{t\to 0+0} \frac{2\sqrt{\sin(t^2)}}{\cos(t^2)} = 0.$$

Das bedeutet: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t > 0: \quad \left(t < \delta \Longrightarrow \left|\frac{t^2}{\sqrt{\sin t^2}}\right| < \varepsilon\right)$.

Folglich: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so, dass für alle $\binom{x}{y}$

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{\sin(x^2+y^2)}}\right| < \varepsilon.$$

Die Funktion f ist in $\binom{0}{0}$ mit 0 stetig fortsetzbar.

Aufgabe H 87. *Funktionen mehrerer Veränderlicher*

Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{x\sin x}{y}$.

Dabei sei D die Menge aller Paare reeller Zahlen, für die der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinie zum Niveau $c = 1$ für $x \in [-4\pi, 4\pi]$.

(c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$.

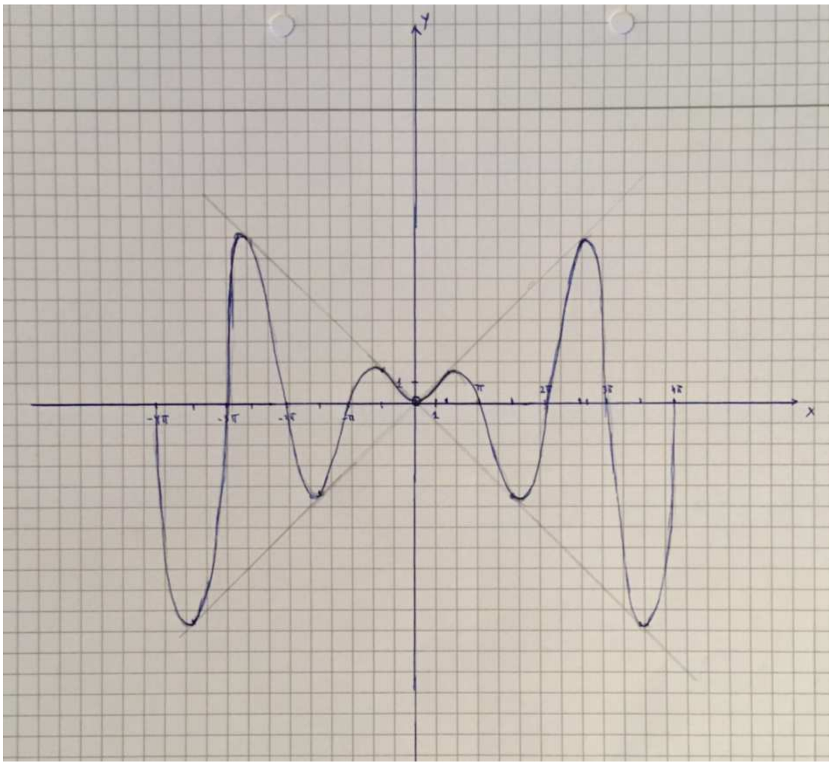
(d) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = +\infty$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion $f(\binom{x}{y})$ ist für alle Paare $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$ definiert:

$$D = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}.$$

(b) Die Niveaulinie von f zum Niveau $c = 1$ ist gegeben durch die Gleihung $\frac{x \sin x}{y} = 1$. Also $y = x \sin x$ mit $y \neq 0$ (folglich $x \neq 0$). Merken wir nun, dass $-x\sin(-x) = x \sin x$, folglich können wir nur $x > 0$ betrachten. Die positiven Nullstellen von $x \sin x$ sind die Punkte $x = \pi k$, mit $k \in \mathbb{N}$. Der Graph von $y = x \sin x$ berührt die Gerade $x = y$ in Punkten mit Abszissen $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und die Gerade $x = -y$ in Punkten mit Abszissen $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Der Graph überschneidet die Geraden nicht, da $x \sin x \leqq x$ und $x \sin x \geqq -x$ für alle $x \geqq 0$. Es ergibt sich die folgende Skizze:



(c) Für $b_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ haben wir $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{0}$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

(d) Für $a_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^3} \end{pmatrix}$ haben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

da nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}}{-2\frac{1}{t^3}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2} t \cos\left(\frac{1}{t}\right) = +\infty.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 88. *Grenzwerte*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, und entscheiden Sie, ob die Funktion in 0 stetig fortsetzbar ist.

(a) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(b) $f\colon [-1, 0) \cup (0, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Regel von L'Hospital erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(\cos x)^2} - \cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin x}{(\cos x)^3} + \sin x}{6x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2(\cos x)^4 + 2(\sin x)3(\cos x)^2 \sin x}{(\cos x)^6} + \cos x}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion f ist in 0 mit dem Wert $\frac{1}{2}$ stetig fortsetzbar.

(b) Die Funktionen $\sqrt{1+x}$, $\sqrt[3]{1+x}$ und $\sqrt[4]{1-x}$ sind in $x = 0$ stetig, also

$$\lim_{x\to 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Mit der Regel von L'Hospital erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{4}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

In der letzten Gleichung haben wir die Stetigkeit von $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ und $(1-x)^{-\frac{3}{4}}$ in $x = 0$ benutzt.

Die Funktion f ist in 0 mit dem Wert $\frac{4}{3}$ stetig fortsetzbar.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 89. *Richtungsableitungen*

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto x^\mathsf{T} A x$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie für $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Ableitungen $\partial_v f(x)$, $\partial_w f(x)$ längs v beziehungsweise w in Abhängigkeit von x.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\tilde{v}} f(x)$ für $\tilde{v} := \frac{v}{|v|}$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösungshinweise hierzu: Für jede der Teilaufgaben gibt es mehrere Lösungmöglichkeiten. Im folgenden sind zwei gesamtkonzeptionell sinnvolle Wege ausgeführt, weitere Alternativen für einzelne Teilaufgaben gibt es im Anschluss. Selbstverständlich kann man für die Lösung der Gesamtaufgabe die dargebrachten Lösungsansätze beliebig kombinieren.

Lösungsweg I:

(a) Wir wenden zuerst Definition 4.3.11 auf $\partial_u f(a)$ direkt an, ohne A, a oder u zu spezifizieren. Dies erspart uns im späteren Verlauf dieser Aufgabe sowie bei zukünftigen ähnlichen Aufgaben/Problemstellungen Rechenarbeit:

$$\begin{aligned}
\partial_u f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(a+hu)^\mathsf{T} A(a+hu) - a^\mathsf{T} A a}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^\mathsf{T} A a + h u^\mathsf{T} A a + h a^\mathsf{T} A u + h^2 u^\mathsf{T} A u - a^\mathsf{T} A a}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} a^\mathsf{T} \left(A + A^\mathsf{T}\right) u + h u^\mathsf{T} A u = a^\mathsf{T} \left(A + A^\mathsf{T}\right) u.
\end{aligned}$$

Somit gelten für v, w und beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\partial_v f(x) &= x^\mathsf{T} \left(A + A^\mathsf{T}\right) v = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4x_1 - 4x_2 - 4x_3
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_w f(x) &= \ldots = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = 3x_1 - 8x_2 + 7x_3.\end{aligned}$$

(b) Wegen $\partial_{tu} f(x) = t\partial_u f(x)$ erhalten wir für die Richtungsableitung direkt ($\tilde{v} = \frac{1}{|v|} \cdot v$ mit $|v| = 3$):

$$\partial_{\tilde{v}} f(x) = \frac{1}{|v|}\partial_v f(x) = \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3.$$

(c) Wir nutzen Satz 4.3.12: Da $f(x)$ als Polynom (in x_1, x_2, x_3) in $C^k(\mathbb{R}^3)$ für alle k ist, gilt für jeden Punkt a und jedes $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}0 = \partial_u f(a) - \operatorname{grad} f(a) \bullet u &\overset{\text{a)}}{=} a^\intercal \left(A + A^\intercal\right) u - \operatorname{grad} f(a)^\intercal u = \\ &= \left((A + A^\intercal)a - \operatorname{grad} f(a)\right)^\intercal u\end{aligned}$$

Da dies für alle u gilt, können wir $\operatorname{grad} f(x) = \left(A + A^\intercal\right) x$ folgern. Insbesondere ist:

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Lösungsweg II:

(a) Wir berechnen $f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned}f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

und gemäß 4.3.12

$$\partial_v f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 & 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$
$$= 4x_1 - 4x_2 - 4x_3,$$
$$\partial_w f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 & 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 3x_1 - 8x_2 + 7x_3.$$

(b) Wir nutzen unser zuvor berechnetes $\nabla f(x)$ und bilden das Skalarprodukt mit $\tilde{v} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\partial_{\tilde{v}} f(x) = \langle \nabla f(x) \,|\, \tilde{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 + x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= \ldots =$$
$$= \frac{1}{3}(4x_1 - 4x_2 - 4x_3) = \frac{4}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3.$$

(c) Wir setzen $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\nabla f(x) = \left(\begin{smallmatrix} 2x_1+2x_2+x_3 \\ 2x_1-4x_2+2x_3 \\ x_1+2x_2+4x_3 \end{smallmatrix}\right)$ ein:

$$\nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Weitere Lösungsansätze ausgewählter Teilaufgaben:

(a) Wir gehen vor wie in P78 und berechnen analog zu oben

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2,$$

entsprechend gilt für $h \in \mathbb{R}$

$$f \begin{pmatrix} x_1 + 2h \\ x_2 + h \\ x_3 - 2h \end{pmatrix} = (x_1 + 2h)^2 + 2(x_1 + 2h)(x_2 + h) + (x_1 + 2h)(x_3 - 2h)$$
$$- 2(x_2 + h)^2 + 2(x_2 + h)(x_3 - 2h) + 2(x_3 - 2h)^2 =$$
$$= x_1^2 + 4x_1h + 4h^2 + 2x_1x_2 + 2x_1h + 4x_2h + 4h^2$$
$$+ x_1x_3 - 2x_1h + 2x_3h - 4h^2 - 2x_2^2 - 4x_2h - 2h^2$$
$$+ 2x_2x_3 - 4x_2h + 2x_3h - 4h^2 + 2x_3^2 - 8x_3h + 8h^2 =$$
$$= \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2}_{=f(x)}$$
$$+ 4x_1h - 4x_2h - 4x_3h + 6h^2$$

und es folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4x_1h-4x_2h-4x_3h+6h^2}{h}=4x_1-4x_2-4x_3.$$

Analog für w:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1-h\\ x_2+2h\\ x_3+1h\end{pmatrix} &= (x_1-h)^2+2(x_1-h)(x_2+2h)+(x_1-h)(x_3+h)\\ &\quad -2(x_2+2h)^2+2(x_2+2h)(x_3+h)+2(x_3+h)^2=\\ &= x_1^2-2x_1h+h^2+2x_1x_2+4x_1h-2x_2h-4h^2\\ &\quad +x_1x_3+x_1h-x_3h-h^2-2x_2^2-8x_2h-8h^2\\ &\quad +2x_2x_3+2x_2h+4x_3h+4h^2+2x_3^2+4x_3h+2h^2=\\ &= x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3-2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2\\ &\quad +3x_1h-8x_2h+7x_3h-6h^2, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x_1h-8x_2h+7x_3h-6h^2}{h}=3x_1-8x_2+7x_3.$$

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1+\frac{2}{3}h\\ x_2+\frac{1}{3}h\\ x_3-\frac{2}{3}h\end{pmatrix} &= \ldots =\\ &= x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3-2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2\\ &\quad +\frac{4}{3}x_1h-\frac{4}{3}x_2h-\frac{4}{3}x_3h+\frac{2}{3}h^2 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\tilde{v})-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{3}x_1h-\frac{4}{3}x_2h-\frac{4}{3}x_3h+\frac{2}{3}h^2}{h}=\frac{4}{3}x_2-\frac{4}{3}x_2-\frac{4}{3}x_3.$$

Lösungsweg II mag naheliegender erscheinen und auch der Gradient scheint schneller ersichtlich - es bedarf trivialierweise keiner weiteren Begründung, warum wir aus dem Ergebnis ∇f ablesen können.
Dafür können wir Lösungsweg I leichter für ähnliche Funktionen mit anderer Systemmatrix A „recyclen“: Für ∇f müssen wir in Zukunft nur noch $A+A^\mathsf{T}$ berechnen und anschließend mit dem Vektor x oder - bei Auswertung in einem Punkt a - mit a multiplizieren. Dies ist insbesondere bei höheren Dimensionen aufgrund der Übersichtlichkeit weniger Fehleranfällig.

Aufgabe H 90. *Partielle und totale Differenzierbarkeit*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) & , \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 1 & , \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f$ an der Stelle $\binom{0}{0}$ existieren.

(b) Ist f in $\binom{0}{0}$ stetig? Ist f an dieser Stelle total differenzierbar?

(c) Geben Sie $\nabla f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wenden Definition 4.3.1 an:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\begin{pmatrix}0+h\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp\left(\dfrac{h^3-0}{h^2}\right)-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} =$$

Hier liegt „$\frac{0}{0}$“ vor $\rightarrow$ Wir wenden l'Hospital an

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)}{1} = 1 = \frac{\partial}{\partial x} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=0}.$$

Für $\frac{\partial}{\partial y} f$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\begin{pmatrix}0\\0+h\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp\left(\dfrac{0}{h^2}\right)-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = \frac{\partial}{\partial y} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=0}.$$

(b) Wir betrachten f entlang der ersten Winkelhalbierenden, also der durch $x=y$ gegebenen Geraden. Es gilt für $x \neq 0$:

$$f\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} = \exp\left(\frac{x^3-x^2}{x^2+x^2}\right) = \exp\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Da somit

$$\lim_{x\to 0} f\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ist, ist f in $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ nicht stetig und somit auch nicht total differenzierbar nach Bemerkung 4.4.5.

(c) Wir müssen nur noch die partiellen Ableitungen für $x, y \neq 0$ bestimmen. Wegen $x^2+y^2>0$ können wir hierfür Quotienten- und Kettenregel anwenden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x} \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \left(\frac{(3x^2-y)\cdot(x^2+y^2)-(x^3-xy)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{x^4+3x^2y^2+x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial}{\partial y} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial y} \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \left(\frac{(-x)\cdot(x^2+y^2)-(x^3-xy)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{-2x^3y-x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Somit ist ∇f

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^4+3x^2y^2+x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2x^3y-x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} & , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} .$$

Aufgabe H 91. *Schmiegquadriken*

Gegeben seien die Stellen $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ sowie die Funktion

$$f\colon [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \cos(x_1)\sin(x_2).$$

(Ein um $\frac{\pi}{2}$ in x_2-Richtung verschobenes Modell finden Sie unter https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/.)

(a) Bestimmen Sie $T_2(f,x,P_1)$ und $T_2(f,x,P_2)$.

(b) Bestimmen Sie den Typ von $\tilde{P} := \left(\frac{\pi}{4}, 0, f\left(\begin{smallmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ gemäß 4.4.17.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x_1)\sin(x_2) \\ \cos(x_1)\cos(x_2) \end{pmatrix}$$

und dementsprechend

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x_1)\sin(x_2) & -\sin(x_1)\cos(x_2) \\ -\sin(x_1)\cos(x_2) & -\cos(x_1)\sin(x_2) \end{pmatrix} .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} T_2\left(f, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\intercal} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathrm{H}f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2\left(f, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla f \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix}^{\intercal} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\pi}{4} \\ x_2 \end{pmatrix} \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - \frac{\pi}{4} & x_2 \end{pmatrix} \mathrm{H}f\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\pi}{4} \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\pi}{4} \\ x_2 \end{pmatrix} \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - \frac{\pi}{4} & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\pi}{4} \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right) x_2. \end{aligned}$$

(b) Für die Schmiegquadrik Q muss gelten

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right)x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2.$$

oder äquivalent

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x_2 + x_3 = 0.$$

Folglich ist Q gegeben durch

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\right\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ c = 0.$$

Die Eigenwerte gegeben durch

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4},\ \lambda_3 = 0,$$

womit wir Q direkt als parabolisches Paraboloid identifizieren. (Wenn wir nun den Algorithmus zur Hauptachsentransformation anwenden (6.3 im Skript zur linearen Algebra), so werden lineare Termine nur dann verschwinden, wenn Sie mittels quadratischer Ergänzung mit einem quadratischen Teil verrechnet werden können, d. h. die Quadrik wird bezüglich der dritten Komponenten linear bleiben. Da ferner die Eigenwerte λ_1 und λ_2 unterschiedliche Vorzeichen haben, kann nach Skalierung der Achsen (und Variablenumbenennung) die affine Normalform nur die Gestalt $z_1^2 - z_2^2 + 2z_3 = 0$ haben.) Folglich ist $\tilde{P}$ ebenfalls hyperbolisch.

Aufgabe H 92. *parameterabhängige Funktion*

Gegeben seien die von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Menge $M_t := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid ty < 1\}$, die Funktion $f_t\colon M_t \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{x^3}{1+y(y-t)}$ und die Stelle $a = \binom{1}{0} \in M_t$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f_t\binom{x}{y}$ für $\binom{x}{y} \in M_t$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{H}f_t\binom{x}{y}$ für $\binom{x}{y} \in M_t$.

(c) Bestimmen Sie $T_2\left(f_t, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), a\right)$ sowie $T_3\left(f_0, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), a\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten

$$\frac{\partial}{\partial x}f_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3x^2}{1+y(y-t)}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}f_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-x^3\left(2y-t\right)}{\left(1+y(y-t)\right)^2},$$

mithin also

$$\nabla f_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3x^2}{1+y(y-t)} \\ \dfrac{-x^3\left(2y-t\right)}{\left(1+y(y-t)\right)^2} \end{pmatrix}.$$

(b) Wir leiten weiter ab und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{6x}{1+y(y-t)} \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{-3x^2\,(2y-t)}{\left(1+y(y-t)\right)^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{-2x^3\left(1+y(y-t)\right)^2 + 2x^3\left(1+y(y-t)\right)(2y-t)^2}{\left(1+y(y-t)\right)^4} = \\
&= \frac{2x^3\left(3y^2-3ty+t^2-1\right)}{\left(1+y(y-t)\right)^3},
\end{aligned}$$

mithin

$$\mathrm{H}f_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6x}{1+y(y-t)} & \dfrac{-3x^2\,(2y-t)}{\left(1+y(y-t)\right)^2} \\ \dfrac{-3x^2\,(2y-t)}{\left(1+y(y-t)\right)^2} & \dfrac{2x^3\left(3y^2-3ty+t^2-1\right)}{\left(1+y(y-t)\right)^3} \end{pmatrix}$$

(c) Für $T_2\left(f_t, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), a\right)$ müssen wir nur noch einsetzen:

$$\begin{aligned}
T_2\left(f_t, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), a\right) &= f_t(a) + \nabla f_t(a)^\intercal \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\right)^\intercal \mathrm{H}f_t(a)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\right) = \\
&= 1 + \begin{pmatrix} 3 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3t \\ 3t & 2\left(t^2-1\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \\
&= 1 + 3(x-1) + ty + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 + 6t(x-1)y + 2(t^2-1)y^2\right) = \\
&= 1 + 3(x-1) + ty + 3(x-1)^2 + 3txy + (t^2-1)y^2.
\end{aligned}$$

Für $T_3\left(f_0, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), a\right)$ nutzen wir, dass wir auf die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
h_1 &: M_t \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f_0\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \\
h_2 &: M_t \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f_0\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

ebenfalls den Satz von Schwarz anwenden können und erhalten sukzessive (vgl. Bemerkung zu Multindizes):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Setzen wir also $v := \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - a$, so erhalten wir mit 4.4.11 ($x \mathrel{\hat{=}} x_1, y \mathrel{\hat{=}} x_2$)

$$\begin{aligned}
\partial_v^3 f_0(a) =& \frac{\partial^3}{\partial x^3} f_0(a)(x-1)^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f_0(a)(x-1)^2 y \\
&+ 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f_0(a)(x-1)y^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} f_0(a) y^3.
\end{aligned}$$

Hierbei gelten (wir setzen $t = 0$ in $\mathrm{H}f_t$ ein und leiten weiter ab):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial x^3} f_0(a) &= \left.\frac{6}{1+y^2}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} &&= 6,\\
\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f_0(a) &= \left.\frac{-6x\cdot 2y}{(1+y^2)^2}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} &&= 0,\\
\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f_0(a) &= \left.\frac{6x^2\left(3y^2-1\right)}{\left(1+y^2\right)^3}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} &&= -6,\\
\frac{\partial^3}{\partial y^3} f_0(a) &= \left.\frac{12x^3y(1+y^2)^3 - 12x^3y(3y^2-1)\left(1+y^2\right)^2}{(1+y^2)^6}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} &&= 0.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir (v wie oben)

$$\begin{aligned}
T_3\left(f_0, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), a\right) &= T_2\left(f_0, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), a\right) + \frac{1}{3!}\partial_v^3 f_0(x) = \\
&= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 - y^2 + (x-1)^3 - 3(x-1)y^2.
\end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 93. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det\left(A - \lambda E_2\right) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= \\
&= (4-\lambda)(1-\lambda) - 10 = \\
&= 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (und damit die Eigenwerte) sind $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -1$.

(b) Wir bestimmen nicht-triviale Lösungen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ des Systems $(A - \lambda_{1|2}E_2)v = 0$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 : \quad & \left[\begin{array}{rr||r} -2 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\\
\lambda_2 : \quad & \left[\begin{array}{rr||r} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eine gesuchte Basis ist also durch $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\-5\end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

(c) Es gilt aufgrund der Blocksdreiecksform der Matrix:

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda E_3) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= \left((1-\lambda)(-\lambda)-1\right)(1-\lambda) = \\ &= \left(\lambda^2-\lambda-1\right)(1-\lambda)\end{aligned}$$

Hieraus bestimmen wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

(d) Erneut bestimmen wir nicht-triviale Lösungen v_1, v_2, v_3 von $(B-\lambda_{1|2|3}E_3)v = 0$.

λ_1 :

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_1 \leftrightarrow Z_2: \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_1 + Z_2: \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für λ_2 und λ_3 nutzen wir den Zusammenhang $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$.

λ_2 :

$$\left[\begin{array}{rrr||r} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}Z_1: \\ Z_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}Z_1: \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

λ_3 :

$$\left[\begin{array}{rrr||r} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\frac{1-\sqrt{5}}{2}Z_1: \\ Z_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}Z_1: \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine gesuchte Basis ist folglich durch $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 94. *3D-Modell*

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x(x-3)(x+3)(y-2)(y+2)(x^2+2y^2-4)$ sowie die Mengen $A := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+2y^2-4 \leqq 0 \right\}$ und $B := [-3,3] \times [-2,2]$. Die Elemente von $N = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{39}{10} - \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{39}{10} - \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{39}{10} + \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{39}{10} + \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sind kritische Stellen der Funktion f (es gibt aber offensichtlich noch weitere). Ein 3D-Modell, mit welchem Sie argumentieren dürfen (und sollen), finden Sie hier: https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/09/.

(a) Identifizieren Sie A im Modell (beschreiben Sie diese Menge in Worten). Genau vier kritische Stellen der Funktion f sind Elemente von A. Benutzen Sie N und die Nullstellenmenge von f, um diese kritischen Stellen zu finden.

(b) Bestimmen Sie die relativen Extremalstellen der Einschränkung $f|_A$ von f auf A. Entscheiden Sie auch, ob an diesen Stellen relative Maxima oder relative Minima vorliegen.

(c) Welche der in (b) bestimmten Stellen sind relative Extremalstellen für $f|_B$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bei der Menge A handelt es sich um die „Ellipsenscheibe", spricht die durch $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ beschriebene Ellipse inklusive der dadurch begrenzten Fläche. Zwei der kritischen Stellen, a_1 und a_2 finden wir als die Schnittpunkte zweier Niveaulinien, namentlich der durch $x^2+2y^2-4=0$ und der durch $x=0$ gegebenen:
Diese lauten $a_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$ und $a_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$.
Die restlichen beiden finden wir als Elemente von N: Für $a_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{39}{10} - \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $a_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{39}{10} - \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $0 \geqq \frac{39}{10} - \frac{3\sqrt{89}}{10} - 4$ und damit $a_3, a_4 \in A$.

(b) In a_3 hat $f|_A$ ein relatives Maximum, in a_4 ein relatives Minimum: Es sind kritische Punkte im inneren einer kompakten Menge, deren Rand eine Niveaulinie von f zum Niveau 0 ist. Kombiniert man nun die im Modell sichtbare Vorzeichenverteilung mit dem Satz von Minimum und Maximum, folgt die Behauptung.
Aus der Vorzeichenverteilung sowie dem Verhalten auf dem Rand von A folgt ferner: Alle $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \partial A$ mit $x \lneqq 0$ sind relative Minimalstellen von $f|_A$, alle $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \partial A$ mit $0 \gneqq x$ sind relative Maximalstellen $f|_A$.

(c) Da $A \subsetneqq B$ gilt, sind die relativen Extremalstellen von $f|_A$ im Innneren von A, a_3 und a_4, auch relative Extremalstellen von $f|_B$.
Aus der Vorzeichenverteilung ergibt sich ferner, dass die relativen Extremalstellen von $f|_A$ auf dem Rand von A <u>keine</u> Extremalstellen von $f|_B$ sind.

Aufgabe H 95. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x-2)(x+2)y(y-2)$ sowie die Mengen $A := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1 \right\}$ und $B := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y - 2 = 0 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f|_A$ sowie deren Typ.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f|_B$ sowie deren Typ.

Lösungshinweise hierzu: Für jede der Teilaufgaben gibt es im Wesentlichen zwei mögliche Lösungwege. Lösungsweg I zeigt die Lösung mithilfe der Lagrange-Methode, Lösungsweg II verwendet Parametrisierungen.

Lösungsweg I:

(a) Wir stellen das Gleichungssystem nach Lagrange auf. Hierzu schreiben wir die Nebenbedingung um zu $g_A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ mit $g_A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right):=x^2+(y-1)^2-1$. Mit

$$\nabla f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy(y-2)\\2(x^2-4)(y-1)\end{pmatrix},\qquad \nabla g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2(y-1)\end{pmatrix}$$

lautet das Gleichungssystem aus 4.6.3

$$\begin{array}{lrcll}(1) & x^2+(y-1)^2-1 & = & 0 & \text{(Nebenbedingung)}\\ (2) & 2xy(y-2)+2\lambda x & = & 0 & \text{(Multiplikator in der } x\text{-Komponente)}\\ (3) & 2(x^2-4)(y-1)+2\lambda(y-1) & = & 0 & \text{(Multiplikator in der } y\text{-Komponente)}\end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lrcl}(1^*) & x^2+(y-1)^2-1 & = & 0\\ (2^*) & 2x\,(y(y-2)+\lambda) & = & 0\\ (3^*) & 2\,(x^2-4+\lambda)\,(y-1) & = & 0\end{array}$$

Wir betrachten die folgenden Fälle:

- $x=0$: In diesem Falle folgt aus (1^*) $y=0$ oder $y=2$. Da die 2. Zeile sowieso 0 ist, können wir aus der Lösbarkeit der Gleichung folgern (3^*), dass $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right)$ kritische Stellen sind. (Der Lagrange-Multiplikator ist in beiden Fällen $\lambda=4$.)
  Für die Frage, ob hier Extrema liegen, stellen wir zuerst fest, dass A eine Teilmenge von $[-2,2]\times[0,2]$ ist. Dies ist insofern von Bedeutung, da für $-2\leqq x\leqq 2$ und $0\leqq y\leqq 2$ die Funktion keine negativen Werte annimmt ($(x-2)(x+2)\leqq 0$ und $y(y-2)\leqq 0$). Wegen $f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ besitzt $f|_A$ in den gefunden Stellen Minima.
- $x\neq 0,\ y\neq 1$. In diesem Falle folgt aus (2^*)
  $$0=y^2-2y+\lambda=(y-1)^2-1+\lambda,$$
  aus (3^*) hingegen
  $$x^2=4-\lambda.$$
  Addiert man diese beiden Zeilen auf, ergibt sich $4-\lambda=\lambda$ und somit $\lambda=2$. Für diesen Wert von λ kann Gleichung (2^*) nicht 0 werden: y^2-2y+2 hat keine reellen Lösungen.
- $x\neq 0,\ y=1$. In diesem Falle folgt aus (1^*) sofort $x=\pm 1$. Aus (2^*) würde $\lambda=1$ folgen, d. h. das System ist lösbar.
  Letzteres müssen wir aber für die Bestimmung der Maxima nicht zeigen: Nach Satz 4.2.18 existiert mindestens ein relatives Maximum. Da der Gradient der Nebenbedingung unter der Voraussetzung $x^2+(y-1)^2-1$ nicht der Nullvektor sein kann, können keine Extrema ohne zugehörigen Lagrange-Multiplikator existieren. Folglich muss, da die Funktion auf A offensichtlich nicht konstant ist, in mindestens einem der Punkte $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ein lokales Maximum vorliegen. (Dies sind die einzigen Punkte, die durch die vorherigen Fälle nicht abgedeckt wurden.) Wegen $f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=3=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ hat $f|_A$ in beiden Punkten ein relatives Maximum.

Mit dem Argument aus dem letzten Punkt, dass der Gradient der Nebenbedingung an keiner zulässigen Stelle der Nullvektor ist und somit alle relativen Extrema den Lagrange-Bedingungen genügen müssen, können wir auch begründen, dass wir alle relativen Extremalstellen gefunden haben.

(b) Wir beschreiben die Nebenbedingung durch $g|_B \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + 2y - 2$ und halten zunächst fest, dass der Gradient dieser Funktion nie der Nullvektor wird, auch hier sind sämtliche relativen Extremalstellen durch die Lösungen des Lagrange-Systems „abgedeckt“. Wir stellen das Gleichungssytem nach Lagrange auf:

$$\begin{array}{lrcll} (1) & x + 2y - 2 & = & 0 & \text{(Nebenbedingung)} \\ (2) & 2xy(y-2) + \lambda & = & 0 & \text{(Multiplikator in der } x\text{-Komponente)} \\ (3) & 2(x^2-4)(y-1) + 2\lambda & = & 0 & \text{(Multiplikator in der } y\text{-Komponente)} \end{array}$$

Aus (1) folgt $y = -\frac{x}{2} + 1$, womit wir aus (2) und (3) die Gleichungen

$$\begin{array}{lrcl} (4) & x(1-x)(-\frac{x}{2} - 1) + \lambda & = & 0 \\ (5) & -x(x^2-4) + 2\lambda & = & 0 \end{array}$$

erhalten. Multiplizieren wir nun (4) mit 2 und subtrahieren (5), erhalten wir

$$0 = x(x^2-4) + x(x^2-4) = 2x(x^2-4).$$

Hieraus folgern wir sofort $x \in \{-2, 0, 2\}$.

- Für $x = \pm 2$ folgt aus (3) $\lambda = 0$. Für $x = -2$ folgt aus (1) $y = 2$ und für $x = 2$ aus (1) $y = 0$. In beiden Fällen ist (2) erfüllt.
- Für $x = 0$ folgt aus (2) $\lambda = 0$ und aus (1) $y = 1$.

Die kritischen Stellen und damit - nach unserer Vorarbeit - auch alle möglichen Extremalstellen sind also

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bei der Bestimmung der jeweiligen Typen müssen wir aufpassen: Da B nicht beschränkt ist, lässt sich der Satz von Minimum und Maximum nicht direkt anwenden. Wir können ihn jedoch auf die Teilmenge $S \subsetneq B$ mit

$$S = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \text{ für ein } t \in [0,1]\}$$

anwenden. (Dies ist die Strecke, welche a_1 und a_3 verbindet.)
Diese Menge ist als Bild einer kompakten Menge ($[0,1]$) unter einer stetigen Abbildung ($t \mapsto a_1 + t(a_3 - a_1)$) kompakt. Folglich werden auf S Minimum und Maximum angenommen.
Als Extremalstellen kommen jedoch nur a_1, a_2 und a_3 in Frage, jede relative Extremalstelle ungleich a_1 oder a_3 wäre auch eine relative Extremalstelle von B: Für jede solche ist der Schnitt von B mit einer Hinreichend kleinen Umgebung komplett in S enthalten. (Dies ist für a_1 und a_3 nicht der Fall, daher erfordern diese Punkte eine Sonderbehandlung.)
Einsetzen liefert $f(a_1) = f(a_3) = 0 \neq 4 = f(a_2)$, woraus wir folgern können das f auf S nicht konstant. Dies impliziert zwei Dinge:

(i) In a_2 hat $f|_S$ und damit nach obigem Argument auch $f|_B$ - jeder Schnitt einer hinreichend kleinen Umgebung mit B liegt vollständig in S - ein (in letzterem Fall relatives) Maximum.

(ii) In a_1 und a_3 hat $f|_S$ Minima, da keine weiteren Kandidaten für Extremalstellen existieren.

Im zweiten Fall müssen wir noch untersuchen, ob diese Punkte auch relative Minimalstellen von $f|_B$ sind.
Hierzu beobachten wir, dass wegen der Nebenbedingung $y \to +\infty$ für $x \to -\infty$ folgt und $y \to -\infty$ für $x \to \infty$. Schreiben wir nun f für $x \neq 0$, $y \neq 0$ um zu

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right),$$

so erkennen wir, dass für x und y (betragsmäßig) hinreichend groß das Verhalten von f durch die quadratischen Terme bestimmt wird und durchwegs positiv ist. (Die restlichen Faktoren nähern sich jeweils 1 an.)
Inbsesondere finden wir Stellen $a_4 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$, $a_5 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$ mit $x_1 < -2$, $x_2 > 2$, sodass $f(a_4) \geqq \max(f|_S)$ und $f(a_5) \geqq \max(f|_S)$ gelten. Die Verbindungsstrecke von a_4 und a_5,

$$\tilde{S} = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = a_4 + t(a_5 - a_4) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \text{ für ein } t \in [0,1]\},$$

ist kompakt und enthält relative Minimal- und Maximalstellen. Analog zu oben kommen für diese nur die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 in Frage.

- a_2 ist als relative Maximalstelle von $f|_S$ auch relative Maximalstelle von $f|_{\tilde{S}}$, da für jede hinreichend kleine Umgebung von a_3 der Schnitt mit $\tilde{S}$ vollkommen in S enthalten ist. Insbesondere kann hier, da $f|_{\tilde{S}}$ nicht konstant ist, kein Minimum vorliegen.
- Nach Konstruktion gelten $f(a_4) \geqq \max(f(a_1), f(a_3))$, $f(a_5) \geqq \max(f(a_1), f(a_3))$, folglich kommen diese ebenfalls nicht als Minimalstellen in Frage, es bleiben nur a_1 und a_3 als mögliche Kandidaten übrig. Da $f(a_1) = f(a_3)$ gilt, wird in **beiden** das Minimum angenommen.

Somit hat $f|_B$ in $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ein relatives Maximum, in $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ relative Minima.

Lösungsweg II:

(a) Wir erkennen, dass die Nebenbedingung einen Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ beschreibt. Daher können wir A mittels $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t)+1 \end{smallmatrix}\right)$ parametrisieren. Die Bestimmung der Extrema von $f|_A$ entspricht damit der Bestimmung der Extrema von $f \circ C$. Es gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ C)(t) &= \left((\cos(t))^2 - 4\right)\left((\sin(t))^2 - 1\right) \\ &= \left((\cos(t))^2 - 4\right)\left(-(\cos(t))^2\right) \\ &= 4(\cos(t))^2 - (\cos(t))^4 . \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} (f \circ C)'(t) &= 4\left(2\cos(t) - (\cos(t))^3\right)(-\sin(t)) \\ &= -4\sin(t)\cos(t)\left(2 - (\cos(t))^2\right) \\ &= -4\sin(t)\cos(t)\left(1 + (\sin(t))^2\right) . \end{aligned}$$

Die Nullstellenmenge der Ableitung ist $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$. Analog zu oben folgern wir, dass $C(t)$ in $t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ lokale Minima hat: An diesen Stellen gilt $(f \circ C)(t) = 0$, für t beliebig gilt $(f \circ C)(t) \geqq 0$. (Man beachte $(\cos(t))^2 \geqq (\cos(t))^4$.)
Nach dem Satz von Minimum und Maximum nimmt $(f \circ C)$ auf $[0, 2\pi]$ aber auch (mind.) ein Maximum an: Hierfür kommt neben dem Rand nur $t = \pi$ in Frage. Wegen $(f \circ C)(0) = (f \circ C)(2\pi) = 3 = (f \circ C)(\pi)$ ist dies sowohl auf dem Rand als auch in $t = \pi$ der Fall. Setzen wir die gefundenen Werte für t in C ein, erhalten wir $\binom{0}{0}$ und $\binom{0}{2}$ als relative Minimalstellen von $f|_A$, $\binom{1}{1}$ und $\binom{-1}{1}$ als relative Maximalstellen von $f|_A$. Dass dies tatsächlich alle relativen Extremalstellen sind, folgt aus der Tatsache, dass die Ableitung der stetig differenzierbaren Funktion $f \circ C$ keine weiteren Nullstellen hat. (Die Randpunkte von $[0, 2\pi]$ haben wir berücksichtigt.)

(b) Wir lösen die Nebenbedingung $x + 2y - 2 = 0$ nach y auf und erhalten $y = -\frac{x}{2} + 1$. Nun können wir $f|_B$ durch die Substitution $t := x$ als Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= (t^2 - 4)\left(-\frac{t}{2} + 1\right)\left(-\frac{t}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(t^2 - 4\right)^2.\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\tilde{f}'(t) = t\left(t^2 - 4\right)$$

schreiben. Die Nullstellen der Ableitung sind $t_1 = -2$, $t_2 = 0$ und $t_3 = 2$. In t_1 und t_3 nimmt $\tilde{f}$ wegen $f(t_1) = f(t_2) = 0$ offensichtlich ($\tilde{f} \geqq 0$) ein relatives (sogar globales) Minimum an. Da $\tilde{f}$ auf dem Intervall $[-2, 2]$ ferner ein Maximum besitzen muss und nicht konstant ist, liegt dieses in $t_2 = 0$ vor. Wir erhalten: $f|_B$ hat in $\binom{-2}{2}$ und $\binom{2}{0}$ relative Minima, in $\binom{0}{1}$ hingegen ein relatives Maximum. Weitere Extrema gibt es nicht, da die Funktion stetig differenzierbar ist und die Ableitung keine weiteren Nullstellen hat.

Aufgabe H 96. *Parameterabhängige Funktion*

Gegeben seien der Parameter $t \in \mathbb{R}$ sowie $f_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + 42$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f_t(x)$ und $\mathrm{H} f_t(x)$. **(b)** Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat f_t kritische Stellen?

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei diesen um lokale Extremalstellen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) *Lösungsweg I*:
Wir schreiben $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = 42$. Nun müssen wir nur noch den Gradienten des linearen Terms bestimmen: Die Konstante entfällt bei der Ableitung, für den quadratischen Teil $x \mapsto x^T A_t x$ kennen wir infolge von H89, Lösungsweg I, den Gradienten an der stelle x bereits: Er ist gegeben durch $(A_t + A_t^\intercal)y = 2A_t x$. Der Gradient von $x \mapsto 2b^\intercal x (= 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3)$ an x ist aber genau $2b$, also gilt:

$$\nabla f(x) = 2A_t x + 2b = 2\left(A_t x + b\right).$$

Nun bestimmen wir die Ableitung $\partial_v^2(a)$ von $x \mapsto x^\mathsf{T} A_t x + 2b^\mathsf{T} x + c$ entlang $v = x - a$ mittels 4.2.11, ohne A_t, b, c, x oder a zu spezifizieren (vgl. Lsg. zu H89):

$$\begin{aligned}\partial_v^2 f_t(a) = \partial_v\left(\partial_v f_t\right)(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\partial_v f(a+th) - \partial_v(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\left(A_t(a+hv)+b\right)^\mathsf{T} v - 2\left(A_t a + b\right)^\mathsf{T} v}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2v^\mathsf{T} A_t v = 2v^\mathsf{T} A_t v,\end{aligned}$$

und wir können aus Satz 4.4.19 (Eindeutigkeit der Taylorentwicklung) sowie $T_2(f_t, a + v, a) = f_t(a) + \nabla f_t(a)^\mathsf{T} v + \frac{1}{2} v^\mathsf{T} \mathrm{H} f_t(a) v$ folgern, dass

$$v^\mathsf{T}(2A_t - \mathrm{H}f_t(a))v = 0$$

für alle v gilt. (Da f_t eine C^2 Funktion ist und somit $\mathrm{H}f_t$ symmetrisch sein muss, ist $2A_t - \mathrm{H}f_t\,(a)$ ebenfalls symmetrisch und lässt sich somit reell diagonalisieren. Setzen wir für v die Eigenvektoren ein, so erkennen wir: $2A_t - \mathrm{H}f_t\,(a)$ hat einen einzigen Eigenwert: $\lambda = 0$. Die beiden Matrizen sind also identisch. Da dies für alle a gilt, folgt $\mathrm{H}f_t\,(x) = 2A_t$).

Lösungsweg II: Wir multiplzieren aus:

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 42 \\ &= x_1^2 + 2tx_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 42.\end{aligned}$$

Somit ergeben sich:

$$\begin{aligned}\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x_1 + 2tx_3 \\ 4x_2 \\ 2x_3 + 2tx_1 + 2 \end{pmatrix} = 2(A_t x + b), \\ \mathrm{H}f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2t \\ 0 & 4 & 0 \\ 2t & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A_t.\end{aligned}$$

(b) Kritische Stellen sind $x \in \mathbb{R}^3$, welche nach (a) die Gleichung $A_t x = -b$ lösen. Da wir wissen, dass für $\det(A_t) \neq 0$ auf jeden Fall solch ein x (und nur eins) existiert, müssen wir nur die Fälle überprüfen, in denen $\det(A_t) = 0$ ist. Wegen $\det(A_t) = 2 - 2t^2 = 2(1 - t^2)$ ist dies nur für $t = \pm 1$ der Fall. Stellen wir die entsprechenden Systeme auf,

$$\begin{aligned} t = 1: \quad & \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \\ t = -1: \quad & \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \end{aligned}$$

so erkennen wir jeweils anhand der ersten und letzten Zeile, dass f_t nur für $t \neq \pm 1$ kritische Stellen hat.

(c) Bezeichne a_K die (eindeutige) kritische Stelle von f_t. Gemäß (a) ist die Hessematrix an der kritischen Stelle $\mathrm{H}f_t\,(a_K) = 2A_t$. Wir wollen 4.5.5 anwenden und bestimmen die Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathrm{H}f_t\,(a_K) - \lambda E_3\right) &= \det\left(2A_t - 2\frac{\lambda}{2}E_3\right) \\
&= 8\left(\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) - t\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)t\right) \\
&= 8\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)\left(\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - t^2\right)
\end{aligned}$$

Ein Eigenwert ist $\lambda_1 = 4$ und somit immer positiv. Die anderen Eigenwerte lösen $1 - \frac{\lambda}{2} = \pm t$, somit gelten

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= 2(1+t), \\
\lambda_3 &= 2(1-t).
\end{aligned}$$

Für $|t| < 1$ hat $\mathrm{H}f_t\,(a_K)$ nur positive Eigenwerte, in a_K liegt ein Minimum vor, die kritischen Stellen sind also lokale Extremalstellen.
Für $|t| > 1$ hat $\mathrm{H}f_t\,(a_K)$ positive und negative EW, in a_K liegt ein Sattelpunkt und somit keine lokale Extremalstelle vor.
Für $|t| = 1$ interessiert uns die Definitheit nicht ...

Aufgabe H 97. *Lagrange-Multiplikatoren*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1 - x_2^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - x_1^3 + x_2^4$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ für f.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen sowie die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren von $f|_D$, wobei $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$ die Niveaumenge von g zum Niveau 0 ist.

(c) Weisen Sie nach, dass bei $\binom{0}{0}$ eine Extremalstelle von $f|_D$ ohne Lagrange-Multiplikator vorliegt. Warum widerspricht dies nicht Satz 4.6.3?

Hinweis: Man kann $g\binom{x_1}{x_2} = 0$ nach x_2^2 auflösen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\nabla f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix},$$

folglich gibt es <u>keine</u> kritischen Stellen.

(b) Wir bestimmen zu allererst $\nabla g\,\binom{x_1}{x_2}$:

$$\nabla g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2+x_2^2) - 3x_1^2 \\ 4x_2(x_1^2+x_2^2) + 4x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & (x_1^2+x_2^2)^2 - x_1^3 + x_2^4 & = & 0 & \text{(Nebenbedingung)} \\
(2) & 1 + \lambda\left(4x_1(x_1^2+x_2^2) - 3x_1^2\right) & = & 0 & \text{(Multiplikator in der } x_1\text{-Komponente)} \\
(3) & -2x_2 + \lambda\left(4x_2(x_1^2+x_2^2) + 4x_2^3\right) & = & 0 & \text{(Multiplikator in der } x_2\text{-Komponente)}
\end{array}$$

Für $x_2 = 0$ vereinfacht sich dieses System zu

$$\begin{aligned} x_1^3(1-x_1) &= 0 \\ 1+\lambda x_1^2(4x_1-3) &= 0 \ , \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

und da $x_1 = 0$ in der zweiten Zeile zu einem Widerspruch führen würde, ist die einzige Lösung dieses Systems $(x_1, x_2, \lambda) = (1, 0, -1)$.
Ist $x_2 \neq 0$, dürfen wir (3) durch $2x_2$ dividieren und erhalten

$$\begin{array}{rrcl} (4) & -1+\lambda\left(2(x_1^2+x_2^2)+2x_2^2\right) & = & 0 \\ (2)+(4) & \lambda\left(4x_1^3+4x_1x_2^2-x_1^2+4x_2^2\right) & = & 0 \end{array}.$$

$\lambda = 0$ können wir wegen (2) ausschließen, x_1 und x_2 erfüllen also

$$\begin{aligned} 4x_1^3+4x_1x_2^2-x_1^2+4x_2^2 &= 0 \\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^2-x_1^3+x_2^4 &= 0. \end{aligned}$$

Wir nutzen den Hinweis: Aus $x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - x_1^3 + x_2^4 = 0$ und $x_2^2 \geqq 0$ folgt

$$\begin{aligned} (5) \qquad x_2^2 &= \frac{-2x_1^2+\sqrt{4x_1^4-4\cdot 2\cdot(x_1^4-x_1^3)}}{4} = \frac{-x_1^2+\sqrt{2x_1^3-x_1^4}}{2} \\ &= \frac{x_1^2}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{x_1}-1}-1\right), \end{aligned}$$

(Dies ist die Mitternachtsformel angewandt auf $2u^2 + 2x_1^2u - x_1^3 + x_1^4 = 0$, wobei x_2^2 durch u ersetzt und die negative Lösung ausgeschlossen wurde.) Insbesondere ist $x_1 \in (0, 1)$, (für $x_1 > 1$ wäre der Ausdruck in der Klammer kleiner als 0). Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} 0 &= 4x_1^3+4x_1\frac{x_1^2}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{x_1}-1}-1\right)-x_1^2+4\cdot\frac{x_1^2}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{x_1}-1}-1\right) \\ &= 4x_1^3-2x_1^3+2x_1\sqrt{2x_1^3-x_1^4}-2x_1^2+2\sqrt{2x_1^3-x_1^4} \\ &= 2x_1^2(x_1-1)+2(x_1+1)\sqrt{2x_1^3-x_1^4} \\ &= 2x_1^2\left((x_1-1)+(x_1+1)\sqrt{\frac{2}{x_1}-1}\right). \end{aligned}$$

und somit unter Berücksichtigung von $0 < x_1 < 1$

$$0 = x_1-1+(x_1+1)\underbrace{\sqrt{\frac{2}{x_1}-1}}_{>1} > x_1-1+x_1+1 = 2x_1 > 0 \lightning.$$

Dementsprechend ist $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ die einzige kritische Stelle von $f|_D$, der Lagrange-Multiplikator ist $\lambda = -1$.

(c) *Lösungsweg I*:

Wir nutzen den Hinweis, erhalten (5) und setzen dies direkt in f ein:

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= x_1 - x_2^2 \\
&= x_1 - \frac{-x_1^2+\sqrt{2x_1^3-x_1^4}}{2} \\
&= \frac{x_1^2}{2} + \frac{2x_1 - x_1\sqrt{2x_1-x_1^2}}{2} \\
&= \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2}\left(2-\sqrt{2x_1-x_1^2}\right) \\
&= \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2}\left(2-\underbrace{\sqrt{1-(1-x_1)^2}}_{\leqq 1}\right) \geqq 0.
\end{aligned}$$

Wegen $f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = 0$ liegt also ein Extremum in $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ vor. Der Lagrange-Multiplikator müsste allerdings der offensichtlich unlösbaren Gleichung

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \nabla f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \lambda\nabla g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

genügen und kann somit nicht existieren. Dies ist jedoch kein Widerspruch zu Satz 4.6.3, da der Gradient von g in $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ der Nullvektor ist.

Lösungsweg II:
Eine alternative Lösung ergibt sich aus dem Satz vom Minimum und Maximum: Aus (5) können wir wie schon vorher $0 \leqq x_1 \leqq 1$ und $-1 \leqq x_2 \leqq 1$ folgern, insbesondere muss D beschränkt sein. Folglich ist D als Niveaumenge einer stetigen Funktion kompakt, es muss also zwei Extremalstellen geben. Die Methode nach Lagrange liefert aber nur eine kritische Stelle: Ein Extremum muss also an einer Stelle sein, an der der Gradient von g,

$$\nabla g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x_1(x_1^2+x_2^2)-3x_1^2\\4x_2(x_1^2+x_2^2)+4x_2^3\end{pmatrix},$$

der Nullvektor ist. Da die zweite Komponente für $x_2 \neq 0$ stets ungleich 0 ist, erhalten wir $x_2 = 0$ und somit aus der ersten Komponenten die Bedingung $x_1^3(4-3x_1) = 0$. Die einzige Lösung auf dem für x_1 zulässigen Intervall $[0,1]$ ist 0. Da folglich der Gradient von g nur an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ der Nullvektor ist, muss das „fehlende" (sprich das mit Lagrange nicht gefundene) Extremum an dieser Stelle sein. Dass kein Lagrange-Multiplikator existiert, ergibt sich analog zum ersten Lösungsweg, ebenso erklärt sich die Widerspruchsfreiheit bzgl. Satz 4.6.3 analog zu diesem.

Frischhaltebox

Aufgabe H 98.
Skizzieren Sie folgende Mengen:

(a) $A := \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix}3\\-2\end{smallmatrix}\right)\rangle \leqq 1\}$

(b) $B := \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2+(x-1)^2 \leqq 4$ und $y^2+(x+1)^2 \leqq 4\}$

(c) $C := \{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \mid \max\left(|z|, \frac{1}{|z|}\right) < 2\}$

(d) $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)^2 \geqq \operatorname{Im}(z) \geqq 2\left(\operatorname{Re}(z^2)+\operatorname{Im}(z)^2\right)-1\}$

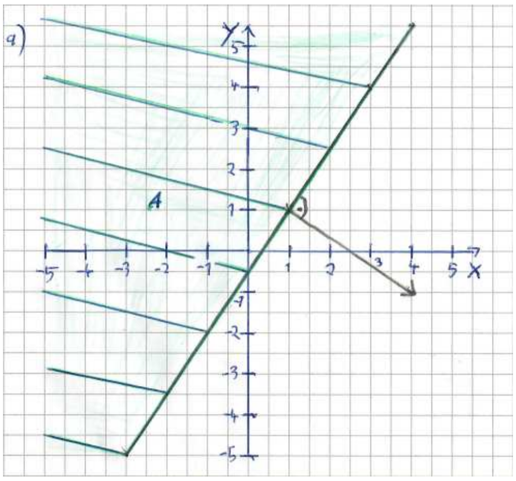
Lösungshinweise hierzu:
Allgemeine Hinweise zu den Lösungsskizzen:

- Bei der korrekten Achsenbeschriftung ist insbesondere darauf zu achten, ob die Menge in x- und y-Koordinaten gegeben ist oder komplexe Elemente enthält.
- Farben sind hier nicht zwingend notwendig/verlangt, können jedoch zur besseren Abtrennung von - ebenfalls nicht verlangten, aber u. U. ratsamen - Hilfslinien gewählt werden. (Rot ist hierbei als Korrekturfarbe nicht zulässig.)

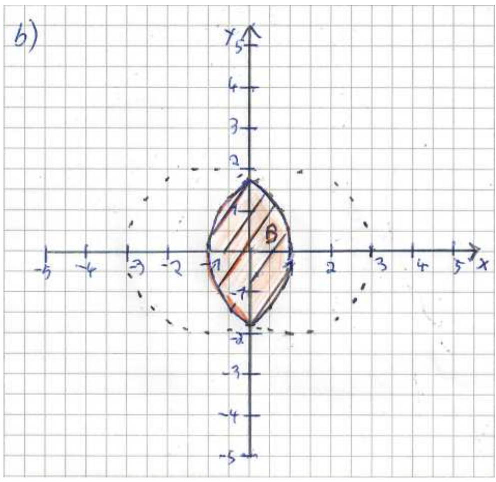
(a) Die Gleichung beschreibt eine Halbebene, deren Rand die mittels der Gleichung

$$1 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 3x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

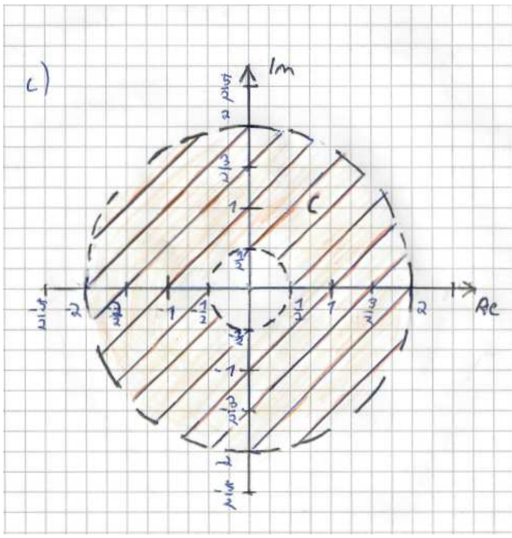
gegebene Gerade ist. Für die Entscheidung, welche der beiden Hälten zu A gehört, genügt es einen Punkt einzusetzen, der nicht Teil des Randes ist, zum Beispiel den Ursprung. Hieraus ergibt sich folgende Skizze:



(b) Die Gleichungen, welche die Punkte der Menge B erfüllen, beschreiben Kreisscheiben mit den Mittelpunkten $\binom{-1}{0}$ und $\binom{1}{0}$ sowie dem Radius 2. Bei B handelt es sich dementsprechend um die Schnittmenge dieser beiden Kreisscheiben:



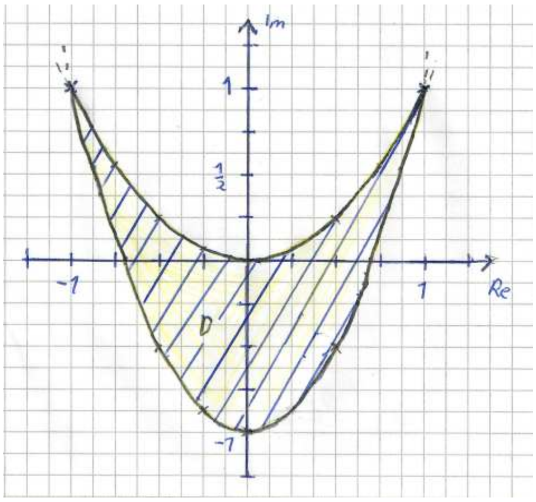
(c) Alle $z \in C$ erfüllen $|z| < 2$, sind in der <u>offenen</u> Kreisscheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt $z_0 = 0$. Auf der anderen Seite gilt $\frac{1}{|z|} < 2 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$, alle $z \in C$ liegen außerhalb der <u>geschlossenen</u> Kreisscheibe mit Mittelpunkt $z_0 = 0$ und Radius $\frac{1}{2}$, C beschreibt einen <u>offenen</u> Kreisring:



(d) Sei $x := \mathrm{Re}(z)$, $y := \mathrm{Im}(z)$. Dann lautet die erste Ungleichung $x^2 \geqq y$. Für die zweite ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &\geqq 2\left(\mathrm{Re}(z^2) + \mathrm{Im}(z)^2\right) - 1 \\ &= 2\left(\mathrm{Re}\left((x + y \cdot \mathrm{i})^2\right) + y^2\right) - 1 \\ &= 2\left(x^2 - y^2 + y^2\right) - 1 = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgendes (skaliertes) Bild:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 99. *Tangenten und Lagrange-Multiplikatoren*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^2+x+y^2$ und $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 15/4\right\}$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Einschränkung $f|_D$.

(b) Skizzieren Sie D sowie die Tangenten an D in den in (a) bestimmten kritischen Stellen.

(c) Skizzieren Sie die Gradienten ∇f in den kritischen Stellen und deuten Sie Satz 4.6.3 geometrisch.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen das Lagrange-System auf:

$$\begin{aligned} x^2+x+y^2-\tfrac{15}{4} &= 0 \\ 2x+1+\lambda(2x+1) &= 0 \\ 8y+2\lambda y &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Zweile ist äquivalent zu

$$(2x+1)\,(\lambda+1) = 0$$

womit $\lambda = -1$ oder $x = -\frac{1}{2}$ gelten muss.

- $\lambda = -1$: In diesem Falle impliziert $8y - 2y = 0$, dass $y = 0$ ist. Somit erhalten wir aus der Nebenbedingung:

$$\frac{15}{4} = x^2 + x = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tag{2}$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \tag{3}$$

  und somit $x_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm 2$.

- $x = -\frac{1}{2}$: In diesem Falle impliziert die Nebenbedingung $-\frac{1}{4} + y^2 = \frac{15}{4}$ und somit $y = \pm 2$. Der Lagrange-Multiplikator für $y = \pm 2$ ist jeweils $\lambda = -4$.

Somit haben wir mit

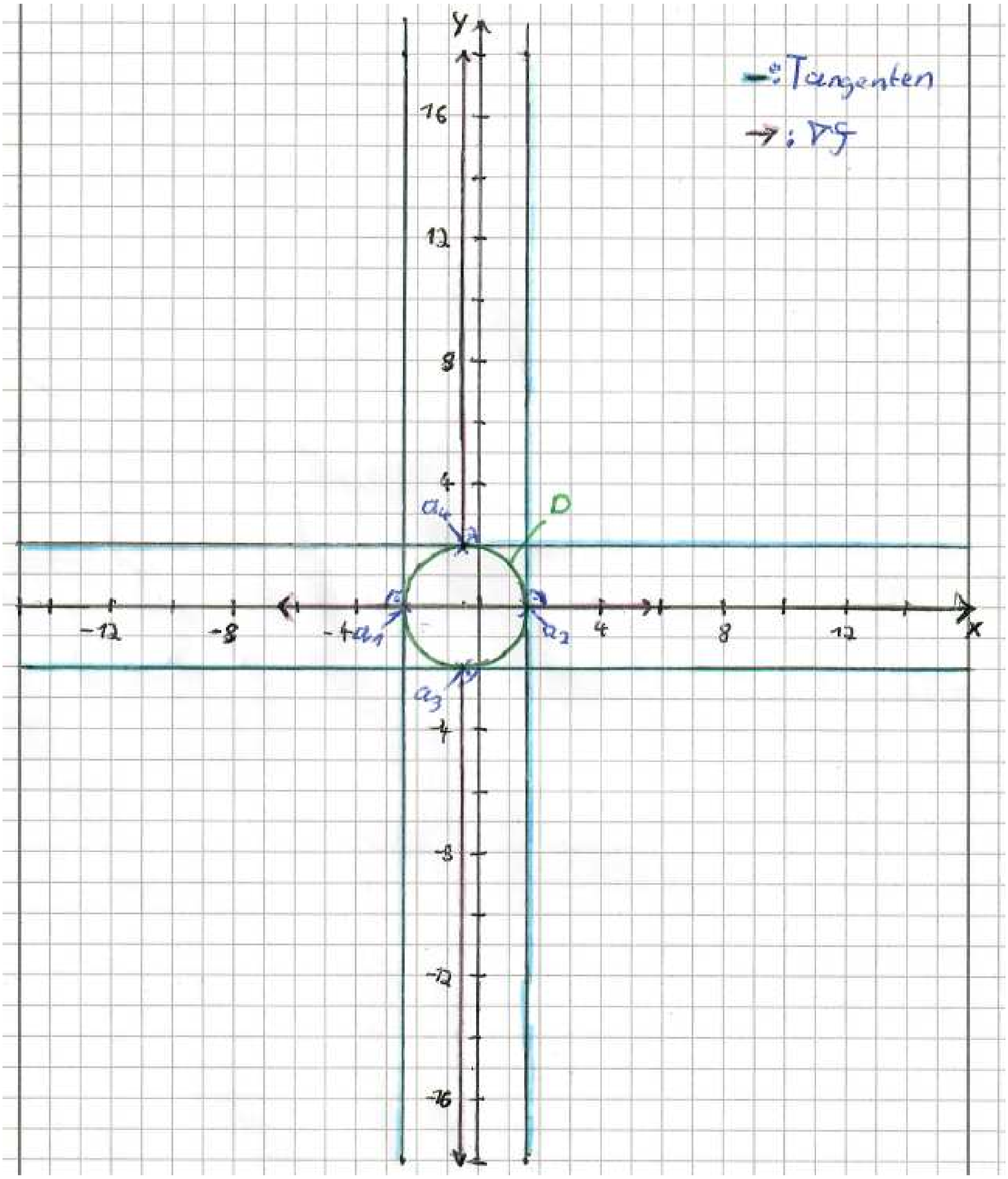
$$a_1 := \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ a_2 := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix},\ a_4 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

alle kritischen Stellen von $f|_D$ gefunden ($\nabla g|_D \neq 0$).

(b)+(c) : Für die Skizze formulieren wir die Nebenbedingung mit Hilfe der Umformungen aus (2) um:

$$\begin{aligned} \frac{15}{4} &= x^2 + x + y \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y - \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &+ y^2 = 4. \end{aligned}$$

Der Gradient von $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ lautet wie oben implizit berechnet $\nabla f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2x+1\\8y\end{smallmatrix}\right)$.
Skizze (für die Zeichengenauigkeit sind die mit Fineliner schwarz/grün gezogenen Linien entscheidend):



In den kritischen Stellen steht der Gradient von f orthogonal auf den Tangenten und damit den Niveaulinien, er ist dort parallel zum Gradienten ∇g der Nebenbedingung.

Anschauliche Erklärung/Deutung für $g(x) \in \mathbb{R}$ (nicht verlangt/erwartet): Gemäß unsererer Definition der Lagrange-Methode beschreibt eine Gleichung der Form $g(x) = k$ eine Niveaumenge D der Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Extremalstelle von $f|_D$ sowie $C : [a, b] \to D$ die Parametrisierung einer in D verlaufenden Kurve mit $\tilde{x} = C(\tilde{t})$ für ein $\tilde{t} \in (a, b)$. Sei ferner $C'(\tilde{t})$ nicht der Nullvektor.

- Einerseits gilt (vgl. 4.2.9) $0 = \operatorname{grad} g\left(C(\tilde{t})\right) \bullet C'(\tilde{t})$.
- Andererseits ist $\tilde{x}$ eine kritische Stelle von $f|_D$, insbesondere ist also $\tilde{t}$ eine kritische Stelle von $f \circ C$ im <u>inneren</u> des Intervalls, es gilt also:

$$0 = (f \circ C)'(\tilde{t}) = \operatorname{grad} f\left(C(\tilde{t})\right) \bullet C'(\tilde{t}).$$

Die Niveaumenge $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = k\}$ beschreibt eine Hyperfläche. Ist ferner der Gradient von g in $\tilde{x}$ ungleich dem Nullvektor, so beschreibt $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g(\tilde{x}) \bullet x = 0\}$ eine Hyperebene T, die Tangentialebene an H in $\tilde{x}$.
Wegen dem zweiten Punkt können wir Folgerung 4.9.3 in $\tilde{x}$ auch auf f anwenden: Für jede Kurve durch $\tilde{x}$ in der Hyperfläche H steht $\operatorname{grad} f(\tilde{x})$ senkrecht zur Tangente an die Kurve im Punkt $\tilde{x}$. Betrachtet man Kurven, deren „Richtungsvektoren" in $\tilde{x}$ linear unabhängig sind, so lässt sich folgern, dass $\nabla f(\tilde{x})$ senkrecht auf der durch Hyperebene T steht und somit im Aufspann von $\nabla g(\tilde{x})$ enthalten ist. Folglich existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(\tilde{x}) = -\lambda \nabla g(\tilde{x})$.

Aufgabe H 100. *Parameterabhängige Funktionen*

Betrachten Sie für reelles $\alpha > 0$ die durch $f_\alpha\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1^2 \cdot x_3^\alpha + x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 - \alpha x_2^2 \end{smallmatrix}\right)$ gegebene Funktion.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α die Menge $D_\alpha \subseteqq \mathbb{R}^3$ aller Stellen, an denen $\mathrm{J} f_\alpha$ existiert.

(b) Geben Sie die Abbildung $\mathrm{J} f_\alpha\colon D_\alpha \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ an.

(c) Betrachten Sie nun die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3\colon \alpha \mapsto f_\alpha \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_3 \in \mathbb{R}^+$ als Parametern. Bestimmen Sie g'.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gibt hier mehrere Fälle zu unterscheiden. Wir beginnen daher mit der Suche nach den Stellen, an denen f_α definiert ist. Ist $\alpha = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $q \in 2\mathbb{N}-1$ teilerfremd, also $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt und q ungerade, so ist f_α auf gesamt $\mathbb{R}^3$ definiert. Dies motiviert die Einführung der Menge

$$Q := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p, q \text{ teilerfremd}, p \in \mathbb{N}, q \in 2\mathbb{N} - 1 \right\}.$$

Ist dem nicht so, sind für x_3 nur nicht negative Werte zulässig. Da f bezüglich x_1 beziehungsweise x_2 jeweils ein Polynom 2. Grades ist, existieren in letzterem Falle sämtliche partiellen Ableitungen im Inneren des Definitionsbereiches: Gemäß Kapitel 4.3 ist die partielle Ableitung nur für innere Punkte definiert. ($\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ ist Teil des Randes.)
Für $\alpha \in Q$ ist eine weitere Fallunterscheidung notwendig: Für $\alpha \geqq 1$ existiert die partielle Ableitung nach x_3 auf dem gesamten, offen Definitionsbereich, für $\alpha < 1$ nur für $x_3 \neq 0$. Es ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$D_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & , \quad \alpha \in Q, \alpha \geqq 1 \\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \neq 0\} & , \quad \alpha \in Q, \alpha < 1 \\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\} & , \quad \alpha \notin Q \end{cases}$$

(Hätten wir für Randpunkte partielle Ableitungen als einseitige Grenzwerte definiert, hätten wir für $\alpha \notin Q$ ebenfalls nach $\alpha \geqq 1$ und $\alpha < 1$ unterscheiden müssen.)

(b) Es gilt:

$$\mathrm{J}f_\alpha : D_\alpha \to \mathbb{R}^{3\times 3} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \cdot x_3^\alpha & 1 & \alpha x_1^2 \cdot x_3^{\alpha-1} \\ 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & -2\alpha x_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Mit Tabelle 2.2.5 bzw. Beispiel 2.2.10 erhalten wir

$$g' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3 : \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x_3) x_1^2 x_3^\alpha \\ 0 \\ -x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 101. *Rechenregeln der Differentiation*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1x_2^2 \\ x_2-x_3^2+1 \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left(\frac{x_1+x_3}{1+x_2^2}\right)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f\,(x)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{J}g\,(x)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{J}(g \circ f)\,(x)$.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{J}(g \cdot f)\,(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\mathrm{J}f\,(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 1 & -2x_3 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}$.

(b) Es gilt $\mathrm{J}g\,(x) = \exp\left(\dfrac{x_1+x_3}{1+x_2^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+x_2^2} & -\dfrac{2x_2(x_1+x_3)}{(1+x_2^2)^2} & \dfrac{1}{1+x_2^2} \end{pmatrix}$.

(c) Wir nutzen Satz 4.8.1, $\mathrm{J}(g \circ f)\,(x) = \mathrm{J}g\,(f(x)) \cdot \mathrm{J}f\,(x)$ mit

$$\mathrm{J}g\,(f(x)) = \exp\left(f(x)\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(x_2-x_3^2+1)^2} & -\frac{2(x_2-x_3^2+1)(x_1x_2^2+x_1x_2x_3)}{(1+(x_2-x_3^2+1)^2)^2} & \frac{1}{1+(x_2-x_3^2+1)^2} \end{pmatrix}:$$

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(g \circ f)\,(x) &= \mathrm{J}g\,(f(x)) \cdot \mathrm{J}f\,(x) \\ &= \exp\left(f(x)\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(x_2-x_3^2+1)^2} & -\frac{2(x_2-x_3^2+1)(x_1x_2^2+x_1x_2x_3)}{(1+(x_2-x_3^2+1)^2)^2} & \frac{1}{1+(x_2-x_3^2+1)^2} \end{pmatrix} \\ &\qquad \cdot \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 1 & -2x_3 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix} \\ &= \exp\left(\frac{x_1x_2^2+x_1x_2x_3}{1+(x_2-x_3^2+1)^2}\right) \begin{pmatrix} \frac{x_2(x_2+x_3)}{1+(x_2-x_3^2+1)^2} \\ \frac{x_1(2x_2+x_3)}{1+(x_2-x_3^2+1)^2} - \frac{2x_1x_2(x_2-x_3^2+1)(x_2+x_3)}{(1+(x_2-x_3^2+1)^2)^2} \\ \frac{x_1x_2}{1+(x_2-x_3^2+1)^2} + \frac{4x_1x_2x_3(x_2-x_3^2+1)(x_2+x_3)}{(1+(x_2-x_3^2+1)^2)^2} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

(d) Wir schreiben f_1, f_2 und f_3 für die Komponentenfunktionen von f. Dann gilt für $g \cdot f = \begin{pmatrix} g\cdot f_1 \\ g\cdot f_2 \\ g\cdot f_3 \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{J}(g \cdot f)\,(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(g\cdot f_1)(x) & \frac{\partial}{\partial x_2}(g\cdot f_1)(x) & \frac{\partial}{\partial x_3}(g\cdot f_1)(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(g\cdot f_2)(x) & \frac{\partial}{\partial x_2}(g\cdot f_2)(x) & \frac{\partial}{\partial x_3}(g\cdot f_2)(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(g\cdot f_3)(x) & \frac{\partial}{\partial x_2}(g\cdot f_3)(x) & \frac{\partial}{\partial x_3}(g\cdot f_3)(x) \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g \cdot f_1\right)(x) & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} g \cdot f_1\right)(x) & \left(\frac{\partial}{\partial x_3} g \cdot f_1\right)(x) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g \cdot f_2\right)(x) & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} g \cdot f_2\right)(x) & \left(\frac{\partial}{\partial x_3} g \cdot f_2\right)(x) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g \cdot f_3\right)(x) & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} g \cdot f_3\right)(x) & \left(\frac{\partial}{\partial x_3} g \cdot f_3\right)(x) \end{pmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} f_1\right)(x) & \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} f_1\right)(x) & \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} f_1\right)(x) \\ \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} f_2\right)(x) & \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} f_2\right)(x) & \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} f_2\right)(x) \\ \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} f_3\right)(x) & \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} f_3\right)(x) & \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} f_3\right)(x) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) & \frac{\partial}{\partial x_3} g(x) \end{pmatrix} + g(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_3} f_1(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_3} f_2(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(x) & \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(x) \end{pmatrix}
$$

$$
(= f(x) \cdot \mathrm{J}g\,(x) + g(x) \cdot \mathrm{J}f\,(x))
$$

$$
= \exp\left(\frac{x_1 + x_3}{1 + x_2^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_2 - x_3^2 + 1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + x_2^2} & -\frac{2x_2(x_1 + x_3)}{(1 + x_2^2)^2} & \frac{1}{1 + x_2^2} \end{pmatrix}
$$

$$
+ \exp\left(\frac{x_1 + x_3}{1 + x_2^2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 1 & -2x_3 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \exp\left(\frac{x_1 + x_3}{1 + x_2^2}\right) \begin{pmatrix} x_2^2 \left(1 + \frac{x_1}{1+x_2^2}\right) & 2x_1 x_2 \left(1 - \frac{x_2^2(x_1+x_3)}{(1+x_2^2)^2}\right) & \frac{x_1 x_2^2}{1+x_2^2} \\ \frac{x_2 - x_3^2 + 1}{1+x_2^2} & 1 - \frac{2x_2(x_1+x_3)(x_2-x_3^2+1)}{(1+x_2^2)^2} & -2x_3 + \frac{x_2-x_3^2+1}{1+x_2^2} \\ x_2 x_3 \left(1 + \frac{x_1}{1+x_2^2}\right) & x_1 x_3 \left(1 - \frac{2x_2^2(x_1+x_3)}{(1+x_2)^2}\right) & x_1 x_2 \left(1 + \frac{x_3}{1+x_2^2}\right) \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe H 102. *Lagrange-Methode vs. Parametrisierung*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2}x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) x$ und $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(a) Schreiben Sie die durch die Methode nach Lagrange gegebenen Bedingungen als ein Gleichungssystem in den Variablen x_1, x_2, x_3, λ_1 und λ_2.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gleichungssystems aus (a) alle kritischen Stellen von $f|_D$.

(c) Parametrisieren Sie D durch eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon \mu \mapsto h(\mu)$.

(d) Bestimmen Sie die kritischen Stellen als Lösung von $\mathrm{J}(f \circ h)\,(\mu) = 0$.

Zusatz: Können Sie den Typ der gefundenen kritischen Stellen entscheiden?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Nebenbedingung enthält diesmal zwei Gleichungen: $g_1(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$ und $g_2(x) = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ mit Gradienten $\nabla g_1(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\nabla g_2(x) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, daher lautet das Gleichungssystem wegen $\nabla f(x) = \left(\begin{smallmatrix} -x_1 \\ 8x_2 \\ 2x_3 \end{smallmatrix}\right)$:

(1)	$x_1 - 2x_2 + 2x_3$	$=$	2	(1. Nebenbedingung)
(2)	$2x_1 + 2x_2 + 3x_3$	$=$	4	(2. Nebenbedingung)
(3)	$-x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$	$=$	0	(Multiplikatoren in der x_1-Komponente)
(4)	$8x_2 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2$	$=$	0	(Multiplikatoren in der x_2-Komponente)
(5)	$2x_3 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2$	$=$	0	(Multiplikatoren in der x_3-Komponente)

bzw. in Matrix-Vektor-Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir lösen das System aus (a) mit Gauß:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2Z_1 : \\ Z_3 + Z_1 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3Z_3 + Z_2 : \\ \frac{3}{2}Z_4 - 2Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \frac{5}{3}Z_4 - \frac{2}{3}Z_3 : \\ 5Z_5 - 2Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & -12 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \frac{7}{25}Z_5 + \frac{4}{25}Z_4 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ -\frac{1}{7}Z_4 + \frac{1}{7}Z_5 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{5}Z_3 - \frac{3}{5}Z_4 - \frac{6}{5}Z_5 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + \frac{1}{3}Z_2 - \frac{5}{3}Z_3 : \\ \frac{1}{6}Z_2 + \frac{1}{6}Z_3 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

Diese Lösung ist eindeutig, außer $x = \left(\begin{smallmatrix}-8\\1\\6\end{smallmatrix}\right)$ gibt es keine weiteren kritischen Stellen von $f|_D$.

(c) D beschreibt eine Gerade der Form $u + \mu v$, wobei $u \in \mathbb{R}^3$ eine spezielle Lösung von $\left(\begin{smallmatrix}1 & -2 & 2\\2 & 2 & 3\end{smallmatrix}\right) x = \left(\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right)$ und v eine nicht-triviale Lösung von $\left(\begin{smallmatrix}1 & -2 & 2\\2 & 2 & 3\end{smallmatrix}\right) x = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ist. Eine spezielle Lösung haben wir zwar bereits berechnet ($u = \left(\begin{smallmatrix}-8\\1\\6\end{smallmatrix}\right)$) zu Übungs-/Kontrollzwecken berechnen wir jedoch eine weitere:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{6}Z_2 - \tfrac{1}{3}Z_1 : \qquad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow u = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Für v berechnen wir das Kreuzprodukt der Zeilen:

$$v = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\1\\6\end{pmatrix}.$$

Folglich lautet eine Parametrisierung von D:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : \mu \mapsto \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ 1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-10\\1\\6\end{pmatrix}.$$

(d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}(f \circ h)(\mu) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 10\mu\right)^2 + 4\left(\frac{1}{6} + \mu\right)^2 + (1 + 6\mu)^2\\ &= -50\mu^2 + \frac{10}{3}\mu - \frac{1}{18} + 4\mu^2 + \frac{4}{3}\mu + \frac{1}{9} + 36\mu^2 + 12\mu + 1\\ &= -10\mu^2 + \frac{50}{3}\mu + \frac{19}{18}\\ &= -10\left(\mu^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}\mu + \frac{25}{36}\right) + \frac{125}{18} + \frac{19}{18}\\ &= -10\left(\mu - \frac{5}{6}\right)^2 + 8\end{aligned}$$

Die Lösung von $0 = \mathrm{J}(f \circ h)(\mu) = -20\left(\mu - \frac{5}{6}\right)$ ist somit $\mu = \frac{5}{6}$, Hieraus ergibt sich als kritische Stelle von f_D

$$h\left(\frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix}-8\\1\\6\end{pmatrix}.$$

(Zum Vergleich: Hätten wir $u = \left(\begin{smallmatrix}-8\\1\\6\end{smallmatrix}\right)$ genommen, wäre $(f \circ h)(\mu) = -10\mu^2 + 8$ und $\mathrm{J}(f \circ h)(\mu) = -20\mu$.) Wir hätten zur Berechnung von $\mathrm{J}(f \circ h)(\mu)$ auch die Kettenregel anwenden können, aber auf diesem Lösungsweg können wir nun auch direkt die Zusatzfrage beantworten: In $x = \left(\begin{smallmatrix}-8\\1\\6\end{smallmatrix}\right)$ hat $f|_D$ ein relatives Maximum.

Frischhaltebox

Aufgabe H 103.

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils einen geschlossenen Ausdruck an:

(a) $f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{\pi^{2k+1}x^{2k}}{(2k)!}$

(b) $f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^{2k+1}x^{2k}}{(2k-1)!}$

(c) $f_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{x^{j-2}}{j!(k-j)!}$

(d) $f_4(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k+1}x^{k+42}$

Hinweis: $\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir klammern 2π aus und formen um

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{\pi^{2k+1}x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi x)^{2k}}{(2k)!} \\ &\text{Hinweis mit } z = \pi x \\ &= 2\pi\cosh(\pi x) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^{2k+1}x^{2k}}{(2k-1)!} \\ &= \pi^2 x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\,(\pi x)^{2k-1}}{2k!} \end{aligned}$$

Bei der Funktion $z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kz^{2k-1}}{2k!}$ handelt es sich (im Inneren der Konvergenzkreisscheibe) um die Ableitung der Funktion $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k!}$, welche wir mit dem Hinweis als $z \mapsto \cosh(z)$ identifizieren. Es gilt daher

$$f_2(x) = \pi^2 x\sinh(\pi x).$$

(c) Wir formen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes um:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{x^{j-2}}{j!(k-j)!} \\ &= \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{j!(k-j)!}}_{=\binom{k}{j}} x^j \cdot 1^{k-j} \\ &= \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x^2} \end{aligned}$$

(d) Wir klammern $2x^{42}$ aus:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k+1} x^{k+42} \\ &= 2x^{42} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k} \\ &= 2x^{42} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k \\ &= 2x^{42} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{4x^{42}}{2-x}. \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 104. *Kurvenintegrale: Parametrisierung vs. Potential*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1^2 x_3 - (x_2+x_3)^2$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_3 \cdot \mathrm{e}^{x_1-x_2}$ sowie die durch $C\colon [0,4] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} (t-1)^2 \\ t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve. Bestimmen Sie $\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_K \nabla g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$

(a) gemäß Definition 5.3.1.

(b) mittels Satz 5.3.10.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_3 \\ -2(x_2+x_3) \\ x_1^2 - 2(x_2+x_3) \end{pmatrix},$$
$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} x_3\mathrm{e}^{x_1-x_2} \\ -x_3\mathrm{e}^{x_1-x_2} \\ \mathrm{e}^{x_1-x_2} \end{pmatrix},$$
$$C'(t) = \begin{pmatrix} 2(t-1) \\ 1 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

. Damit gelten

$$\begin{aligned}
\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^4 \nabla f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^4 \begin{pmatrix} 2(t-1)^2\mathrm{e}^t \\ -2(t+\mathrm{e}^t) \\ (t-1)^4 - 2(t+\mathrm{e}^t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2(t-1) \\ 1 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^4 4(t-1)^3\mathrm{e}^t - 2(t+\mathrm{e}^t) + (t-1)^4\mathrm{e}^t - 2(t+\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^4 \left(4t^3 - 12t^2 + 12t - 4\right)\mathrm{e}^t - 2t - 2\mathrm{e}^t - 2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} \\
&\qquad + \left(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^4 t^4\mathrm{e}^t - 6t^2\mathrm{e}^t + 6t\mathrm{e}^t - 5\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} - 2t\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Nun wenden wir mehrmals partielle Integration an (und nutzen Beispiel 3.2.3):

$$
\begin{aligned}
&= [t^4 \mathrm{e}^t]_0^4 + \int_0^4 (-4t^3\mathrm{e}^t) - 6t^2\mathrm{e}^t + 6t\mathrm{e}^t - 5\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} - 2t \,\mathrm{d}\,t \\
&= [t^4 \mathrm{e}^t]_0^4 - [4t^3\mathrm{e}^t]_0^4 + \int_0^4 \underbrace{12t^2\mathrm{e}^t - 6t^2\mathrm{e}^t}_{=6t^2\mathrm{e}^t} + 6t\mathrm{e}^t - 5\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} - 2t \,\mathrm{d}\,t \\
&= [t^4 \mathrm{e}^t]_0^4 - [4t^3\mathrm{e}^t]_0^4 + [6t^2\mathrm{e}^t]_0^4 + \int_0^4 \underbrace{(-6t)\mathrm{e}^t}_{=-12t\mathrm{e}^t+6t\mathrm{e}^t} - 5\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} - 2t \,\mathrm{d}\,t \\
&= [t^4 \mathrm{e}^t]_0^4 - [4t^3\mathrm{e}^t]_0^4 + [6t^2\mathrm{e}^t]_0^4 - [6(t-1)\mathrm{e}^t]_0^4 - [5\mathrm{e}^t]_0^4 - [\mathrm{e}^{2t}]_0^4 - [t^2]_0^4 \\
&= 256\mathrm{e}^4 - 256\mathrm{e}^4 + 96\mathrm{e}^4 - 18\mathrm{e}^4 - 6 - 5\mathrm{e}^4 + 5 - \mathrm{e}^8 + 1 - 16 \\
&= 73\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^8 - 16
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_K \nabla g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^4 \nabla f(C(t)) \bullet C'(t) \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^4 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{(t-1)^2-t} \\ -\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{(t-1)^2-t} \\ \mathrm{e}^{(t-1)^2-t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2(t-1) \\ 1 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^4 2(t-1)\mathrm{e}^{(t-1)^2} - \mathrm{e}^{(t-1)^2} + \mathrm{e}^{(t-1)^2} \,\mathrm{d}\,t \\
&\text{Substitution: } \tau(t) := (t-1)^2, \Rightarrow \tau'(t) = 2(t-1) \\
&= \int_{\tau(0)}^{\tau(4)} \mathrm{e}^\tau \,\mathrm{d}\,\tau \\
&= [\mathrm{e}^\tau]_{\tau(0)}^{\tau(4)} = [\mathrm{e}^{(t-1)^2}]_0^4 \\
&= \mathrm{e}^9 - \mathrm{e}.
\end{aligned}
$$

(b) f und g sind offensichtlich Potentiale von ∇f bzw. ∇g, damit gilt nach 5.3.10:

$$
\begin{aligned}
\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= f(C(4)) - f(C(0)) \\
&= f\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ \mathrm{e}^4 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 81\mathrm{e}^4 - (4+\mathrm{e}^4)^2 - 1 + 1 \\
&= 73\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^8 - 16
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_K \nabla g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= g(C(4)) - g(C(0)) \\
&= g\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ \mathrm{e}^4 \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^9 - \mathrm{e}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 105. *Parametrisierungen von Kurven, Kurvenlänge*

Gegeben seien $a = \binom{-1}{2}$, das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \dfrac{1}{2\pi\,|x-a|^4}\begin{pmatrix} -x_2+2 \\ x_1+1 \end{pmatrix}$ sowie die durch $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos(2t)-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(2t)+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve K.

(a) Skizzieren Sie K.

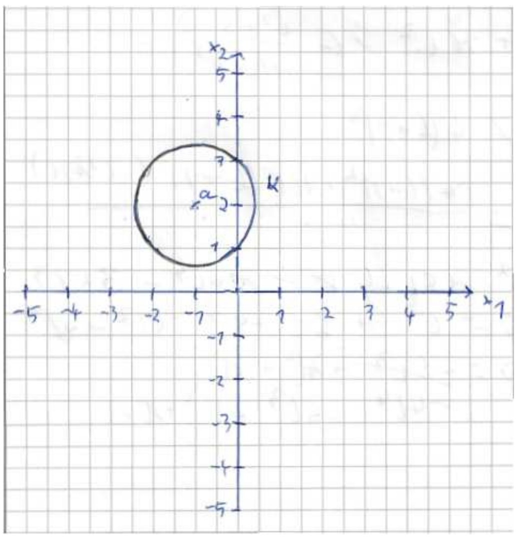
(b) Berechnen Sie die Kurvenlänge $L(K)$.

(c) Betrachten Sie jetzt den Weg $B\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos(2t)-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(2t)+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $\int_0^{4\pi} |B'(t)| \,\mathrm{d}\,t$. Warum ergibt sich nicht $L(K)$?

(d) Berechnen Sie das Umlaufintegral $I = \oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) K entspricht einem Kreis mit Mittelpunkt a und Radius $\sqrt{2}$:



(b) Es gilt $C'(t) = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ und somit $|C'(t)| = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sin(2t))^2 + (\cos(2t))^2} = 2\sqrt{2}$. Da K doppelpunktfrei parametrisiert ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} L(K) &= \int_0^{\pi} |C'(t)| \,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^{\pi} 2\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,t = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} |B'(t)| &= |C'(t)| \\ &= 2\sqrt{2}, \\ \int_0^{4\pi} |B'(t)| \,\mathrm{d}\,t &= \int_0^{4\pi} 2\sqrt{2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Das sich hier nicht $L(K)$ ergibt, liegt daran, dass B keine doppelpunktfreie Parametrisierung von K ist. (K wird stattdessen vierfach durchlaufen.)

(d) Es gilt

$$|C(t)-a| = \left|\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(2t)\\ \sqrt{2}\sin(2t)\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}$$

und somit

$$\begin{aligned} I &= \oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_0^\pi g\left(C(t)\right) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2\pi\cdot 4}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin(2t)\\ \sqrt{2}\cos(2t)\end{pmatrix} \bullet 2\sqrt{2}\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \underbrace{(\sin(2t))^2 + (\cos(2t))^2}_{=1}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 106. *Kurvenintegrale skalarwertiger Funktionen*

Gegeben sei die durch $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t)-2\sin(t)\\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin(t)\\ 4\cos(t)+\frac{3}{2}\sin(t)\end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve K.

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K mit den Koordinatenebenen.

(b) Zeigen Sie, dass $C|_{[0,2\pi)}$ injektiv ist, bestimmen Sie C' sowie die Länge von K.

(c) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\frac{1}{125}\left(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die Schnittpunkte mit der

- x_1-x_2-Ebene: Sei $0 = 4\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) \Leftrightarrow -\frac{8}{3} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t)$, wir erhalten $t_1 = \arctan\left(-\frac{8}{3}\right) + \pi = \pi - \arctan\left(\frac{8}{3}\right)$ und $t_2 = 2\pi - \arctan\left(\frac{8}{3}\right)$. Setzen wir t_1 und t_2 in C ein, so erhalten wir wegen $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ den Schnittpunkt

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} 3\cos\left(\pi - \arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right) - 2\sin\left(\pi - \arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right)\\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\left(\pi - \arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right)\\ 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\cos\left(\arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right) - 2\sin\left(\arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right)\\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right)\\ 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

  sowie - wegen $\sin(x+2\pi) = \sin(x), \cos(x+2\pi) = \cos(x)$ - den Schnittpunkt

$$S_2 = \begin{pmatrix} 3\cos\left(\arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right) + 2\sin\left(\arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right)\\ -\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{8}{3}\right)\right)\\ 0\end{pmatrix}.$$

- x_1-x_3-Ebene: Die Nullstellen von $\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin(t)$ sind $t_3 = 0$ und $t_4 = \pi$. Es ergeben sich die Schnittpunkte

$$S_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

- x_2-x_2-Ebene: Analog zum ersten Fall erhalten wir aus $0 = 3\cos(t) - 2\sin(t)$ $\tan(t) = \frac{3}{2}$ und somit durch Einsetzen von $t_5 = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$, $t_6 = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \pi$ die Schnittpunkte

$$S_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) \\ 4\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \frac{3}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$
$$S_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)+\pi\right) \\ 4\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)+\pi\right) + \frac{3}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)+\pi\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) \\ -4\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) - \frac{3}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Zusatzhinweis: Dass wir im ersten Falle nicht einfach $\tilde{t}_1 = \arctan\left(-\frac{8}{3}\right)$ (und $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 + \pi$) genommen haben, liegt daran, dass die die Kurve K definierende Parametrisierung C auf em Intervall $[0, 2\pi]$ definiert war. Würde man $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$ einsetzen, würde sich die Reihenfolge der ersten beiden Schnittpunkte vertauschen. Zwar ergeben sich damit ebenfalls alle Schnittpunkte, dass dies gut geht, ist aber ein Speziallfall. Würde nur eine der Komponentenfunktionen eine andere (oder gar keine) Periodizität/Symmetrie aufweisen, können sich bereits unterschiedliche Punkte ergeben.

(b) Seien $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ mit $C(t_1) = C(t_2)$. Aus $\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin(t_1) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin(t_2)$ können wir $\sin(t_1) = \sin(t_2)$ folgern. Aufgrund der Vorzeichenverteilung von $\sin|_{[0,2\pi)}$ sind entweder sowohl t_1 als auch t_2 im Intervall $[0, \pi]$ oder es sind beide im Intervalle $(\pi, 2\pi)$. Die dritte Komponente impliziert jedoch $\cos(t_1) = \cos(t_2)$. Da der Kosinus auf den genannten Intervallen injektiv ist, muss $t_1 = t_2$ sein, also ist $C|_{[0,2\pi)}$ injektiv. Es gilt:

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t) - 2\cos(t) \\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos(t) \\ -4\sin(t) + \frac{3}{2}\cos(t) \end{pmatrix},$$
$$\begin{aligned} |C'(t)|^2 &= (-3\sin(t) - 2\cos(t))^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos(t)\right)^2 + \left(-4\sin(t) + \frac{3}{2}\cos(t)\right)^2 \\ &= 9(\sin(t))^2 + 12\cos(t)\sin(t) + 4(\cos(t))^2 + \frac{75}{4}(\cos(t))^2 \\ &\quad + 16(\sin(t))^2 - 12\sin(t)\cos(t) + \frac{9}{4}(\cos(t))^2 \\ &= 25(\sin(t))^2 + 25(\cos(t))^2, \end{aligned}$$

mithin $|C'(t)| = 5$. Hieraus ergibt sich

$$L(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}\,s = \int_0^{2\pi} |C'(t)| \,\mathrm{d}\,t = 10\pi.$$

(c) Es gilt

$$\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s = \int_K f(C(t))\,|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t. \tag{4}$$

Analog zu oben gilt:

$$\begin{aligned}|C(t)|^2 &= (3\cos(t)-2\sin(t))^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin(t)\right)^2+\left(4\cos(t)+\frac{3}{2}\sin(t)\right)^2\\ &= 9\,(\cos(t))^2-12\cos(t)\sin(t)+4(\sin(t))^2+\frac{75}{4}(\sin(t))^2\\ &\quad+16(\cos(t))^2+12\sin(t)\cos(t)+\frac{9}{4}(\sin(t))^2\\ &= 25(\cos(t))^2+25(\sin(t))^2=25.\end{aligned}$$

Dies ist insofern nutzbar, da

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{125}(x_1^2+x_2^2-x_3^2)\\ &= -\frac{1}{125}(x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_3^2)\\ &= -\frac{|x|^2}{125}+\frac{2x_3^2}{125}\end{aligned}$$

insbesondere ist

$$\begin{aligned}f(C(t))\cdot|C'(t)| &= \left(-\frac{|C(t)|^2}{125}+\frac{2\left(4\cos(t)+\frac{3}{2}\sin(t)\right)^2}{125}\right)\cdot|C'(t)|\\ &= \left(-\frac{25}{125}+\frac{2\left(4\cos(t)+\frac{3}{2}\sin(t)\right)^2}{125}\right)\cdot 5\\ &= -1+\frac{32\,(\cos(t))^2+24\cos(t)\sin(t)+\frac{9}{2}(\sin(t))^2}{25}\\ &= -\frac{41}{50}+\frac{55\,(\cos(t))^2+48\cos(t)\sin(t)}{50}.\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir mit (4)

$$\begin{aligned}\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{2\pi}-\frac{41}{50}+\frac{55\,(\cos(t))^2+48\cos(t)\sin(t)}{50}\,\mathrm{d}\,t \qquad (5)\\ &= -\frac{41\pi}{25}+\frac{11}{10}\int_0^{2\pi}(\cos(t))^2\,\mathrm{d}\,t+\frac{24}{25}\int_0^{2\pi}\cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von $\cos(t)\sin(t)$ kennen wir aus Beispiel 3.2.4, nach diesem ist $\int\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}\,x=\left[\frac{1}{2}(\sin(x))^2\right]$. Analog zu diesem berechnen wir eine Stammfkt. zu $(\cos(x))^2$:

$$\begin{aligned}\int(\cos(x))^2\,\mathrm{d}\,x &= [\sin(x)\cos(x)]-\int\sin(x)\cdot(-\sin(x))\,\mathrm{d}\,x\\ &= [\sin(x)\cos(x)]+\int(\sin(x))^2\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

Auf beiden Seiten $\int(\cos(x))^2\,\mathrm{d}\,x$ addiert ergibt

$$\begin{aligned}2\int(\cos(x))^2\,\mathrm{d}\,x &= [\sin(x)\cos(x)]+\int(\sin(x))^2+(\cos(x))^2\,\mathrm{d}\,x\\ &= [\sin(x)\cos(x)+x]\,,\end{aligned}$$

eingesetzt in (5) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= -\frac{41\pi}{25}+\frac{11}{10}\int_0^{2\pi}(\cos(t))^2\,\mathrm{d}\,t+\frac{24}{25}\int_0^{2\pi}\cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= -\frac{41\pi}{25}+\frac{11}{10}\left[\frac{1}{2}\left(\sin(t)\cos(t)+t\right)\right]_0^{2\pi}+\left[\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)\right]_0^{2\pi}\\ &= -\frac{41\pi}{25}+\frac{11}{10}\pi\\ &= -\frac{82}{50}\pi+\frac{55}{50}\pi=-\frac{27}{50}\pi.\end{aligned}$$

Aufgabe H 107. *Kurvenintegrale und Potentiale mit Parameter*

Gegeben sei $g_\beta\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon \binom{x_1}{x_2}\mapsto\binom{\beta x_1\cos(x_2)}{x_1^2\sin(x_2)}$ mit $\beta\in\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}g_\beta\binom{x_1}{x_2}$ und $\operatorname{rot} g_\beta\binom{x_1}{x_2}$. Für welche $\beta\in\mathbb{R}$ hat g_β ein Potential?

(b) Berechnen Sie $\int_{K_1} g_\beta(x)\bullet\mathrm{d}\,x$ und $\int_{K_2} g_\beta(x)\bullet\mathrm{d}\,x$ für die beiden durch

$C_1\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2\colon t\mapsto\binom{ta+(1-t)}{2}$ bzw. $C_2\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2\colon t\mapsto\binom{a}{tb+(1-t)2}$

parametrisierten Kurven K_1 (für $a\neq 1$) und K_2 (für $b\neq 2$). Bestimmen Sie hieraus ein Potential von g_β für jedes $\beta\in\mathbb{R}$, für das ein solches existiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten:

$$\begin{aligned}\mathrm{J}g_\beta\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\beta\cos(x_2) & -\beta x_1\sin(x_2)\\ 2x_1\sin(x_2) & -x_1^2\sin(x_2)\end{pmatrix},\\ \operatorname{rot} g_\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= 2x_1\sin(x_2)-(-\beta x_1\sin(x_2))=(2+\beta)x_1\sin(x_2).\end{aligned}$$

Entsprechend hat g_β nur im Fall $\beta=-2$ ein Potential.

(b) Wir berechnen:

- $\int_{K_1}$: Sei $a\neq 1$ (und damit K_1 regulär parametrisiert). Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\int_{K_1} g_{-2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet\mathrm{d}\,x &= \int_0^1 g(C_1(t))\bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^1\begin{pmatrix}-2\left((a-1)t+1\right)\cos(2)\\ ((a-1)t+1)^2\sin(2)\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}a-1\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}\,t\\ &= -2\cos(2)(a-1)\int_0^1 (a-1)t+1\,\mathrm{d}\,t\\ &= -2\cos(2)(a-1)\left[\frac{a-1}{2}t^2+t\right]_0^1\\ &= -\cos(2)(a-1)^2-2\cos(2)(a-1)\\ &= -\cos(2)\left(a^2-2a+1+2a\right)\\ &= -\cos(2)(a^2-1)\end{aligned}$$

- $\int_{K_2}$: Sei $b \neq 2$ (und damit K_2 regulär parametrisiert). Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{K_2} g_{-2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 g(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -2a\cos\left((b-2)t+2\right) \\ a^2 \sin\left((b-2)t+2\right) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ b-2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= a^2 \int_0^1 \sin\left((b-2)t+2\right)(b-2)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Substitution: $m(t) : (b-2)t+2$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int_0^1 \sin(m(t))m'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= a^2 \left[-\cos(m(t))\right]_0^1 \\
&= \cos(2)\,a^2 - a^2\cos(b) \\
&= \left(\cos(2) - \cos(b)\right) a^2
\end{aligned}$$

.

Sei $q = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Da die Kurven K_1, K_2 die Verbindungsstrecken von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} a \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} a \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ sind, ergibt sich ein Potential U nun als Hakenintegral mittels

$$\begin{aligned}
U(q) &= \int_{K_1} g_{-2}(x) \bullet \mathrm{d}\,x + \int_{K_2} g_{-2}(x) \bullet \mathrm{d}\,x \\
&= -\cos(2)(a^2-1) + \left(\cos(2) - \cos(b)\right) a^2 \\
&= -a^2\cos(b) + \cos(2).
\end{aligned}$$

Zusatzbemerkung: Streng gesehen können wir dies nur für Punkte $q = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ mit $a \neq 1$ und $b \neq 2$ als Summe dieser Integrale schreiben: Nur dann existieren beide Integrale nach Definition 5.3.1. Für den Fall, dass nur $a \neq 1$, aber $b = 2$ ist, dürften wir - wenn wir strikt sind - nur I_1 in unsere Betrachtung verwendend. Allerdings ist der Term $\left(\cos(2) - \cos(b)\right) a^2$ in diesem Falle 0 und entfällt automatisch. (Analoges gilt für $a = 1, b \neq 2$ oder $a = 1, b = 2$ (leere Summe)). Daher können wir diese Fallunterscheidung ignorieren.

Frischhaltebox

Aufgabe H 108. *Ebenen*

Gegeben seien die Punkte $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, 0, 4)$ und $D = (4, 2, -2)$. Sei E_1 die durch A, B und C gehende Ebene, E_2 die Ebene durch B, C, D. Bestimmen Sie

(a) einen Normalenvektor von E_1.

(b) die Hesse-Normalform von E_1.

(c) einen Normalenvektor von E_2.

(d) die Hesse-Normalform von E_2.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bilden das Kreuzprodukt $u_1 := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und erhalten durch Normierung ($|u_1| = 6$) den Normalenvektor

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt:

$$\left\langle \overrightarrow{n_1} \,\middle|\, \overrightarrow{OA} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{10}{3}.$$

Folglich ist die Hessesche Normalform gegeben durch:

$$E_1 : \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{10}{3}.$$

(c) Wir bilden das Kreuzprodukt $u_2 := \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$:

$$u_2 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}$$

und erhalten durch Normierung ($|u_2| = 7$) den Normalenvektor

$$\overrightarrow{n_2} = \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

(d) Es gilt:

$$\left\langle \overrightarrow{n_2} \,\middle|\, \overrightarrow{OB} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{14}{7} = 2.$$

Folglich ist die Hessesche Normalform gegeben durch:

$$E_2 : \frac{6}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 = 2.$$

Die folgenden Aufgaben sind Zusatzaufgaben zur freiwilligen Übung und gehen *nicht* in die Bewertung mit ein. Eine Bearbeitung als Vorbereitung auf die Klausur ist dennoch ratsam. Diese Aufgaben stammen in dieser bzw. ähnlicher Form aus Prüfungen früherer Semester.

Aufgabe H 109. *Verständnisfragen zu linearer Algebra und Vektorfeldern*

(a) Sei $g_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass g_1 genau dann quellen- **und** wirbelfrei ist, wenn g_1 uneigentlich ist.

(b) Das Vektorfeld $g_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar, wobei $\mathrm{J}g_2(0)$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ habe. Hat g_2 ein Potential?

(c) Sei $g_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Es seien $C_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$, $C_2\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ und $C_3\colon [-2,4] \to \mathbb{R}^3$ reguläre Parametrisierungen mit den Eigenschaften

$$C_1(0) = C_2(0) = C_3(0) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right),$$
$$(g_3 \circ C_1)'(0) = 2C_1'(0), \quad (g_3 \circ C_2)'(0) = -5C_2'(0), \quad (g_3 \circ C_3)'(0) = C_3'(0).$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} g_3 \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right)$.

Hinweis: Wie hängen Spur und Eigenwerte einer Matrix zusammen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) g_1 hat als Isometrie die Gestalt (siehe Kapitel 4.6, lineare Algebra)

$$g_1(x) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\tilde{c}\cdot\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \tilde{c}\cdot\cos(\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)x_1 - \tilde{c}\cdot\sin(\varphi)x_2 + b_1\\ \sin(\varphi)x_1 + \tilde{c}\cdot\cos(\varphi)x_2 + b_2\end{pmatrix}.$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi)$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und $\tilde{c} = 1$ (falls g_1 eigentlich) oder $\tilde{c} = -1$ (falls g_1 uneigentlich). Entsprechend gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} g_1(x) &= \sin(\varphi) - (-\tilde{c})\sin(\varphi) = (1+\tilde{c})\sin(\varphi)\\ \operatorname{div} g_1(x) &= \cos(\varphi) + \tilde{c}\cos(\varphi) = (1+\tilde{c})\cos(\varphi).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Sei g_1 quellen- und wirbelfrei. Da $\cos$ und $\sin$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, muss $\tilde{c} = -1$ sein und g_1 ist uneigentlich.

$\Leftarrow$: Sei g_1 uneigentlich. Dann ist $\tilde{c} = -1$, es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} g_1(x) &= 0\\ \operatorname{div} g_1(x) &= 0.\end{aligned}$$

Also ist g_1 quellen- und wirbelfrei.

(b) Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, verletzen die komplexen Eigenwerte die Integrabilitätsbedingung: Nach dieser wäre $\mathrm{J}g_2(0)$ symmetrisch und damit reell diagonalisierbar. g_2 hat also kein Potential.

(c) Sei $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$ und $\lambda_3 = 1$. Aus der Kettenregel ergibt sich für $j = 1,2,3$: $\mathrm{J}g_3(C_j(0))C_j'(0) = \lambda_j C_j'(0)$. Da C_j reguläre Parametrisierungen sind und somit $C_j'(0)$ nicht der Nullvektor, haben wir wegen der ersten Gleichung also Eigenvektoren von $\mathrm{J}g_3\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right)$ gegeben, die zugehörigen Eigenwerte sind λ_1, λ_2 und λ_3. Somit gil, da die Spur die Summe der Eigenwerte ist (vgl. Bemerkung 5.2.3, Lineare Algebra):

$$\operatorname{div} g_3\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right) = \operatorname{Sp}\mathrm{J}g_3\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right) = 2 - 5 + 1 = -2.$$

Aufgabe H 110. *technische Anwendung des Kurvenintegrals einer reellwertigen Funktion*

Durch $C\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix}t\cos(t)\\ t\sin(t)\\ t\end{pmatrix}$ sei ein idealisierter Draht D parametrisiert.

Die Massendichte des Drahtes betrage $\rho(C(t)) = \sqrt{\frac{t}{2+t^2}}$.

Berechnen Sie die durch das Kurvenintegral $\int_D \rho(s)\,\mathrm{d}\,s$ gegebene Gesamtmasse des Drahtes.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $C'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$\begin{aligned} |C'(t)| &= \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + 1} \\ &= \sqrt{(1+t^2)((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2) + 1} \\ &= \sqrt{2+t^2}. \end{aligned}$$

Die Masse des Drahtes ist also

$$\begin{aligned} \int_C \rho(x)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{4\pi} \rho(C(t)) \cdot |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{t}{2+t^2}}\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{4\pi} \sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^{4\pi} = \frac{16\pi^{3/2}}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 111. *Potential, Parametrisierung, Kurvenintegral*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \frac{-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie ein Potential von f.

(b) Gegeben seien nun die Punkte $P_1 = \binom{2}{0}$, $P_2 = \binom{-2}{0}$ und $Q = \binom{0}{1}$.

(c) Parametrisieren Sie die Ellipse E, die symmetrisch zu den Koordinatenachsen liegt und die Punkte P_1, Q enthält.

(d) Geben Sie eine Parametrisierung für eine Kurve K an, welche vom Startpunkt P_1 zum Endpunkt P_2 über eine Hälfte der Ellipse E läuft und durch Q geht.

(e) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs K.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir integrieren zunächst f_x nach x und erhalten mit der Substitution $u(x) = x^2+y^2$:

$$\int \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{-1}{2u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,u = \left[u^{-\frac{1}{2}}\right] = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + c(y).$$

Wenn wir nun diese Stammfunktion nach y differenzieren, sehen wir, dass $c(y)$ konstant sein muss. Daraus ergibt sich ein Potential zu

$$U\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)^{\mathsf{T}}\} \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^{\mathsf{T}} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(c) Wir parametrisieren zunächst E und nutzen hierfür die Parametrisierung aus Bemerkung 4.6.2: $p : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : t \mapsto \binom{\alpha\cos(t)}{\beta\sin(t)}$. Die Werte für α, β erhalten wir aus der Bedingung $P_1, Q \in E$, indem wir $t = 0$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$ einsetzen: $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Diese Parametrisierung beginnt jedoch in P_2. Wir erhalten eine gesuchte, indem wir obige an der y-Achse spiegeln und nur für $0 \leqq t \leqq \pi$ definieren (wir wollen nur die Hälfte von E durchlaufen). Eine mögliche Parametrisierung lautet also:

$$h : [0,\pi] \to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(d) Wir nutzen Satz 5.3.10:

$$\begin{aligned}\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\, x &= U(h(\pi)) - U(h(0)) \\ &= U\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - U\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$