

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 71. Berechnung von Reihenwerten

Bestimmen Sie den Wert folgender Reihen:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{n!} - \frac{1}{n!e} \right) \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 9} \quad (c) \sum_{k=4}^{\infty} \frac{-1}{(k-2)!k}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)^4 + 21n^2 + 42n + 18}} - \frac{1}{\sqrt{n^4 + 21n^2 - 3}} \right)$$

Hinweis: Teleskopsummen können helfen.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Da die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ nach Beispiel 1.8.6/Bemerkung 1.8.7 gegen e konvergiert, erhalten wir mit Satz 1.9.3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \cdot e = e^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!e} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1$$

und entsprechend – ebenfalls mit Satz 1.9.3 –

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{n!} - \frac{1}{n!e} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!e}$$

$$= e^2 - 1$$

- (b) Wir nutzen die binomische Formel und erhalten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}$$

$$\stackrel{1.8.3}{=} \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

- (c) Wir formen die Folgenglieder $a_k = \frac{-1}{(k-2)!k}$ zuerst um:

$$\frac{-1}{(k-2)!k} = \frac{-(k-1)}{(k-2)!k(k-1)} = \frac{1-k}{(k-1)!k} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!}$$

Die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=4}^n a_k$ ist also eine Folge von Teleskopsummen der

Form $\sum_{k=4}^n b_{k+1} - b_k$ mit $b_k = \frac{1}{(k-1)!}$. Wir nutzen Aufgabe H2 aus dem Wintersemester:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=4}^n (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=1}^3 (b_{k+1} - b_k) \\ &\stackrel{\text{H2}}{=} b_{n+1} - b_1 - (b_4 - b_1) \\ &= b_{n+1} - b_4 = \frac{1}{n!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{-1}{(k-2)!k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Alternativer Lösungsweg: Analog zu oben schreiben wir:

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{-1}{(k-2)!k} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right)$$

Auch hier erkennen wir die Exponentialreihe wieder und berechnen daher:

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \\ &= e - 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = e - \frac{8}{3} \\ \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \\ &= e - 1 - 1 - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Da insbesondere beide Reihen konvergieren, erhalten wir mit 1.9.3

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{-1}{(k-2)!k} &= \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) \\ &= \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \\ &= e - \frac{8}{3} - \left(e - \frac{5}{2} \right) = -\frac{16}{6} + \frac{15}{6} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^4 + 21n^2 + 42n + 18}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^4 + 21(n+1)^2 - 3}},$$

folglich liegt auch hier eine Teleskopreihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ vor mit $a_n = \frac{1}{n^4 + 21n^2 - 3}$.

Analog zu (c) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)^4 + 21(n+1)^2 - 3}} - \frac{1}{\sqrt{n^4 + 21n^2 - 3}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (a_{n+1} - a_n) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_1) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^4 + 21(k+1)^2 - 3}} - \frac{1}{\sqrt{19}} = -\frac{1}{\sqrt{19}}, \end{aligned}$$

wobei wir die letzte Gleichheit mit einem Sandwichargument erhalten:

Für $k \geq 1$ gilt $21(k+1)^4 > 21(k+1)^2 - 3 > 0$ und somit

$$\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)^4}} \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)^4 + 21(k+1)^2 - 3}} \geq \frac{1}{\sqrt{22(k+1)^4}},$$

woraus wir

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \stackrel{1.5.3}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^4}} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^4 + 21(k+1)^2 - 3}} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^4 + 21(k+1)^4}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{22(k+1)^2}} \stackrel{1.5.3}{=} \frac{1}{\sqrt{22}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

erhalten.

Aufgabe H 72. Konvergenz von Reihen

Wir betrachten die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $F_1 := F_0 := 1$ und $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie $F_5 > \left(\frac{3}{2}\right)^5$ und $F_6 > \left(\frac{3}{2}\right)^6$. (b) Folgern Sie $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$ für alle $n \geq 5$.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n}$?

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Wir berechnen zuerst F_5 und F_6 :

$$F_2 = 1 + 1 = 2,$$

$$F_3 = 1 + 2 = 3,$$

$$F_4 = 2 + 3 = 5,$$

$$F_5 = 3 + 5 = 8,$$

$$F_6 = 5 + 8 = 13.$$

Entsprechend gelten

$$F_5 \cdot 2^5 = 8 \cdot 32 = 256 > 243 = 3^5$$

$$F_6 \cdot 2^6 = 13 \cdot 64 = 832 > 729 = 3^6$$

beziehungsweise

$$F_5 > \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5, \quad F_6 > \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6.$$

(b) Wir folgern dies aus (a) mit vollständiger Induktion, in dem wir die folgende modifizierte (aber äquivalente) Aussage zeigen:„Für alle $n \geq 6$ gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ **und** $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.“**(IA)** Wir beginnen bei $n = 6$. Wie in (a) gezeigt, gelten:

$$\begin{aligned} F_{6-1} = F_5 &= 8 > \frac{243}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} \\ F_6 &= 13 > \frac{729}{64} = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

(IH) Für beliebiges $n \geq 6$ gelte $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ und $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.**(IS)** $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &\stackrel{\text{(IH)}}{>} \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{10}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &> \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion folgt $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$, $F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ für alle $n \geq 6$, also $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$ für alle $n \geq 5$.

- (c) Aus (b) folgt zusätzlich $F_n > 0$ für alle $n \geq 5$. Insbesondere gilt für $n \geq 5$ gemäß (a),(b) $\left|\frac{1}{F_n}\right| = \frac{1}{F_n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Da folglich die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ eine Majorante ist, welche nach 1.8.4 konvergiert – es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $q = \frac{2}{3}$ – ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ nach dem Majorantenkriterium ebenfalls konvergent.

Aufgabe H 73. Reihenkonvergenz in Abhängigkeit von Parametern

Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2}{\alpha^k (\alpha - 1)^k}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Für welche Werte von α konvergiert die Reihe nach dem

- (a) Quotientenkriterium? (b) Wurzelkriterium?
 (c) Wieso **müssen** die entsprechenden Bereiche die selben Randpunkte haben?
 (d) Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $\alpha = 3$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Sei $a_k := \frac{(-1)^k \cdot 2}{\alpha^k (\alpha - 1)^k}$. Wir betrachten den Betrag des Quotienten aufeinanderfolgender Summanden:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\left(\frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{\alpha^{k+1} (\alpha - 1)^{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^k (\alpha - 1)^k}{(-1)^k \cdot 2}\right)\right| = \frac{1}{|\alpha(\alpha - 1)|}$$

Da Betrag des Quotienten also konstant ist, konvergiert die Reihe dann – und nur dann – nach dem Quotientenkriterium, wenn

$$\frac{1}{|\alpha(\alpha - 1)|} < 1 \quad \text{bzw.} \quad |\alpha^2 - \alpha| = |\alpha(\alpha - 1)| > 1.$$

Für $0 < \alpha < 1$ ist $|\alpha(\alpha - 1)| = \underbrace{|\alpha|}_{<1} \cdot \underbrace{|\alpha - 1|}_{<1} < 1$, für $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$ gilt hingegen

$\alpha^2 - \alpha > 0$. Dadurch können wir obige Bedingung umschreiben zu $\alpha^2 - \alpha - 1 > 0$.

Die Funktion $x \mapsto x^2 - x - 1$ beschreibt hierbei eine nach oben geöffnete Parabel, also ergibt sich die gesuchte Menge als die Menge aller Zahlen, die nicht zwischen den Nullstellen $\eta_{1/2}$ (einschließlich $\eta_{1/2}$) liegen. Wir berechnen:

$$\eta_1 = \frac{1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Folglich konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium für alle

$$\alpha \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid r < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

und für alle

$$\alpha \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty \right) = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid r > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

(Wegen $\eta_1 < 0 < 1 < \eta_2$ müssen wir 0 und 1 nicht extra ausschließen.)

(b) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|a_k|} &= \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^k \cdot 2}{\alpha^k (\alpha - 1)^k} \right|} \\ &= \frac{1}{|\alpha(\alpha - 1)|} \sqrt[k]{2}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2} = 1$, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{|\alpha(\alpha - 1)|}$. Es gibt folglich genau dann ein $t < 1$ sowie ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq t$ für alle $n > n_0$, wenn $\frac{1}{|\alpha(\alpha - 1)|} < 1$. Dies ist die selbe Bedingung wie oben, wir erhalten mit analoger Rechnung: Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium für alle

$$\alpha \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

sowie für alle

$$\alpha \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty \right).$$

(c) Hätten die Bereiche unterschiedliche Randpunkte, hieße dies, dass es (mindestens) ein α gibt, für das die Reihe nach einem der beiden Kriterien konvergiert, nach dem anderen aber divergiert. Da die Begriffe „Konvergenz“ und „Divergenz“ gegensätzlich sind, ist dies nicht möglich.

(d) Sei $\alpha = 3$. Wir berechnen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2}{3^k (3 - 1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right)^k = 2 \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{6})} = \frac{12}{7}$$

Aufgabe H 74. Turmbau für Mathematiker

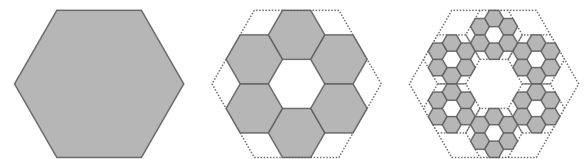
Wir bauen einen Turm Stockwerk für Stockwerk. Die Grundfläche des EG (Stock 0) ist ein regelmäßiges Sechseck mit Flächeninhalt $A_0 = 1$. Die Grundfläche des nächsten Stocks entsteht, in dem wir 6 gleich große, regelmäßige Sechsecke maximaler Größe in die des zuvor betrachteten Stocks so einschreiben, dass es keine Überlappungen, aber Berührungen gibt. Dieser Schritt wird (unendlich oft) wiederholt, wie für die ersten drei Stockwerke skizziert.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl q_n der im Stock n entstehenden Sechsecke.

(b) Bestimmen Sie die Fläche A_n eines im Stock n entstehenden Sechsecks.

(c) Bestimmen Sie das Volumen V des Turmes, falls jeder Stock dieselbe Höhe hat.

(d) Bestimmen Sie V , falls jeder Stock halb so hoch wie der vorherige ist. (Die Höhe des EG sei dabei gleich 1.)



0. Stock

1. Stock

2. Stock

Grundrisse der ersten 3 Stockwerke

Lösungshinweise hierzu:

- (a) In jedes Sechseck des $(n-1)$ -ten Stocks werden 6 Sechsecke eingeschrieben, also ergibt sich

$$q_n = 6 \cdot q_{n-1} \quad (1)$$

Hieraus folgt $q_n = 6^n$ für alle $n \geq 0$, wie wir induktiv zeigen:

IA Wir beginnen bei $n = 0$: Es gilt $q_0 = 1 = 6^0$.

IH Es gelte $q_n = 6^n$ für ein $n \geq 0$.

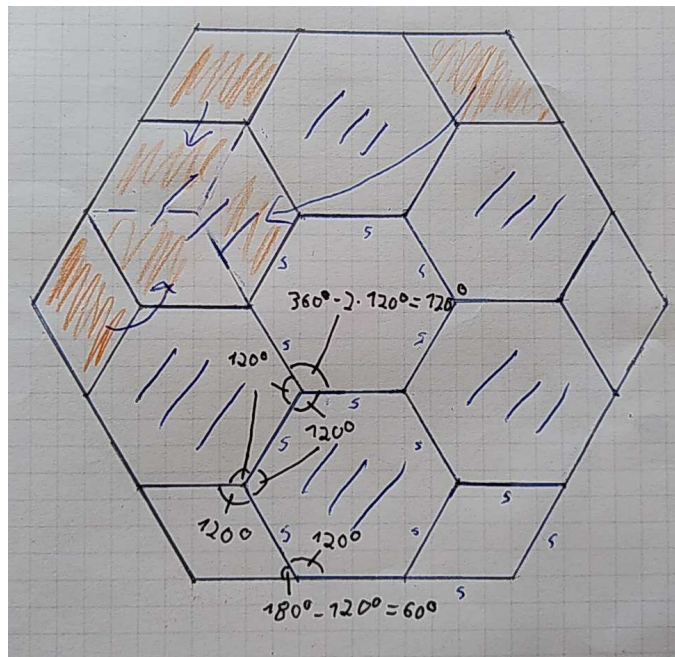
IS $n \rightarrow n + 1$:

Wie bereits festgestellt, versechsfacht sich die Anzahl an Sechsecken, es gilt

$$q_{n+1} \stackrel{(1)}{=} 6 \cdot q_n \stackrel{\text{IH}}{=} 6 \cdot 6^n = 6^{n+1}.$$

Damit folgt die Behauptung durch vollständiger Induktion.

- (b) Wir beginnen mit einer Hilfsskizze (Winkel im Gradmaß):



Dabei machen wir folgende Beobachtungen:

- (i) Schreibt man 6 Sechsecke auf die beschriebene Weise in ein Sechseck des vorherigen Stockwerks ein, erhält man deren Gesamtfläche $6A_n$, indem man von der Fläche des vorherigen Sechsecks (A_{n-1}) die Fläche des zentralen Sechsecks (in der Skizze ohne Schraffur) und die Flächen der 6 Vierecke an den Ecken abzieht.
- (ii) Besagtes zentrales 6 Sechseck und die Vierecke haben alle die selbe Seitenlänge wie eines der neuen Sechsecke (in der obigen Skizze s genannt). Bei letzteren ergibt sich dies daraus, dass die Seiten der kleineren Sechsecke parallel zu denen des großen sind, es sich bei den Vierecken also um Rauten handelt.

- (iii) Ein Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks misst $\frac{2}{3}\pi$ (Bogenmaß), insbesondere misst jeder Innenwinkel des zentralen Sechsecks ebenfalls jeweils $\frac{2}{3}\pi$, es hat also ebenfalls den Flächeninhalt A_n .
- (iv) Analog gilt für die Rauten, dass zwei der Innenwinkel $\frac{2}{3}\pi$ messen. Die anderen beiden sind entsprechend jeweils $\frac{1}{3}\pi$. Folglich erhält man durch Zusammenlegen von je drei Rauten ein Sechseck der Fläche A_n . (In der Skizze durch Verschieben/Umkappen der orangenen Rauten veranschaulicht.)

Hieraus ergibt sich: Ein Sechseck der Fläche A_{n-1} setzt sich aus 9 (teilweise zerstückelten) Sechsecken mit Fläche A_n zusammen, es gilt:

$$A_n = \frac{1}{9}A_{n-1}. \quad (2)$$

Analog zu oben ergibt sich induktiv $A_n = \frac{1}{9^n}$:

- (IA) Es gilt $A_0 = 1 = \frac{1}{9^0}$.
- (IH) Es gelte $A_n = \frac{1}{9^n}$ für ein $n \geq 0$.
- (IS) $n \rightarrow n+1$: Es gilt

$$A_{n+1} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{9} \cdot A_n \stackrel{(IH)}{=} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9^n} = \frac{1}{9^{n+1}}.$$

- (c) Jeder Stock habe nun Höhe h . Das Volumen des gesamten Turms ergibt sich als Summe über die Volumina der einzelnen Stockwerke. Das Volumen des n . Stocks ergibt sich hierbei als das Gesamtvolumen von q_n sechseckigen Prismen mit Grundfläche A_n und Höhe $h_n = h$, also $q_n \cdot A_n \cdot h$. Entsprechend gilt:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot A_n \cdot h_n = \sum_{n=0}^{\infty} 6^n \cdot \frac{1}{9^n} \cdot h \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &\stackrel{1.9.3}{=} h \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3h. \end{aligned}$$

- (d) Das Volumen des Turms ergibt sich analog zu oben als $V = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot A_n \cdot h_n$, wir müssen nur beachten, dass die Höhe h_n des n . Stocks nun von n abhängt. Mit vollständiger Induktion zeigen wir $h_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 0$:

- (IA) Gemäß der Aufgabenstellung ist $h_0 = 1 = \frac{1}{2^0}$.
- (IH) Für ein $n \geq 0$ gelte $h_n = \frac{1}{2^n}$.
- (IS) $n \rightarrow n+1$: Gemäß der Angabe gilt $h_{n+1} = \frac{1}{2} h_n$, also:

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \frac{1}{2} h_n \stackrel{(IH)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich als Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{n=0}^{\infty} 6^n \cdot \frac{1}{9^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. Orthonormierung

Gegeben seien $b_1 := (0, 4, 0, 4)^T$, $b_2 := (4, 0, -5, 0)^T$, $b_3 := (5, -12, 4, 4)^T \in \mathbb{R}^4$.

Bestimmen Sie eine ONB $F : f_1, f_2, f_3$ mit $L(f_1) = L(b_1)$, $L(f_1, f_2) = L(b_1, b_2)$ und $L(f_1, f_2, f_3) = L(b_1, b_2, b_3)$.

Lösungshinweise hierzu: Offensichtlich gilt bereits $\langle b_1 | b_2 \rangle = 0$, also erhalten neben f_1 auch f_2 direkt durch Normierung:

$$\begin{aligned} f_1 &:= \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 4^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f_2 &:= \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f_3 erhalten wir mittels Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} f_3^* &:= b_3 - \langle b_3 | f_1 \rangle f_1 - \langle b_3 | f_2 \rangle f_2 \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{41} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ f_3 &:= \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{25 + 64 + 16 + 64}} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{169}} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist $F : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ eine Basis der gewünschten Form.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 76. Stetigkeit, ε - δ -Kriterium

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}|x-1| + \frac{1}{2} & \text{für } x \leq 2 \\ 2 - \sqrt{x-1} & \text{für } x > 2 \end{cases}$.

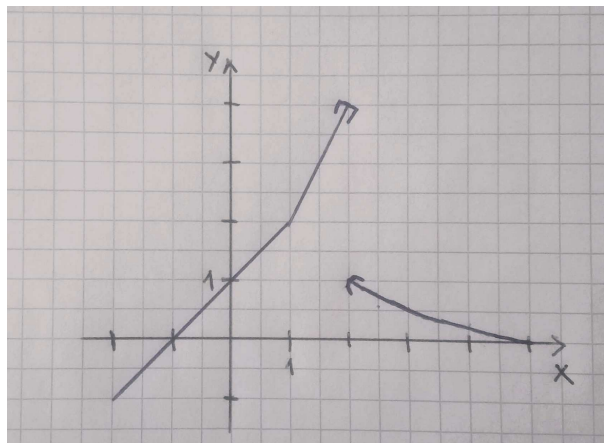
- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $[-2, 5]$.
- (b) Sei eine Fehlerschranke ε mit $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.
- (i) Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_1 > 0$ und ein $\delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für $x \in (1 - \delta_1, 1]$ und $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für $x \in [1, 1 + \delta_2)$.
- (ii) Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ für δ_1, δ_2 aus (i). Zeigen Sie $f(U_\delta(1)) \subseteq U_\varepsilon(f(1))$.
Ist f an der Stelle 1 stetig?
- (c) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, für welches kein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(2)) \subseteq U_\varepsilon(f(2))$ existiert.
Ist f an der Stelle 2 stetig?

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Zum Skizzieren lösen wir den Betrag auf. Es gilt $|x-1| = -(x-1)$ für $x \leq 1$ und $|x-1| = x-1$ für $x \geq 1$, womit schließlich

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 - \sqrt{x-1} & \text{für } x > 2 \end{cases}.$$

Im Bereich $[-2, 5]$ erhalten wir damit die folgende Skizze des Graphen von f :



In der Skizze haben wir analog zur Intervallschreibweise eckige und runde Klammern verwendet, um an der Sprungstelle bei $x = 2$ zu kennzeichnen, dass der Punkt $(2, f(2)) = (2, 4)$ zum Graphen von f gehört, und der Punkt $(2, 1)$ nicht dazugehört.

- (b) (i) Sei eine Fehlerschranke ε mit $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.
- Setze $\delta_1 := \varepsilon$. Für $x \in (1 - \delta_1, 1]$ gilt $|x-1| < \delta_1$ und $f(x) = x+1$, womit

$$|f(x) - f(1)| = |x+1 - 2| = |x-1| < \delta_1 = \varepsilon.$$

- Setze $\delta_2 := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $[1, 1 + \delta_2) = [1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}) \subsetneq [1, 2)$ wegen $\varepsilon < 1$. Für $x \in [1, 1 + \delta_2)$ folgt somit $|x-1| < \delta_2$ und $f(x) = 2x$, und damit insgesamt

$$|f(x) - f(1)| = |2x - 2| = 2|x-1| < 2\delta_2 = \varepsilon.$$

Bemerkung: Jede Wahl von δ_1, δ_2 mit $0 < \delta_1 \leq \varepsilon$ und $0 < \delta_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ funktioniert, da aus der obigen Rechnung für $x \in (1 - \delta_1, 1]$ bzw. $x \in [1, 1 + \delta_2)$ dann folgt

$$|f(x) - f(1)| < \delta_1 \leq \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad |f(x) - f(1)| < 2\delta_2 \leq \varepsilon.$$

(ii) • Sei $1 > \varepsilon > 0$ und $x \in U_\delta(1)$. Damit gilt $|x - 1| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, also

$$x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \subseteq (1 - \delta_1, 1 + \delta_2) = (1 - \delta_1, 1] \cup [1, 1 + \delta_2).$$

Somit ist $x \in (1 - \delta_1, 1]$ oder $x \in [1, 1 + \delta_2)$. Mit (i) folgt daher $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$, d.h. $f(x) \in U_\varepsilon(f(1))$. Insgesamt ergibt sich $f(U_\delta(1)) \subseteq U_\varepsilon(f(1))$.

• Um die Stetigkeit zu beweisen muss die ε - δ -Beschreibung für alle $\varepsilon > 0$ überprüft werden. Soweit haben wir dies nur für $1 > \varepsilon > 0$ getan.

Sei jetzt $\varepsilon \geq 1$. Wir können dann ein beliebiges ε' mit $1 > \varepsilon' > 0$ wählen, und wissen, dass $\delta_{\varepsilon'} > 0$ existiert mit $(|x - 1| < \delta_{\varepsilon'} \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon')$. Setze $\delta_\varepsilon := \delta_{\varepsilon'}$, dann folgt $(|x - 1| < \delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon'} \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon' < \varepsilon)$.

Damit gilt die ε - δ -Bedingung für alle $\varepsilon > 0$ an der Stelle 1, womit f an der Stelle 1 stetig ist.

(c) Sei $\delta > 0$. Dann gibt es ein $\tilde{x} \in U_\delta(2) = (2 - \delta, 2 + \delta)$ mit $\tilde{x} > 2$ (z.B. $\tilde{x} := 2 + \frac{\delta}{2}$). Wegen $\tilde{x} > 2$ gilt insbesondere $f(\tilde{x}) = 2 - \sqrt{\tilde{x} - 1}$ und $\sqrt{\tilde{x} - 1} > 1$ (da nach 0.2.5 $\sqrt{\tilde{x} - 1} > 1 \Leftrightarrow \tilde{x} - 1 > 1$). Insgesamt folgt

$$|f(\tilde{x}) - f(2)| = |2 - \sqrt{\tilde{x} - 1} - 4| = |-2 - \sqrt{\tilde{x} - 1}| = 2 + \sqrt{\tilde{x} - 1} > 3,$$

wobei sich die Betragsauflösung aus $-2 - \sqrt{\tilde{x} - 1} < -2 - 1 = -3 < 0$ ergibt.

Für $\varepsilon := 3$ (oder eine andere Wahl $\varepsilon \in (0, 3]$) gibt es also für jedes $\delta > 0$ ein $\tilde{x} \in U_\delta(2)$ mit $|f(\tilde{x}) - f(2)| > 3 \geq \varepsilon$. D.h. $f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(f(2))$, und damit $f(U_\delta(2)) \not\subseteq U_\varepsilon(f(2))$.

Für $\varepsilon = 3$ gilt also die ε - δ -Bedingung nicht an der Stelle 2, womit f an der Stelle 2 nicht stetig ist.

Aufgabe H 77. Stetigkeit und Folgen

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

(a) Wir betrachten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}}$. Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt einerseits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi n}} = \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n}} = \sqrt[3]{0} = 0$$

wegen der Stetigkeit von $w: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty): x \mapsto \sqrt[3]{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Andererseits ist $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit

$$f(a_n) = a_n \cos\left(\frac{1}{a_n^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{a_n^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}} \cos(2\pi n) - \sin(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}} = a_n$$

wegen $\cos(2\pi n) = 1$ und $\sin(2\pi n) = 0$. Somit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bemerkung: Die Stetigkeit von $w: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty): x \mapsto \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$ ergibt sich mittels der folgenden Relation: Für $a, b \in [0, +\infty)$ gilt $(a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3)$.

Sei $a^3 < b^3$. Wäre $a \geq b$, dann ergibt die Multiplikation mit den nichtnegativen Zahlen $a^2/ab/b^2$ weiter $a^3 \geq a^2b/a^2b \geq ab^2/ab^2 \geq b^3$, womit $a^3 \geq a^2b \geq ab^2 \geq b^3$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $a < b$.

Falls umgekehrt $a < b$, folgt mit 1.13.10 $a^3 < b^3$.

Für den Stetigkeitsbeweis sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $\delta := \varepsilon^3$. Für alle $x \in [0, +\infty)$ mit $|x| = |x - 0| < \delta$ gilt $x = |x|$ und nach der obigen Relation $\sqrt[3]{|x|} < \sqrt[3]{\delta}$, womit

$$|w(x) - w(0)| = |\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x|} < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon.$$

(b) Für die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}$ ergibt sich analog zu (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} = \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} = \sqrt[3]{0} = 0.$$

Da $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt weiter

$$f(b_n) = b_n \cos\left(\frac{1}{b_n^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{b_n^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$$

wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$. Somit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$.

(c) Wir betrachten die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{für gerades } n \\ b_n & \text{für ungerades } n \end{cases}.$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, da nach (a) und (b) sowohl die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit geradem Index besteht, als auch die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit ungeradem Index besteht, gegen den Grenzwert 0 konvergiert. Zudem gilt

$$f(c_n) = \begin{cases} a_n & \text{für gerades } n \\ -1 & \text{für ungerades } n \end{cases},$$

womit $(f(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ zwei verschiedene Häufungspunkte (-1 und 0 wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) hat und damit nicht konvergiert.

(d) Nach Definition 1.10.3 ist die Funktion f unstetig in $x_0 = 0$, da für die gegen 0 konvergente Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$ zwar existiert, aber nicht mit dem Funktionswert $f(0) = 0$ übereinstimmt.

Aufgabe H 78. Einseitige Funktionsgrenzwerte

Gegeben sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{|x^3 + 3x^2 - 4|}{(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1)}$.

- (a) Ist f stetig?
 (b) Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken des Definitionsbereiches. An welchen Stellen ist f stetig fortsetzbar?
 (c) Skizzieren Sie den Graphen von f .

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Nach 1.12.3 und 1.12.4 ist der Zähler von f stetig als Hintereinanderausführung der stetigen Betragsfunktion und einer Polynomfunktion, der Nenner von f stetig als Produkt zweier Polynomfunktionen, und somit f stetig als Quotient stetiger Funktionen.
 (b) Die Definitionslücken sind Nullstellen des Nenners, womit $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1)^2(x - 1)$. Außerdem stellen wir fest, dass -2 und 1 auch Nullstellen des Zählers sind. Mit Hilfe einer Polynomdivision erhalten wir somit die Faktorisierung $|x^3 + 3x^2 - 4| = |(x + 2)^2(x - 1)| = (x + 2)^2|x - 1|$ und damit insgesamt

$$f(x) = \frac{(x + 2)^2|x - 1|}{(x + 2)(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{(x + 2)|x - 1|}{(x + 1)^2(x - 1)} = \begin{cases} -\frac{x+2}{(x+1)^2} & \text{für } x < 1 \wedge x \notin \{-2, -1\} \\ \frac{x+2}{(x+1)^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

- Definitionslücke $x_0 = -2$. Wir erhalten mit 1.12.1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-0} -\frac{x+2}{(x+1)^2} = -\frac{-2+2}{(-2+1)^2} \\ &= 0 = \lim_{x \rightarrow -2+0} -\frac{x+2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x). \end{aligned}$$

Hier existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert und stimmen überein. Die Funktion f kann also in -2 stetig fortgesetzt werden (durch Definition $f(-2) := 0$).

- Definitionslücke $x_0 = -1$. Es genügt x in der Nähe von -1 zu betrachten. Damit können wir annehmen, dass $x + 2 > 0$ und $x < 1$ so, dass $f(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2}$. Da $(x + 1)^2 > 0$ wenn wir uns von links/rechts der -1 annähern, folgt somit

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} -\frac{x+2}{(x+1)^2} = -\infty = \lim_{x \rightarrow -1+0} -\frac{x+2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x).$$

Bei der Definitionslücke $x_0 = -1$ liegt bestimmte Divergenz vor, also kann die Funktion in -1 nicht stetig fortgesetzt werden.

- Definitionslücke $x_0 = 1$. Wir erhalten mit 1.12.1 für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} -\frac{x+2}{(x+1)^2} = -\frac{1+2}{(1+1)^2} = -\frac{3}{4}$$

und für den rechtsseitigen Grenzwert

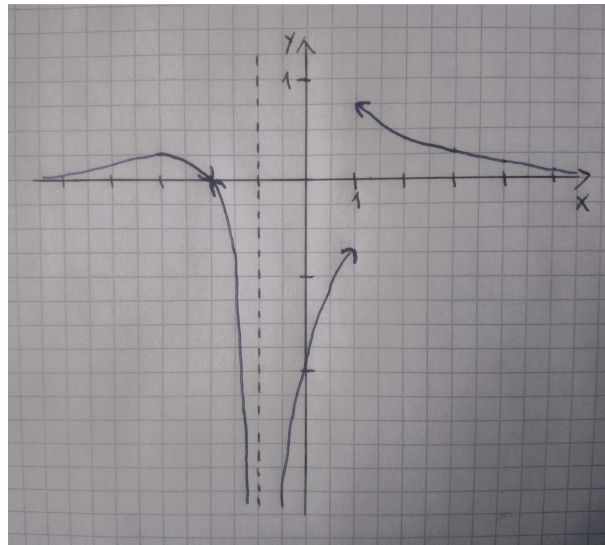
$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{1+2}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}.$$

Der links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren zwar, sind aber unterschiedlich. Die Funktion ist daher in 1 nicht stetig fortsetzbar.

- (c) Die Skizze sollte neben dem Verhalten an den Definitionslücken (stetige Ergänzung bei -2 , senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel $-/-$ bei -1 , und Sprung bei 1) das qualitative Verhalten der Funktion wiedergeben, insbesondere das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$. Mit 1.11.8 erhalten wir dafür

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x+2}{(x+1)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{(x+1)^2} = 0.$$

Damit ergibt sich die folgende Skizze des Graphen von f :



In der Skizze haben wir analog zur Intervallschreibweise runde Klammern verwendet, um zu kennzeichnen, dass die Endpunkte $(1, -\frac{3}{4})$, $(1, \frac{3}{4})$ bei der Sprungstelle $x = 1$ und der Punkt $(-2, 0)$ bei $x = -2$ nicht zum Graphen von f dazugehören.

Aufgabe H 79. Funktionsgrenzwerte

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 8x + 21}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x \sin(x^3) - 3x^2 e^x\right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2x^3}{\sqrt{5x^7 + 9x^6} - \sqrt{5x^7 + x^6}}$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir bemerken, dass -3 Nullstelle des Zählers und des Nenners ist. Nach Polynomdivision erhalten wir die Faktorisierungen $x^3 + x^2 - 7x - 3 = (x+3)(x^2 - 2x - 1)$ und $x^3 - 2x^2 - 8x + 21 = (x+3)(x^2 - 5x + 7)$. Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 8x + 21} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 - 2x - 1)}{(x+3)(x^2 - 5x + 7)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 7} = \frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 1}{(-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 7} = \frac{14}{31}. \end{aligned}$$

(b) Mit 1.12.2 folgt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{s \rightarrow 0-0} \frac{1}{s} \cdot \tan\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s \rightarrow 0-0} \frac{\tan(s)}{s}.$$

Nach 1.12.5 gilt $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tan(s)}{s} = 1$ und damit insbesondere $\lim_{s \rightarrow 0-0} \frac{\tan(s)}{s} = 1$. Da wegen der Stetigkeit von \ln auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ existiert, folgt mit dem Analogon von 1.12.1.7 für Grenzwerte im Unendlichen (siehe Bemerkung nach 1.12.2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln(t) = 0.$$

(c) Wir zeigen $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \sin(x^3) - 3x^2 e^x) = -\infty$. Dafür betrachten wir die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (e^x \sin(x^3) - 3x^2 e^x)$ und zeigen gemäß 1.11.4.4 die Bedingung

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists s \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}: (s < x \implies f(x) < t).$$

Für $1 < x$ gilt $\sin(x^3) \leq 1$, $e^x > 0$, insbesondere $1 < x^2 \Leftrightarrow -3x^2 < -3$, und somit

$$f(x) = e^x \sin(x^3) - 3x^2 e^x \leq e^x - 3x^2 e^x < -2e^x.$$

Falls $t \geq 0$, setzen wir $s := 1$ und erhalten $f(x) < -2e^x < 0 \leq t$ für $x > 1 = s$.
Falls $t < 0$, gilt $-\frac{t}{2} > 0$. Setze nun $s := \max\{1, \ln(-\frac{t}{2})\}$. Für $s < x$ gilt dann $1 < x$ und $\ln(-\frac{t}{2}) < x$. Damit können wir die obige Abschätzung benutzen und erhalten mit der Monotonie der Exponentialfunktion $f(x) < -2e^x < -2e^{\ln(-\frac{t}{2})} = -2 \cdot (-\frac{t}{2}) = t$.

(d) Da wir den linksseitigen Grenzwert betrachten ist $x < 0$. Damit ist $\sqrt{x^6} = |x|^3 = -x^3$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{2x^3}{\sqrt{5x^7 + 9x^6} - \sqrt{5x^7 + x^6}} &= \frac{2x^3}{-x^3(\sqrt{5x + 9} - \sqrt{5x + 1})} = \frac{-2}{\sqrt{5x + 9} - \sqrt{5x + 1}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0-0} \frac{-2}{\sqrt{9} - \sqrt{1}} = -1, \end{aligned}$$

wobei wir im Grenzübergang die Stetigkeit der Wurzelfunktion verwendet haben.

Bemerkung: Die Stetigkeit der Wurzelfunktion $v: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty): x \mapsto \sqrt{x}$ lässt sich wie folgt zeigen.

Zunächst zeigen wir, dass v in $x_0 = 0$ stetig ist. Sei dafür $\varepsilon > 0$. Wähle nun $\delta := \varepsilon^2$. Für alle $x \in [0, +\infty)$ mit $|x| = |x - 0| < \delta$ gilt $x = |x|$ und mittels 0.2.5 $\sqrt{|x|} < \sqrt{\delta}$, womit $|v(x) - v(0)| = |\sqrt{x}| = \sqrt{|x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$.

Wir zeigen nun die Stetigkeit von v in $x_0 > 0$. Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \varepsilon\sqrt{x_0} > 0$. Für alle $x \in [0, +\infty)$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt nach 0.2.5 $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} > 0$ und somit $(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) = x - x_0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$. Damit folgt insgesamt

$$|v(x) - v(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 80. Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)}{n}$$

(b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 - \sqrt{n}} - \sqrt{2n^2 + 4n} \right)$$

Lösungshinweise hierzu:(a) Wir können die Folge als ein Produkt zweier Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß

$$\frac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)}{n} = \left(\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2) \right) \cdot \frac{1}{n} = a_n \cdot b_n$$

auffassen, wobei $a_n := \left(\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2) \right)$ und $b_n := \frac{1}{n}$.Nun ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $-2 \leq a_n \leq 2$, wobei sich die Schranken wie folgt ergeben: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ und $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, womit für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $-1 \leq \sin(2n^3) \leq 1$ und $-1 \leq -\sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2) \leq 1$ erfüllt sind.Da $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, folgt mit **H67(b)** direkt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)}{n} = 0$.**Alternative:**Da $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir mit den Rechenregeln für Beträge

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)}{n} \right| = \frac{|\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)|}{n} \\ &\leq \frac{|\sin(2n^3)| + |-\sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)|}{n} = \frac{|\sin(2n^3)| + \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right| |\cos(n^2)|}{n} \leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ gilt, folgt mit dem Sandwichsatz 1.5.6

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)}{n} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)}{n} \right|,$$

wobei im letzten Schritt die Stetigkeit der Betragsfunktion benutzt wurde. Damit folgt schließlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n^2)}{n} = 0$.

(b) Mit einer binomischen Erweiterung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2n^2 - \sqrt{n}} - \sqrt{2n^2 + 4n} &= \left(\sqrt{2n^2 - \sqrt{n}} - \sqrt{2n^2 + 4n} \right) \cdot \frac{\sqrt{2n^2 - \sqrt{n}} + \sqrt{2n^2 + 4n}}{\sqrt{2n^2 - \sqrt{n}} + \sqrt{2n^2 + 4n}} \\
 &= \frac{2n^2 - \sqrt{n} - (2n^2 + 4n)}{\sqrt{2n^2 - \sqrt{n}} + \sqrt{2n^2 + 4n}} \\
 &= \frac{-\sqrt{n} - 4n}{n \left(\sqrt{2 - \frac{1}{n^{3/2}}} + \sqrt{2 + \frac{4}{n}} \right)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}} - 4}{\sqrt{2 - \frac{1}{n^{3/2}}} + \sqrt{2 + \frac{4}{n}}} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-0 - 4}{\sqrt{2 - 0} + \sqrt{2 + 0}} = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2},
 \end{aligned}$$

wobei wir im Grenzübergang die Stetigkeit der Wurzelfunktion verwendet haben (siehe Bemerkung zu **H79(d)**).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 81. Gleichheitsproblem

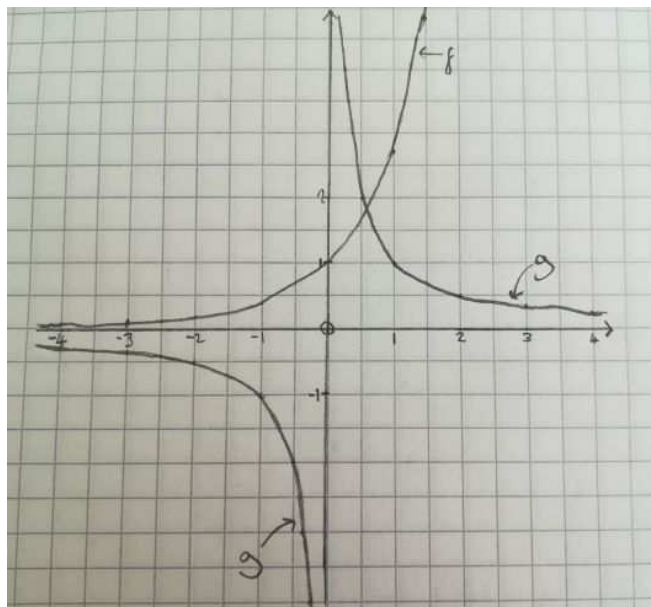
Gegeben seien die Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^x$, $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x}$.

- Skizzieren Sie die beiden Funktionen im Intervall $[-4, 4]$.
- Warum kann man nicht mit Hilfe des Nullstellensatzes auf die Lösbarkeit der Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(-4, 4)$ schließen?
- Gibt es eine Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(-\infty, 0)$?
Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung auf $(0, +\infty)$ gibt.
- Finden Sie mittels der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Breite 2^{-4} , das die Lösung enthält. Starten Sie das Verfahren mit dem Intervall $[a_1, b_1] = [\frac{1}{2}, 1]$.

Hinweis: Für Teilaufgabe (d) können Sie Werte der Funktion f mit Hilfe eines elektronischen Rechners approximieren. Beachten Sie, dass die Ausgabe als abbrechende Dezimalentwicklung nur (je nach Rundung) eine untere oder obere Schranke für den korrekten Wert darstellt.

Lösungshinweise hierzu:

(a)



- Betrachten wir die Funktion $h(x) := f(x) - g(x)$. Das Gleichheitsproblem der zwei Funktionen f, g ist das Nullstellenproblem der Funktion h . Der Nullstellensatz von Bolzano setzt die Stetigkeit und (indirekt) Wohldefiniertheit von h voraus. Da h in 0 nicht definiert ist, hilft der Nullstellensatz nicht.
- Es gibt keine Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(-\infty, 0)$:
Es gelten $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ und $\frac{1}{x} < 0 \forall x \in (-\infty, 0)$, also gibt es keine $x_0 < 0$ derart, dass $e^x = \frac{1}{x}$.
Es existiert allerdings eine Lösung auf $(0, \infty)$:
Es gelten $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty < 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty > 0$. Da h im Intervall $(0, +\infty)$ stetig ist, liefert der Nullstellensatz von Bolzano die Existenz von (mindestens) einer Nullstelle von h (und also eine Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$) in dem Intervall $(0, +\infty)$.
Diese Lösung ist auch eindeutig, da die Funktion h im Intervall $(0, +\infty)$ streng monoton

steigend ist. Man kann schon anhand der Skizze erahnen, dass f auf dem Intervall $(0, +\infty)$ streng monoton wächst, während g streng monoton fallend ist: Da $\frac{1}{x}$ streng monoton fällt, ist $-\frac{1}{x}$ streng monoton steigend. Da e^x ebenfalls streng monoton steigend ist, ergibt sich: $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$ ist streng monoton steigend.

Bemerkung: Die Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$ schreibt man explizit als $x = W(1) \approx 0.567143$, wobei $W(x)$ die lambertische W-Funktion ist. Diese Funktion ist nützlich in viele Anwendungen, aber ist schwer zu handhaben. Man braucht elektronische Hilfsmittel zur näheren Bestimmung der Lösung.

(d) Da $1 < e < 4$, gelten $f(a_1) = \sqrt{e} < 2 = g(a_1)$ und $f(b_1) = e > 1 = g(b_1)$.

Die Intervallhalbierungsmethode liefert sukzessive: $\frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{3}{4}$. Da gilt

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = e^{\frac{3}{4}} > \frac{4}{3} = g\left(\frac{3}{4}\right), \quad (3)$$

ist $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{3}{4}$.

Es ist $\frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{5}{8}$. Da gilt

$$f\left(\frac{5}{8}\right) = e^{\frac{5}{8}} > \frac{8}{5} = g\left(\frac{5}{8}\right), \quad (4)$$

ist $a_3 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{5}{8}$.

Es ist $\frac{1}{2}(a_3 + b_3) = \frac{9}{16}$. Da gilt

$$f\left(\frac{9}{16}\right) = e^{\frac{9}{16}} > \frac{16}{9} = g\left(\frac{9}{16}\right), \quad (5)$$

ist $a_4 = \frac{9}{16}$, $b_4 = \frac{5}{8}$.

Wegen $b_4 - a_4 = 0.0625$, enthält das Intervall $I = [a_4, b_4]$ die gesuchte Nullstelle mit der gewünschten Genauigkeit.

Alternativer Lösungsweg ohne elektronische Hilfsmittel:

Wir kennen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ streng monoton steigend ist (Satz 1.2.8). Daher gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$.

Falls für ein a die Ungleichung $e > a$ gilt, folgt $e^p > a^p$ ($(e/a) > 1$) für Potenz $p \in \mathbb{R}^+$. Insbesondere gilt

$$e^p > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{np}$$

für beliebiges $p \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$. Dies nutzen wir im Folgenden aus, indem wir n mit $np \in \mathbb{N}$ verwenden. (Dies ist für rationales $p > 0$ immer möglich.)

Um die Ungleichung (3) zu zeigen, wählen wir $n = 4$. Dann gilt:

$$e^{\frac{3}{4}} > \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 > \frac{4}{3}.$$

Gleichfalls zeigen wir die Ungleichung (4), indem wir $n = 8$ wählen. Dann gilt:

$$e^{\frac{5}{8}} > \left(1 + \frac{1}{8}\right)^5 = \left(\frac{9}{8}\right)^5 > \frac{8}{5}.$$

Der Vergleich der Funktionswerte ist nun nicht mehr so leicht möglich, daher nutzen wir die Binomische Erweiterung von $9^5 = (8 + 1)^5$, es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{9^5}{8^5} &= \frac{8^5 + 5 \cdot 8^4 + \binom{5}{2} 8^3 + \binom{5}{3} 8^2 + 5 \cdot 8 + 1}{8^5} \\ &= 1 + \frac{5}{8} + \binom{5}{2} \frac{1}{8^2} + \binom{5}{3} \frac{1}{8^3} + \frac{5}{8^4} + \frac{1}{8^5} \\ &> 1 + \frac{5}{8} \\ &= \frac{13}{8} > \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Für (5) ist es schwer, ohne elektronische Hilfsmittel zu rechnen.

Aufgabe H 82. Maxima

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es sei ξ eine Stelle, an der die Funktion f ihr Maximum $m := \max \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ annimmt.

(a) Es seien $c, d \in \mathbb{R}$. Finden Sie für jede der folgenden Funktionen g_j das Maximum $m_j := \max \{g_j(x) \mid x \in [a, b]\}$ sowie eine Stelle ξ_j in Abhängigkeit von ξ und m .
 $g_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) + d$, $g_2: [a + c, b + c] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x - c)$.

(b) Sei nun $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -x^3 - x^2 + 2x + 4$. Begründen Sie, warum es eine Stelle $\xi \in (0, 1)$ so gibt, dass $f(\xi) = \max \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$.

Hinweis: Sie brauchen ξ nicht zu bestimmen und sollen keine Ableitungen verwenden.

(c) Sei $h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -(x - 1)^3 - x^2 + 4x + 9$.

Bestimmen Sie unter Verwendung von (a) und (b) das Maximum von h .

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $f(x) \leq f(\xi) = m$ für alle $x \in [a, b]$ gilt $g_1(x) = f(x) + d \leq f(\xi) + d = m + d$ für alle $x \in [a, b]$. Daher ist $m_1 = m + d$ das Maximum von g_1 mit einer Maximalstelle $\xi_1 = \xi$ (da $g_1(\xi) = f(\xi) + d = m_1$).

Wegen $f(x) \leq f(\xi) = m$ für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$g_2(x + c) = f(x + c - c) = f(x) \leq f(\xi) = m$$

für alle $x \in [a, b]$, also gilt $g_2(\tilde{x}) = f(\tilde{x} - c) \leq f(\xi) = m$ für alle $\tilde{x} \in [a + c, b + c]$. Daher ist $m_2 = m$ das Maximum von g_2 mit Maximalstelle $\xi_2 = \xi + c$, da $g_2(\xi + c) = f(\xi) = m_2$.

(b) Die Funktion f ist stetig und nimmt daher auf dem Intervall $[0, 1]$ ein Maximum an nach dem Satz von Weierstraß (1.13.12). Da $f(0) = 4$, $f(1) = 4$ und $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 + 4 > 4$ gilt, liegt die Maximalstelle ξ im offenen Intervall $(0, 1)$ mit $f(\xi) > 4$.

- (c) Der Faktor $x - 1$ gibt einen Hinweis auf den Lösungsweg. Als erstes können wir der Faktor $(x - 1)^2$ abspalten: $x^2 - 4x - 9 = (x - 1)^2 - 2x - 10$, wobei wir auch den Linearterm umschreiben: $-2x - 10 = -2(x - 1) - 12$. Zusammen haben wir

$$-(x - 1)^3 - x^2 + 4x + 9 = -(x - 1)^3 - (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 12.$$

Also gilt mit f wie in (b): $h(x) = f(x - 1) + 8$. Unter Verwendung von (a) hat h ein Maximum $f(\xi) + 8$ an der Stelle $\xi + 1$.

Aufgabe H 83. Konvergenz von Potenzreihen

Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die Potenzreihe $f_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(kn\pi) (iz + 2i - 3k)^n$.

- (a) Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt sowie den Konvergenzradius der Potenzreihe.
 (b) Skizzieren Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe für $k = 0$.
 (c) Bestimmen Sie für $k = 0$ alle Punkte $z \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.
 (d) Für welche $k \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Potenzreihe an der Stelle $z = i$?

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Da k und n ganzzahlig sind, nimmt $\cos(kn\pi)$ nur zwei Werte -1 (falls nk gerade) und 1 (falls nk ungerade) an, also $\cos(kn\pi) = (-1)^{nk}$. Die Potenzreihe lässt sich umschreiben zu

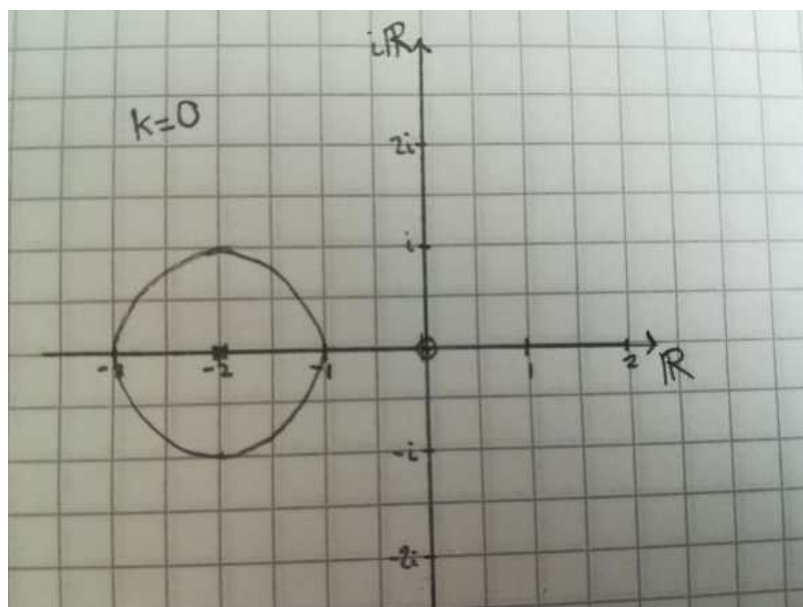
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{nk} i^n}{n^3} (z - (-2 - 3ki))^n,$$

hat also den Entwicklungspunkt $z_0 = -2 - 3ki$ und die Koeffizienten $a_n = \frac{(-1)^{nk} i^n}{n^3}$. Wir berechnen:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k(n+1)} i^{n+1} (n+1)^3}{(-1)^{nk} i^n n^3} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^k i}{(1 + \frac{1}{n})^3} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^3} = 1$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{a} = 1$.

- (b) Für $k = 0$ ist der Entwicklungspunkt $z_0 = -2$.



(c) Für $k = 0$ haben wir die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3} (z+2)^n.$$

Da wir nur die Konvergenz für reellen Zahlen $z \in \mathbb{R}$ untersuchen, müssen wir uns für $z_0 = -2 - 3ki = -2$ und $\rho = 1$ zunächst klar machen, welche Teile der reellen Achse im Konvergenzkreis $U_\rho(z_0)$ liegen. Da für $k = 0$ der Mittelpunkt z_0 von $U_\rho(z_0)$ selbst reell ist, liegt somit nur $(-2 - \rho, -2 + \rho) = (-3, -1)$ innerhalb von $U_\rho(z_0)$. Die Menge $\mathbb{R} \setminus [-3, -1]$ liegt außerhalb von $U_\rho(z_0)$ und die Punkte $z = -3$ und $z = -1$ liegen auf dem Rand des Konvergenzkreises $U_\rho(z_0)$.

Mit Satz 1.14.4 folgt, dass die Potenzreihe für $z \in (-3, -1)$ konvergiert und für $z \in \mathbb{R} \setminus [-3, -1] = (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ divergiert. Wir betrachten die Randpunkte:

- Wir zeigen, dass die Reihe für $z = -1$ konvergiert. Einsetzen von $z = -1$ liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3}.$$

Es gilt zum Beispiel $|a_n| = \left| \frac{i^n}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit bildet die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3}$. Weiter wissen wir aus Beispiel 1.8.2 (und 1.9.3), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist. Somit ist nach dem Majoranten-Kriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3}$ konvergent.

- Wir zeigen, dass die Reihe für $z = -3$ konvergiert. Einsetzen von $z = -3$ liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n^3}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ bildet auch eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n^3}$. Also konvergiert nach dem Majoranten-Kriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n^3}$.

Also konvergiert die Reihe für $z \in [-3, -1]$ und divergiert für $z \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$.

(d) Mit Satz 1.14.4 folgt, dass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho \stackrel{(a)}{=} 1$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > \rho$ divergiert. Also kann die Potenzreihe an der Stelle $z = i$ nur konvergieren, wenn $k \in \mathbb{R}$ existiert so dass $|i - (-2 - 3ki)| \leq 1$. Jedoch gilt $|i + 2 + 3ki| = \sqrt{2^2 + (1 + 3k)^2} > 1$, da $(1 + 3k)^2 > 0$. Deswegen gibt es keine $k \in \mathbb{Z}$, für welcher die Potenzreihe konvergiert.

Aufgabe H 84. Geometrische Reihen

Gegeben sei $f: \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \frac{8}{z^2 - 3z + 2}$.

- Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f(z) = \frac{1}{1-z} \frac{a}{1-bz}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ gilt.
- Schreiben Sie damit $f(z)$ als Produkt von zwei geometrischen Reihen und bestimmen Sie die Konvergenzradien dieser Reihen.
- Geben Sie mit Hilfe von 1.14.11 eine Reihe für f an. Finden Sie dann die Partialsummen S_0, S_1, S_2, S_3 dieser Reihe.

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Es gilt

$$\frac{1}{1-z} \frac{a}{1-bz} = \frac{a}{1-(1+b)z+bz^2} = \frac{2a}{2-2(1+b)z+2bz^2}, \quad (6)$$

also bekommen durch Gleichsetzung von (6) mit $f(x)$ wir $a = 4$ und $b = \frac{1}{2}$.**(b)** Mit der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

für alle $z \in U_{\rho_1}(0)$ mit Konvergenzradius $\rho_1 = 1$.

Ähnlich bekommen wir

$$\frac{4}{1-\frac{z}{2}} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

für alle $z \in U_{\rho_2}(0)$ mit Konvergenzradius $\rho_2 = \frac{1}{a} = 2$, da $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|} = \frac{1}{2}$.**(c)** Wegen (a), (b) und Rechenregel 4 für Potenzreihen in 1.14.11 gilt

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \frac{a}{1-bz} = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) z^n$$

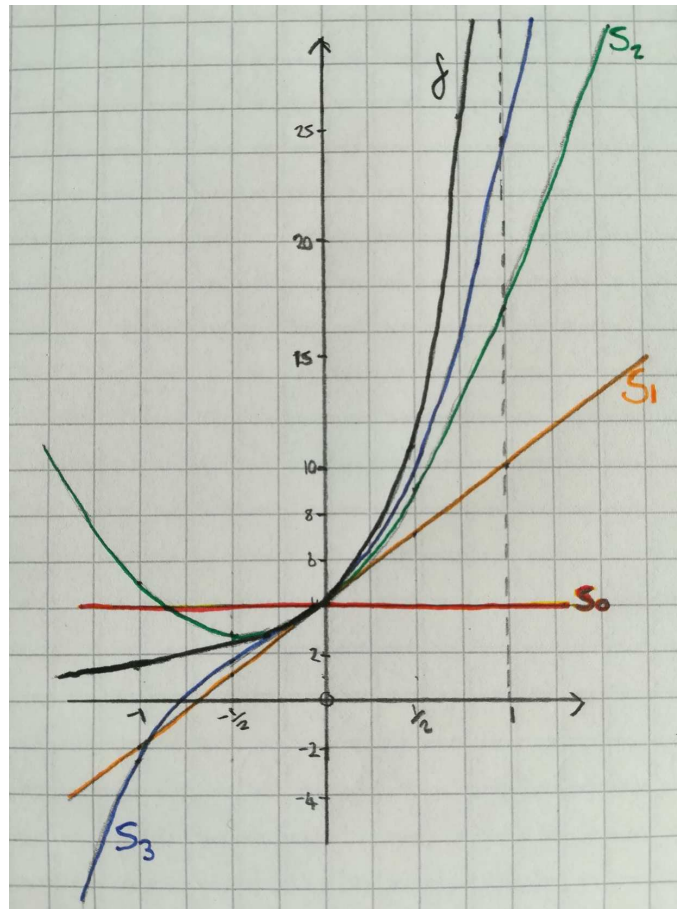
für alle $z \in U_{\rho_1}(0) \cap U_{\rho_2}(0)$, d.h. für alle z mit $|z| < 1$.Die n -te Partialsumme der Reihe ist $S_n = 4 \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-k} \right) z^n$. Also erhalten wir:

$$S_0 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 z^0 = 4$$

$$S_1 = 4 \left(1 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) z^1 \right) = 4 + 6z$$

$$S_2 = S_1 + 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) z^2 = 4 + 6z + 7z^2$$

$$S_3 = S_2 + 4 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1 \right) z^3 = 4 + 6z + 7z^2 + \frac{15}{2} z^3.$$



In der Skizze sehen wir die Summe der Potenzreihe an der Stelle $z = 0$ und die Partialsummen S_0, S_1, S_2 und S_3 . Beachten Sie, wie sich die Partialsummen S_n um die Stelle $z = 0$ der Funktion $f(z)$ annähern.

Frischhaltebox

Aufgabe H 85. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos(2x))^2}{2x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - x + \sin(x)}{x^2 + 2x + 4}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos(2x))^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(2x))^2}{2x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

(b) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - x + \sin(x)}{x^2 + 2x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} = 5,$$

da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 86. Formel von Euler und de Moivre

(a) Schreiben Sie $f(x) = \sin(x)(\cos(x))^4 - \sin(4x) \cos(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form e^{inx} mit $n \in \mathbb{Z}$.

Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und $\cos(bx)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Bestätigen Sie mittels der Formel von Euler und de Moivre, dass $\sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \cos\left(\frac{z-w}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin(z) \cos(w) + \frac{1}{2} \sin(w) \cos(z)$.

(c) Bestimmen Sie damit $\frac{1}{\sin(w)} \left(\sin\left(\frac{k\pi+w}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi+w}{2}\right) \right)$ für $\sin(w) \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Die Antwort kann als $(-1)^k c$ mit $c \in \mathbb{R}$ geschrieben werden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen

$$\cos(nx) = \frac{1}{2} (e^{nix} + e^{-nix}) \quad \text{und} \quad \sin(nx) = \frac{1}{2i} (e^{nix} - e^{-nix})$$

gilt

$$\begin{aligned} & \sin(x) (\cos(x))^4 - \sin(4x) \cos(x) \\ &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^4}{2^4} - \frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2^5 i} (e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})^2 - \frac{1}{4i} (e^{5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\ &= -\frac{i}{32} (e^{ix} - e^{-ix})(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) + \frac{i}{4} (e^{5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\ &= -\frac{i}{32} \left(e^{5ix} + 3e^{3ix} + 2e^{ix} - 2e^{-ix} - 3e^{-3ix} - e^{-5ix} - 8(e^{5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \right) \\ &= \frac{i}{32} \left(7(e^{5ix} - e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) - 2e^{ix} + 2e^{-ix} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} (7) &= \frac{2i^2}{16} \left(7 \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} + 5 \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 2 \frac{e^{ix} - 2e^{-ix}}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{8} \left(7 \sin(5x) + 5 \sin(3x) - 2 \sin(x) \right). \end{aligned}$$

(b) Die linke Seite der Gleichung ist

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \cos\left(\frac{z-w}{2}\right) &= \frac{1}{4i} \left(e^{i\left(\frac{z+w}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{z+w}{2}\right)} \right) \left(e^{i\left(\frac{z-w}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{z-w}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{4i} \underbrace{\left(e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)} \right)}_{= \frac{1}{2} \sin(z+w)} \end{aligned} \quad (8)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sin(z) \cos(w) + \frac{1}{2} \sin(w) \cos(z) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8i} (e^{i(z+w)} + e^{-i(w-z)} - e^{i(w-z)} - e^{-i(w+z)} + e^{i(w+z)} + e^{-i(z-w)} - e^{i(z-w)} + e^{-i(z+w)}) \\ &= \frac{1}{8i} (2e^{i(z+w)} - 2e^{-i(w+z)}) = (8). \end{aligned}$$

(c) Wegen $\sin(k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(w)} \sin\left(\frac{k\pi + w}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi + w}{2}\right) &\stackrel{(b)}{=} \frac{\frac{1}{2} \sin(k\pi) \cos(w) + \frac{1}{2} \sin(w) \cos(k\pi)}{\sin(w)} \\ &= \frac{\sin(w) \cos(k\pi)}{2 \sin(w)} \\ &= \frac{1}{2} \cos(k\pi) = \frac{(-1)^k}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 87. Ableitungen

Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie im Folgenden jeweils die maximale Teilmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ so, dass der gegebene Term eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$ definiert.

Bestimmen Sie die Menge aller Stellen in D_f , an denen die Funktion f differenzierbar ist. Berechnen Sie f' .

(a) $f(x) = \frac{e^{ax}}{x^2 - a}$

(b) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{\cos(x) + \sin(x)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ausdruck $\frac{e^{ax}}{x^2 - a}$ ist nicht definiert für $x^2 = a$. Wir erhalten daher als maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$. Mit der Quotientenregel bestimmen wir

$$f'(x) = \frac{ae^{ax}(x^2 - a) - e^{ax} \cdot 2x}{(x^2 - a)^2} = e^{ax} \frac{ax^2 - 2x - a^2}{(x^2 - a)^2}.$$

(b) Der Ausdruck $\frac{x^2 - x + 1}{\cos(x) + \sin(x)}$ ist nicht definiert für $\cos(x) = -\sin(x)$. Wir erhalten daher als maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{n\pi - \frac{\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Mit der Quotientenregel bestimmen wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 1)(\cos(x) + \sin(x)) - (x^2 - x + 1)(\cos(x) - \sin(x))}{(\cos(x) + \sin(x))^2} \\ &= \frac{(x^2 + x) \sin(x) - (x^2 - 3x + 2) \cos(x)}{1 + \sin(2x)}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 88. Differenzierbarkeit

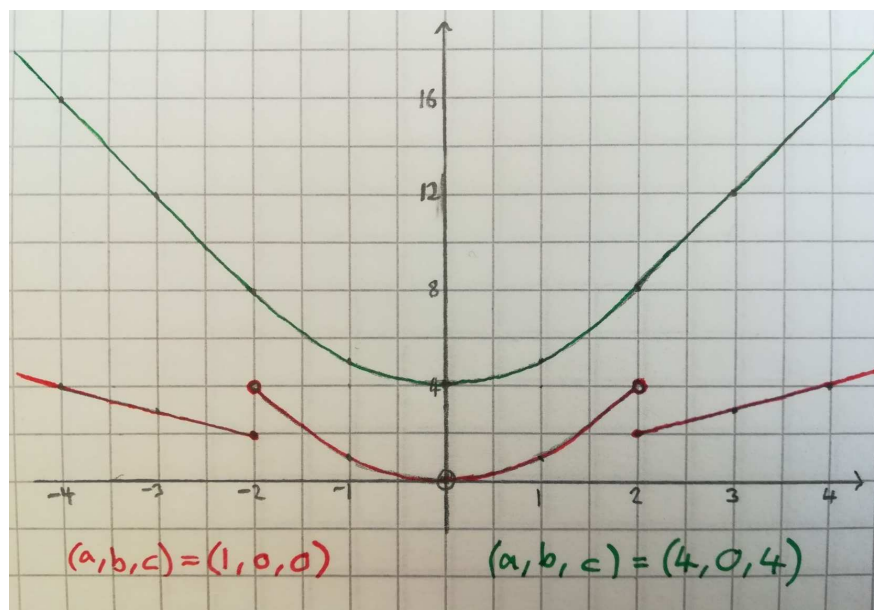
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{für } -2 < x < 2 \\ a|x| & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $(a, b, c) \in \{(1, 0, 0), (4, 0, 4)\}$.
- (b) Unter welchen Bedingungen an a, b, c ist f an der Stelle -2 bzw. 2 stetig?
Hinweis: Finden Sie zwei lineare Gleichungen, die diese Bedingungen beschreiben.
- (c) Unter welchen Bedingungen an a, b, c ist f an der Stelle -2 bzw. 2 differenzierbar?
- (d) Bestimmen Sie unter Verwendung von (b) und (c) die Werte von a, b, c so, dass f an beiden Stellen -2 und 2 stetig und differenzierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Die Skizze:



- (b) Wir untersuchen nun Stetigkeit an der Stelle -2 . Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} a|x| = \lim_{x \rightarrow -2-0} -ax = 2a$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} x^2 + bx + c = 4 - 2b + c.$$

Falls diese Grenzwerte übereinstimmen, dann – und nur dann – ist die Funktion f stetig in -2 (wegen Lemma 1.11.10). Also die Funktion f ist an der Stelle 2 stetig wenn $2a + 2b - c = 4$.

Wir untersuchen nun Stetigkeit an der Stelle 2 . Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} a|x| = \lim_{x \rightarrow 2+0} ax = 2a$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^2 + bx + c = 4 + 2b + c.$$

Diese Grenzwerte einstimmen wenn $2a = 4 + 2b + c$ über. Also ist die Funktion f an der Stelle 2 stetig, wenn $2a - 2b - c = 4$.

(c) Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle -2 . Es gelten

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{a(|x| - 2)}{x + 2} = \frac{-a(x + 2)}{x + 2} = -a$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 + bx + c - 2a}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 + bx + c - (4 - 2b + c)}{x + 2} \quad (*) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 + bx + 2b - 4}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{(x + 2)(x + b - 2)}{x + 2} = b - 4. \end{aligned}$$

Diese Grenzwerte stimmen überein, wenn $b - 4 = -a$. Also ist die Funktion f an der Stelle -2 differenzierbar, wenn $a + b = 4$.

(*) Ist f differenzierbar an -2 , so ist f auch stetig an -2 . Daher können wir die Gleichung $2a + 2b - c = 4$ von (b) verwenden. Alternativ versuchen wir der Grenzwert durch Umstellung zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 + bx + c - 2a}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \left(\frac{(x + 2)(x + b - 2) - 2(b - 2) + c - 2a}{x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \left((x + b - 2) + \frac{4 - 2b + c - 2a}{x + 2} \right). \end{aligned}$$

Der linke Ausdruck strebt gegen $b - 4$. Der rechte Ausdruck strebt gegen $-\infty$ oder $+\infty$ außer, wenn der Zähler 0 ist.

Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit an der Stelle 2. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{a(|x| - 2)}{x - 2} = \frac{a(x - 2)}{x - 2} = a$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + bx + c - 2a}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + bx + c - (4 + 2b + c)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + bx - 2b - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x - 2)(x + b + 2)}{x - 2} = b + 4. \end{aligned}$$

Diese Grenzwerte übereinstimmen wenn $b + 4 = a$. Also ist die Funktion f an der Stelle 2 differenzierbar, wenn $b - a = -4$.

- (d) Für Stetigkeit und Differenzierbarkeit an beiden Stellen -2 und 2 müssen alle Gleichungen von (b) und (c) gelten. Daher haben wir $2a + 2b - c = 4 = 2a - 2b - c$, also $b = 0$ und $2a - 4 = c$. Auch haben wir $b - 4 = -a = -(b + 4)$, also $a = 4$ und $c = 4$.

Aufgabe H 89. Ableitungsregeln

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \exp(x(1 - x^2)) \exp\left((1 - \sin(x))^3 + 3x(\cos(x))^2\right)$

(b) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \frac{x^2}{1 + 2^x + \frac{1}{x(6+x^2)}}$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Durch die Kettenregel erhält man $\frac{d}{dx} e^{A(x)} = \left(\frac{d}{dx} A(x)\right) \cdot e^{A(x)}$. Also müssen wir nur $\frac{dA}{dx}$ berechnen, wobei $A(x) = x(1 - x^2) + (1 - \sin(x))^3 + 3x(\cos(x))^2$. Durch Ketten- und Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A(x) &= 1 - 3x^2 + 3(1 - \sin(x))^2(-\cos(x)) + 3(\cos(x))^2 + \overbrace{6x \cos(x) \sin(x)}^{=\frac{1}{2} \sin(2x)} \\ &= 1 - 3x^2 - 3 \cos(x) \left(1 - 2 \sin(x) + (\sin(x))^2\right) + 3(\cos(x))^2 + 3x \sin(2x) \\ &= 1 - 3x^2 + 3 \cos(x) \left(\cos(x) - 1 - (\sin(x))^2\right) + 3(x + 1) \sin(2x). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 - 3x^2 + 3 \cos(x) \left(\cos(x) - 1 - (\sin(x))^2\right) + 3(x + 1) \sin(2x)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(x(1 - x^2) + (1 - \sin(x))^3 + 3x(\cos(x))^2\right). \end{aligned}$$

- (b) Wir schreiben $g(x) = 1 + 2^x + h(x)$ und $h(x) = \frac{1}{6x + x^3}$. Sodann können wir $f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$ schreiben. Durch die Quotientenregel erhalten wir

$$f'(x) = \frac{2xg(x) - x^2g'(x)}{(g(x))^2} \quad (9)$$

Außerdem haben wir

$$g'(x) = \ln(2)2^x + h'(x) \quad (10)$$

und

$$h'(x) = \frac{-(6 + 3x^2)}{(6x + x^3)^2} = \frac{-3(2 + x^2)}{x^2(6 + x^2)^2}. \quad (11)$$

Wegen (9), (10) und (11) ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(1 + 2^x + h(x)) - x^2 \left(\ln(2)2^x + h'(x) \right)}{(1 + 2^x + h(x))^2} \\ &= \frac{2x \left(1 + 2^x + \frac{1}{x(6+x^2)} \right) - x^2 \left(\ln(2)2^x - \frac{3(2+x^2)}{x^2(6+x^2)^2} \right)}{\left(1 + 2^x + \frac{1}{x(6+x^2)} \right)^2} \\ &= \frac{18x^2 + 2x^3(6+x^2)(1+2^x) + \left(5 - \ln(2)2^x(6+x^2)^2 \right) x^4}{\left(1 + x(1+2^x)(6+x^2) \right)^2}. \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 90. Konvergenzkriterien für Reihen

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n!}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k}$ (d) $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e^{-m}}{m-1}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit bildet die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}$ eine Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Da die harmonische Reihe divergiert, muss die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ divergieren.

(b) Wir schreiben $a_n = \frac{3^{2n}}{n!}$ und betrachten

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{3^{2n+2}n!}{3^{2n}(n+1)!} \right| = \frac{9}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n!}$ nach dem Quotientenkriterium.

(c) Es gilt $\frac{2^{k-1}}{k} \geq \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit bildet die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine Minorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k}$. Da die harmonische Reihe divergiert, muss die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k}$ divergieren.

(d) Wir schreiben $a_m = \frac{e^{-m}}{m-1}$ und betrachten

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{e^{-(m+1)}(m-1)}{me^{-m}} \right| = \frac{1 - \frac{1}{m}}{e} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e^{-m}}{m-1}$ nach dem Quotientenkriterium.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 91. Höhere Ableitungen

Bestimmen Sie abhängig von $n \in \mathbb{N}$ die n -te Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{3x+1}{1+x-6x^2}$

(b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (\cosh(x))^2 - \cosh(2x)$

Hinweis: Berechnen Sie jeweils einige Ableitungen, stellen Sie eine Vermutung über die allgemeine Form der Ableitung auf und verifizieren Sie Ihre Vermutung durch Induktion.

Es kann helfen, zuerst Terme zu vereinfachen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bemerken, dass $1+x-6x^2 = (1+3x)(1-2x)$ gilt. Daher ist $f(x) = \frac{1}{1-2x}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{(1-2x)^2} = \frac{1!2^1}{(1-2x)^3} \\ f''(x) &= 2 \frac{(0-2(-2)(1-2x))}{(1-2x)^4} = \frac{2!2^2}{(1-2x)^3} \\ f^{(3)}(x) &= 8 \frac{(-2)(-3)}{(1-2x)^4} = \frac{3!2^3}{(1-2x)^4}. \end{aligned}$$

Wir stellen daher die Vermutung an, dass

$$f^{(n)} = \frac{n!2^n}{(1-2x)^{n+1}}.$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion:

IA Für $n=1$ gilt $f'(x) = \frac{1!2^1}{(1-2x)^{1+1}}$, d.h. unsere Formel ergibt die richtige Aussage. Also stimmt der Induktionsanfang.

IH Wir nehmen an, dass $f^{(k)} = \frac{k!2^k}{(1-2x)^{k+1}}$ gilt.

IS $n \rightarrow n+1$: Es gilt

$$f^{(n+1)}(x) \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{d}{dx} \frac{n!2^n}{(1-2x)^{n+1}} = n!2^n \frac{-(n+1)(-2)(1-2x)^n}{(1-2x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!2^{n+1}}{(1-2x)^{n+2}},$$

was mit der Vermutung übereinstimmt.

(b) Wir berechnen mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cosh(x) \sinh(x) - 2 \sinh(2x) = \sinh(2x) - 2 \sinh(2x) = -\sinh(2x) \\ f''(x) &= -2 \cosh(2x) \\ f^{(3)}(x) &= -2^2 \sinh(2x) = 4f'(x) \\ f^{(4)}(x) &= -2^3 \cosh(2x) = 4f''(x). \end{aligned}$$

Wir stellen eine Vermutung an, dass

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -2^{n-1} \sinh(2x), & n = 2k - 1 \\ -2^{n-1} \cosh(2x), & n = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion:

(IA) Für $n = 1$ gilt $f'(x) = f^{(1)}(x) = -2^0 \sinh(2x)$, d.h. unsere Formel ergibt die richtige Aussage. Also stimmt der Induktionsanfang.

(IH) Wir nehmen an, dass

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} -2^{m-1} \sinh(2x), & m = 2k - 1 \\ -2^{m-1} \cosh(2x), & m = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

gilt.

(IS) $n \rightarrow n + 1$: Falls $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(n+1)}(x) \stackrel{\text{(IH)}}{=} \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left(-2^{n-1} \sinh(2x) \right) = -2^n \cosh(2x).$$

Falls $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, berechnen wir

$$f^{(n+1)}(x) \stackrel{\text{(IH)}}{=} \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left(-2^{n-1} \cosh(2x) \right) = -2^n \sinh(2x).$$

In jedem Fall stimmt das Ergebnis mit der Vermutung überein. Also ist die Vermutung durch Induktion bewiesen.

Alternative Formulierungen:

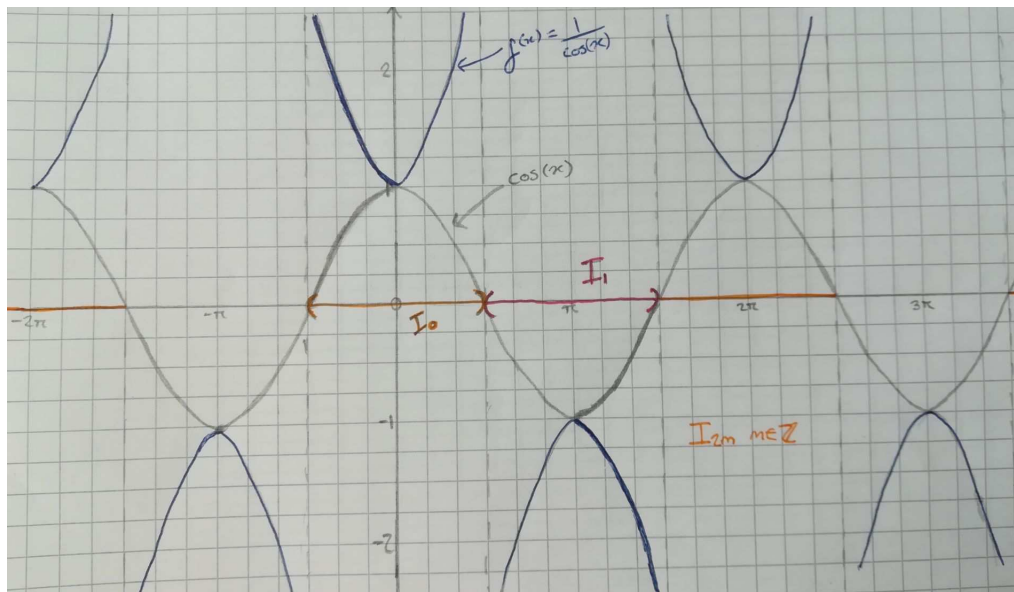
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^n \left(\cosh(x) \sinh(x) - \sinh(2x) \right), & n = 2k - 1 \\ 2^{n-1} \left((\cosh(x))^2 + (\sinh(x))^2 - 2 \cosh(2x) \right), & n = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -2^n \cosh(x) \sinh(x), & n = 2k - 1 \\ -2^{n-1} \left((\cosh(x))^2 + (\sinh(x))^2 \right), & n = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe H 92. Umkehrfunktion

Gegeben sei die Funktion $f: D \rightarrow W: x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

- Bestimmen Sie die größte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, für die der angegebene Funktionsterm definiert ist.
- Es sei $k \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x_0)$ für $x_0 \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$.
- Finden Sie für die folgenden k jeweils das größte Intervall $I_k \subseteq \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$, für das die Einschränkung f_k von f auf I_k streng monoton fallend ist. Betrachten Sie (i) $k = 0$, (ii) $k = 1$, (iii) $k = 2m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ (also k gerade).
- Nach Satz 2.3.1 ist die Funktion $g: [-1, 0] \rightarrow f([-1, 0]): x \mapsto f(x)$ invertierbar. Berechnen Sie die Ableitung von g^{-1} .



Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Funktionsterm ist *nicht* definiert wenn $\cos(x) = 0$ d.h. wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ die größte Teilmenge von \mathbb{R} , für die der Funktionsterm definiert ist.

(b) Es gilt

$$f'(x_0) = \frac{-(-\sin(x_0))}{(\cos(x_0))^2} = \frac{\tan(x_0)}{\cos(x_0)}.$$

(c) Wir bemerken, dass eine beliebige Funktion $g: I \rightarrow W$ auf einem Intervall I , für welche $0 \notin W$ gilt, genau dann streng monoton fallend ist, wenn die Funktion $\frac{1}{g}$ streng monoton steigend ist.

(i) Wir betrachten das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Die Funktion $\cos(x)$ ist streng monoton steigend auf $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ und monoton fallend auf $[0, \frac{\pi}{2})$. Also ist $I_0 = (-\frac{\pi}{2}, 0]$ das größte Teilintervall, für das die Einschränkung $f_0: I_0 \rightarrow W: \frac{1}{\cos(x)}$ streng monoton fallend ist.

(ii) Wir betrachten das Intervall $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Die Funktion $\cos(x)$ ist streng monoton steigend auf $[\pi, \frac{3\pi}{2})$ und fallend auf $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Also ist $I_1 = [\pi, \frac{3\pi}{2})$ das größte Teilintervall, für das die Einschränkung $f_1: I_1 \rightarrow W: \frac{1}{\cos(x)}$ streng monoton fallend ist.

(iii) Wir betrachten das Intervall $((4m-1)\frac{\pi}{2}, (4m+1)\frac{\pi}{2}) = (2m\pi - \frac{\pi}{2}, 2m\pi + \frac{\pi}{2})$. Die Funktion $\cos(x)$ ist streng monoton steigend auf $(2m\pi - \frac{\pi}{2}, 2m\pi]$ und fallend auf $[2m\pi, 2m\pi + \frac{\pi}{2})$. Also ist $I_{2m} = (2m\pi - \frac{\pi}{2}, 2m\pi]$ das größt mögliche Teilintervall, für das die Einschränkung $f_{2m}: I_{2m} \rightarrow W: \frac{1}{\cos(x)}$ streng monoton fallend ist.

(d) Nach Satz 2.3.1 ist g^{-1} differenzierbar in $g(x_0) = \frac{1}{\cos(x_0)}$ für $x_0 \in (-1, 0)$, da g in x_0

differenzierbar mit $g'(x_0) = \frac{\tan(x_0)}{\cos(x_0)} \neq 0$ ist. Es gilt für $y_0 = g(x_0) = \frac{1}{\cos(x_0)}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \Big|_{y=g(x_0)} &\stackrel{2.3.1}{=} \frac{1}{g'(x_0)} \stackrel{(b)}{=} \frac{\cos(x_0)}{\tan(x_0)} = \frac{(\cos(x_0))^2}{\sin(x_0)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{(\cos(x_0))^2}{-\sqrt{1 - (\cos(x_0))^2}} = \frac{\left(\frac{1}{y_0}\right)^2}{-\sqrt{1 - \left(\frac{1}{y_0}\right)^2}} = -\frac{1}{y_0 \sqrt{y_0^2 - 1}}. \end{aligned}$$

(*) Hier haben wir die Gleichung $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ benutzt. Das Minuszeichen ist nötig, da wegen $x_0 \in (-1, 0)$ stets $\sin(x_0) \leq 0$ gilt.

Aufgabe H 93. Die Regel von l'Hospital

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow \ln(3)} \frac{e^x - \frac{3x}{\ln(3)}}{\sin(x + \pi - \ln(3))}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(x) - x + \pi}{(\ln(\frac{x}{\pi}))^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x - 1 + 3^x}{5^x - 2^x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(x) - x}{(x^3 - 2x)^{-1}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\sin(\ln 3 + \pi - \ln 3) = \sin(\pi) = 0$ und aus $e^{\ln(3)} = 3$ folgt $e^{\ln 3} - \frac{3 \ln 3}{\ln 3} = 0$.

Somit ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \ln(3)} \frac{e^x - \frac{3x}{\ln(3)}}{\sin(x + \pi - \ln(3))}$ von der Form „ $\frac{0}{0}$ “ (genauer: es liegt Situation N_c mit $c = \ln 3$ aus 2.5.1 vor). Für die Berechnung der Ableitungen werden wir die bekannten Ableitungen aus 2.2.5 sowie die Kettenregel 2.2.3 benutzen. Wir erhalten damit

$$\lim_{x \rightarrow \ln(3)} \frac{\frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{3x}{\ln(3)} \right)}{\frac{d}{dx} \left(\sin(x + \pi - \ln(3)) \right)} = \lim_{x \rightarrow \ln(3)} \frac{e^x - \frac{3}{\ln(3)}}{\cos(x + \pi - \ln(3))} = \frac{3 - \frac{3}{\ln(3)}}{\cos(\pi)} = 3 \left(\frac{1}{\ln 3} - 1 \right).$$

Also liefert der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \ln(3)} \frac{e^x - \frac{3x}{\ln(3)}}{\sin(x + \pi - \ln(3))} = 3 \left(\frac{1}{\ln 3} - 1 \right).$$

(b) Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x - 1 + 3^x}{5^x - 2^x}$ ist von der Form „ $\frac{0}{0}$ “ (genauer: es liegt Situation N_c mit $c = 0$ aus 2.5.1 vor). Mit der Regel von l'Hospital bekommt man

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x - 1 + 3^x}{5^x - 2^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} (4x^2 - 2x - 1 + 3^x)}{\frac{d}{dx} (5^x - 2^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x - 2 + 3^x \ln 3}{5^x \ln 5 - 2^x \ln 2} = \frac{\ln 3 - 2}{\ln 5 - \ln 2}.$$

(c) Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(x) - x + \pi}{(\ln(\frac{x}{\pi}))^2}$ ist von der Form „ $\frac{0}{0}$ “ (genauer: es liegt Situation N_c mit $c = \pi$ aus 2.5.1 vor), da $\tan(\pi) = 0$ und $\ln(1) = 0$ gelten. Für die Berechnung

der Ableitungen werden wir die bekannten Ableitungen aus 2.2.5 sowie die Kettenregel 2.2.3 benutzen. Die Regel von l'Hospital liefert:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(x) - x + \pi}{\left(\ln\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{d}{dx}(\tan(x) - x + \pi)}{\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{(\cos(x))^2} - 1}{2 \ln\left(\frac{x}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{x} \cdot \frac{1}{\pi}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x(1 - (\cos(x))^2)}{2(\cos(x))^2 \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)}.$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x(1 - (\cos(x))^2)}{2(\cos(x))^2 \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x(\sin(x))^2}{2(\cos(x))^2 \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)}$ ist auch von der Form „ $\frac{0}{0}$ “. Wir wenden das Verfahren noch einmal an und benutzen die Produktregel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{d}{dx}\left(x(\sin(x))^2\right)}{\frac{d}{dx}\left(2(\cos(x))^2 \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sin(x))^2 + 2x \sin(x) \cos(x)}{2(\cos(x))^2 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cos(x)(-\sin(x)) \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin(x) \left(\sin(x) + 2x \cos(x)\right)}{2(\cos(x))^2 - 4x \cos(x) \sin(x) \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)} = 0. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, weil der Nenner $2(\cos \pi)^2 - 4\pi \cos(\pi) \sin(\pi) \ln(1) = 2(-1)^2 - 4\pi \cdot -1 \cdot 0 \cdot 0 = 2 \neq 0$ und der Zähler $\pi \sin(\pi) (\sin(\pi) + 2\pi \cos(\pi)) = 0(0 - 2\pi) = 0$ sind.

Daher liefert die Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(x) - x + \pi}{\left(\ln\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)^2} = 0.$$

- (d) Es gelten $\ln(0) - 0 = -\infty$ und $(0^3 - 0)^{-1} = -\infty$. Somit ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(x) - x}{(x^3 - 2x)^{-1}}$ von der Form „ $\frac{-\infty}{-\infty}$ “ (genauer: es liegt Situation U_a mit $a = 0$ aus 2.5.1 vor). Mit der Regel von l'Hospital bekommt man

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(x) - x}{(x^3 - 2x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{d}{dx}(\ln(x) - x)}{\frac{d}{dx}(x^3 - 2x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x} - 1}{-(x^3 - 2x)^{-2}(3x^2 - 2)} \quad (12)$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x} - 1}{-(x^3 - 2x)^{-2}(3x^2 - 2)}$ ist von der Form „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, aber hier ist weiteres Anwenden von der Regel von l'Hospital nicht sinnvoll. Nach Umformung erhalten wir

$$(12) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(x^3 - 2x)^2(x - 1)}{x(3x^2 - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x(x^2 - 2)^2(x - 1)}{(3x^2 - 2)} = \frac{0 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)}{-2} = 0.$$

Also gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(x) - x}{(x^3 - 2x)^{-1}} = 0.$$

Aufgabe H 94. Die Regel von l'Hospital

Durch $p_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k x^k}{k!}$ ist ein Polynom $p_m(x)$ vom Grad $m - 1$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die n -te Ableitung von x^m für $n \leq m$.
- (b) Finden Sie durch Induktion die n -te Ableitung des Polynoms $p_m(x)$.
- (c) Zeigen Sie damit für $n < m$, dass $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{mx} - p_m(x))|_{x=0} = 0$ gilt.
- (d) Zeigen Sie mit (a), (b), (c) und der Regel von l'Hospital, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - p_m(x)}{x^m} = \frac{m^m}{m!}$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir berechnen

$$\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \quad \frac{d^2}{dx^2}(x^m) = m(m-1)x^{m-2} \quad \frac{d^3}{dx^3}(x^m) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Also stellen wir daher die Vermutung an, dass für $n \leq m$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^m) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion:

- IA** Für $n = 1$ gilt $f'(x) = m(m-1)x^{m-2} = \frac{m!}{(m-2)!} x^{m-2}$, d.h. unsere Formel ergibt die richtige Aussage. Also stimmt der Induktionsanfang.
- IH** Wir nehmen an, dass $f^{(k)} = \frac{m!}{(m-k)!} x^{k-n}$ gilt für $n < m$.
- IS** $n \rightarrow n+1$: Es gilt

$$f^{(n+1)}(x) \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{d}{dx} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{m!(m-n)}{(m-n)!} x^{m-n-1} = \frac{m!}{(m-(n+1))!} x^{m-(n+1)},$$

was mit der Vermutung übereinstimmt.

Wir bemerken, dass falls $n = m$ dann $\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^m) = m!$ ist.

- (b) Es gilt

$$\frac{d}{dx} p_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m^k x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{m^{k+1} x^k}{k!}.$$

Wir nehmen an, dass

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n p_m(x) = m^n \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{m^k x^k}{k!} \quad n < m.$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion:

- IA** Wir haben die Aussage für $n = 1$ schon gezeigt also stimmt der Induktionsanfang.
- IH** Wir nehmen an, dass $\left(\frac{d}{dx}\right)^l p_m(x) = m^l \sum_{k=0}^{m-l-1} \frac{m^k x^k}{k!}$ gilt für $l < m$.

Ⓢ $n \rightarrow n + 1$: Für $1 < n < m - 1$ haben wir

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \stackrel{\text{Ⓢ}}{=} \frac{d}{dx} \left(m^n \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{m^k x^k}{k!} \right) = m^n \sum_{k=1}^{m-n-1} \frac{m^k x^{k-1}}{(k-1)!} = m^{n+1} \sum_{k=0}^{m-(n+1)-1} \frac{m^k x^k}{k!}.$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$: $n < m$ bewiesen.

Für $n = m - 1$ haben wir

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} p_m(x) = m^{m-1} \sum_{k=0}^{m-m} \frac{m^k x^k}{k!} = m^{m-1} \frac{m^0 x^0}{0!} = m^{m-1}.$$

Damit ist die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$: $n \leq m$ bewiesen.

Also haben wir

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n p_m(x) = \begin{cases} m^n \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{m^k x^k}{k!} & n < m \\ 0 & n \geq m. \end{cases}$$

(c) Es gilt $\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{mx} = m^n e^{mx}$. Also mit (b) haben wir für $n < m$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{mx} - p_m(x)) = m^n \left(e^{mx} - \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{m^k x^k}{k!} \right) = m^n \left(e^{mx} - \left(1 + \sum_{k=1}^{m-n-1} \frac{m^k x^k}{k!} \right) \right).$$

Wenn $x = 0$ ist, ist die Summe gleich 0 und $e^{mx} = 1$.

Daher gilt $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{mx} - p_m(x)) \Big|_{x=0} = 0$.

(d) Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - p_m(x)}{x^m}$ ist von der Form „ $\frac{0}{0}$ “, da $p_m(0) = 1$ ist.

Nach (c) wissen wir, dass $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{mx} - p_m(x)) \Big|_{x=0} = 0$ für alle $n < m$. Wir bemerken auch, dass

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^m) \Big|_{x=0} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \Big|_{x=0} = 0$$

für $n < m$. Also können wir die Regel von l'Hospital m -mal verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - p_m(x)}{x^m} &= \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^m (e^{mx} - p_m(x))}{\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^m} \\ &\stackrel{(a)-(c)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^m e^{mx} - 0}{m!} = \frac{m^m}{m!}. \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. Induktion und Konvergenz

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:

$$\text{Es ist } \sum_{k=1}^1 \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{2+1}.$$

IH Wir nehmen an, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n : Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} \left(\frac{1+n(2n+3)}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2n+3} \left(\frac{2n^2+3n+1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2n+3} \left(\frac{(2n+1)(n+1)}{2n+1} \right) = \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Wegen Teil (a) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2+\frac{1}{n}} = 2.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 96. Taylorpolynome

Bestimmen Sie $T_3(f, x, x_0)$ für

(a) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(\sin(x)), x_0 = \frac{\pi}{6}$;

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \arctan(2x), x_0 = 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\sin(x)), & f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \\ f'(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}, & f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} \\ f''(x) &= \frac{-(\sin(x))^2 - (\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = -\frac{1}{(\sin(x))^2}, & f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -4 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2 \cos(x)}{(\sin(x))^3}, & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom dritter Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} T_3\left(f, x, \frac{\pi}{6}\right) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \\ &= -\ln 2 + \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan(2x), & f(0) &= \arctan(0) = 0 \\ f'(x) &= \frac{2}{1+4x^2}, & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= \frac{-16x}{(1+4x^2)^2}, & f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{-16(1+4x^2)^2 - (-16x) \cdot 2(1+4x^2) \cdot 8x}{(1+4x^2)^4} = \frac{16}{(1+4x^2)^3}(12x^2 - 1), \\ & f^{(3)}(0) &= -16. \end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom dritter Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} T_3(f, x, 0) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x - 0)^3 \\ &= 2x - \frac{8}{3}x^3. \end{aligned}$$

Aufgabe H 97. Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2 \cos(x)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, \frac{\pi}{2})$.

(b) Bestimmen Sie eine Fehlerschranke $C > 0$ so, dass

$$\left| f(x) - T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq C \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0, 3]$ gilt.

(c) Bestimmen Sie ein $a \in (0, 1)$ so, dass

$$\left| f(x) - T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 0.027$$

für alle $x \in [\frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} + a]$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen der Kettenregel folgen

$$f(x) = x^2 \cos(x), \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = 2x \cos(x) - x^2 \sin(x), \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$f''(x) = 2 \cos(x) - 2x \sin(x) - 2x \sin(x) - x^2 \cos(x) = (2 - x^2) \cos(x) - 4x \sin(x),$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

$$f^{(3)}(x) = -2x \cos(x) - (2 - x^2) \sin(x) - 4 \sin(x) - 4x \cos(x) = (x^2 - 6) \sin(x) - 6x \cos(x),$$

$$f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 6.$$

Somit ist das Taylorpolynom dritter Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{\pi^2}{4} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

(b) Nach dem Satz von Taylor 2.6.1 ist $f(x) = T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) + R_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right)$, wobei

$$R_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta_{x, \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

für ein $\vartheta_{x, \frac{\pi}{2}}$ mit $0 < \vartheta_{x, \frac{\pi}{2}} < 1$. Wir schreiben $\xi := \frac{\pi}{2} + \vartheta_{x, \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Da $0 \leq x \leq 3$

ist, gilt $0 < \xi < 3$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| f(x) - T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) \right| &= \left| R_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{6} |f^{(3)}(\xi)| \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3 \\ &= \frac{1}{6} |(\xi^2 - 6) \sin(\xi) - 6\xi \cos(\xi)| \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3 \\ &\leq \frac{1}{6} \left(\underbrace{|\xi^2|}_{\leq 9} \underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1} + 6 \underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1} + 6 \underbrace{|\xi|}_{\leq 3} \underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leq 1} \right) \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3 \\ &\leq \frac{1}{6} (9 + 6 + 18) \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3 \\ &= \frac{33}{6} \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3 = \frac{11}{2} \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3 \end{aligned}$$

Also erfüllt $C = \frac{11}{2}$ (oder irgendein größerer Wert von C) unsere Forderung.

(c) Für $0 < a < 1$ ist $\left[\frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} + a\right] \subsetneq (0, 3)$, so dass die Abschätzung aus (b) benutzt werden kann.

Für $x \in \left[\frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} + a\right]$ ist $x - \frac{\pi}{2} \in [-a, a]$, d. h. $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq a$. Es folgt:

$$\left| f(x) - T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right) \right| \stackrel{(b)}{\leq} C \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^3 \leq Ca^3.$$

Aus der Bedingung $Ca^3 \leq 0.027$ folgt $a^3 \leq \frac{1}{C} \frac{27}{1000}$, also

$$a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{C}} \frac{3}{10} = \frac{3}{10} \sqrt[3]{\frac{2}{11}}.$$

Somit ist die Abschätzung für jedes positive $a \leq \frac{3}{10} \sqrt[3]{\frac{2}{11}}$ gültig.

Aufgabe H 98. Extrema und Wendepunkte

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (x+1)e^{(x-1)^2}$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und Wendepunkte von $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^x \cos(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)(x-1)e^{(x-1)^2} + e^{(x-1)^2} = (2x^2 - 1)e^{(x-1)^2} \\ f''(x) &= 2(2x^2 - 1)(x-1)e^{(x-1)^2} + 4xe^{(x-1)^2} = (4x^3 - 4x^2 + 2x + 2)e^{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Damit in $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum vorliegen kann, muss $f'(x) = 0$, also $2x^2 - 1 = 0$ und damit $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein.

Es ist $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{4}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} + 2\right)e^{\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{3}{2}-\sqrt{2}} > 0$ und $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} - 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} + 2\right)e^{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2}} = -2\sqrt{2}e^{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} < 0$. Also ist $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein lokales Minimum und $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein lokales Maximum.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(x) - \sin(x))e^x \\ f''(x) &= (\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) - \cos(x))e^x = -2\sin(x)e^x. \end{aligned}$$

Damit in $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum vorliegen kann, muss $f'(x) = 0$, also $\cos(x) - \sin(x) = 0$ und damit $\cos(x) = \sin(x)$ gelten. Dies ist genau dann erfüllt, wenn x die Form $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat (eine einfache Skizze kann dies bestätigen). Es ist $f''(x) = -2\sin(x)e^x$. Wir haben

$$\begin{aligned} f''\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) &= -2\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \\ &= \begin{cases} -2\sin\left(2n\pi + \frac{5\pi}{4}\right)e^{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}} & k = 2n + 1 \\ -2\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)e^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} & k = 2n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &= \begin{cases} -2\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)e^{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}} & k = 2n + 1 \\ -2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} & k = 2n \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)e^{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}} & k = 2n + 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}}e^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} & k = 2n \end{cases} \\ &= (-1)^{k+1}\sqrt{2}e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Also ist $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ein lokales Minimum, wenn k ungerade ist (wegen $f''\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} > 0$) und ein lokales Maximum, wenn k gerade ist (wegen $f''\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} < 0$).

Damit in x ein Wendepunkt vorliegen kann, muss $f''(x) = 0$, also $\sin(x) = 0$ sein. Dies ist genau dann erfüllt, wenn x die Form $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat.

Es ist $f^{(3)}(x) = -2e^x(\cos(x) + \sin(x))$ und damit $f^{(3)}(k\pi) = -2e^{k\pi}(-1)^k \neq 0$. Also sind die Wendepunkte

$$(k\pi, (-1)^k e^{k\pi})$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe H 99. Kurvendiskussion

Wir betrachten die ungerade Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 9}$.

- Untersuchen Sie das Verhalten an den Stellen $-\infty, -3, 3$ und $+\infty$.
- Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.
- Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f (wenn es solche gibt).
- Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [-5, 5]$.

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Wir haben

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2x}{x^2 - 9} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2x}{x^2 - 9} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2x}{x^2 - 9} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{2x}{x^2 - 9} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 9} &= 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 9} &= 0 \end{aligned}$$

Der Nenner ist positiv falls $|x| > 3$. In diesem Fall haben x und $f(x)$ das gleiche Vorzeichen. Daher haben die Grenzwerte für $x \rightarrow -3 - 0$ und $x \rightarrow 3 + 0$ ein Minus- bzw. Pluszeichen. Falls $|x| < 3$, denn der Nenner negativ ist und das Vorzeichen von $f(x)$ und des Grenzwertes ist das entgegengesetzte von x . Daher haben die Grenzwerte für $x \rightarrow -3 + 0$ und $x \rightarrow 3 - 0$ ein Plus- bzw. Minuszeichen. Wenn x gegen $\pm\infty$ strebt, ist der Nenner positiv, d.h. $f(x)$ strebt für $x \rightarrow -\infty$ von unten gegen 0 und für $x \rightarrow +\infty$ von oben gegen 0.

(b) Es ist

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 9) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-2(x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^2}$$

und

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2 - 9)^2 + 2(x^2 + 9) \cdot 2(x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{4x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}.$$

(c) Um die lokalen Extrema von f zu bestimmen, bestimmen wir die Nullstellen von $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9.$$

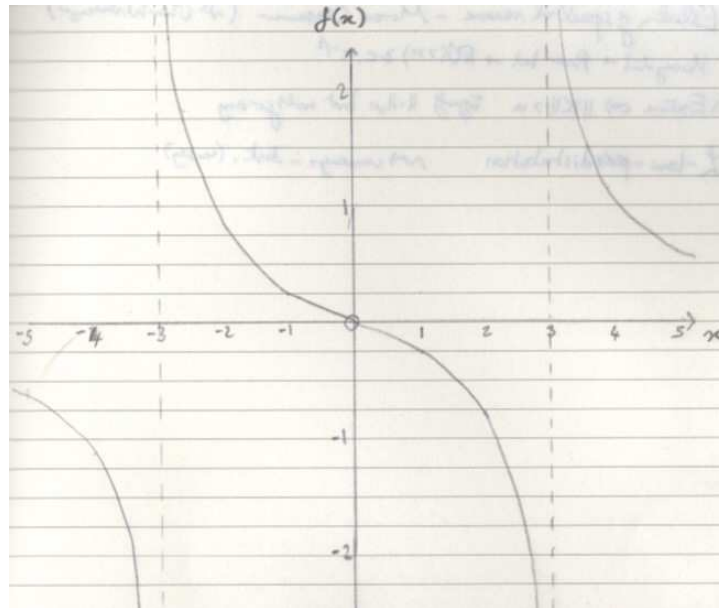
Es gibt keine reelle Zahl x mit $x^2 = -9$. Also gibt es keine lokalen Extrema.Um die Wendepunkte von f zu bestimmen, bestimmen wir die Nullstellen von $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 + 27)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = -27.$$

Es gibt nur die reelle Nullstelle $x = 0$. Es ist

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \frac{(12x^2 + 4 \cdot 27)(x^2 - 9)^3 - 4x(x^2 + 27) \cdot 3(x^2 - 9)^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^6} \\ &= \frac{12(x^4 - 9x^2 + 9x^2 - 81) - 12(2x^4 + 2 \cdot 27x^2)}{(x^2 - 9)^4} \\ &= \frac{-12(x^4 + 54x^2 + 81)}{(x^2 - 9)^4}. \end{aligned}$$

und damit $f^{(3)}(0) = \frac{-12 \cdot 81}{(-9)^4} = \frac{-4}{27} \neq 0$. Also ist der einzige Wendepunkt $(0, 0)$.**(d)** Für die Skizze verwenden wir die Ergebnisse von Teilen (a)-(c) und bemerken dabei, dass f eine ungerade Funktion ($f(-x) = -f(x)$) mit genau einer Nullstelle, nämlich $x = 0$, ist.



Frischhaltebox

Aufgabe H 100. Häufungspunkte

Bestimmen Sie für jede der folgenden Folgen möglichst viele Häufungspunkte, indem Sie entsprechende konvergente oder bestimmt divergente Teilfolgen angeben.

(a) $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $a_m := \ln((-1)^m + 2) + \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(b) $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $b_k := (3k)^{((-1)^k)} + \cos((-1)^k k\pi)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen zuerst mit der Formel für die (Partialsommen der) geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right) \rightarrow 2 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Außerdem bekommen wir

$$\ln((-1)^m + 2) = \begin{cases} \ln(1) = 0 & m \text{ ungerade} \\ \ln(3) & m \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit bekommen wir die Häufungspunkte 2 und $\ln(3) + 2$. Eine gegen 2 konvergente Teilfolge ist gegeben durch $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, denn $\ln((-1)^{(2n+1)} + 2) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 + \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

Den anderen Grenzwert bekommt man genauso, indem man die konvergente Teilfolge $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ betrachtet.

(b) Die Folge häuft sich in -1 und in $+\infty$. Es gelten

$$\cos((-1)^k k\pi) = \begin{cases} \cos(-k\pi) = \cos(k\pi) = -1 & k \text{ ungerade} \\ \cos(k\pi) = 1 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

und

$$(3k)^{((-1)^k)} = \begin{cases} \frac{1}{3k} & k \text{ ungerade} \\ 3k & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Eine gegen -1 konvergente Teilfolge ist gegeben durch $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, denn $\cos((-1)^{2n+1}(2n+1)\pi) = \cos(\pi) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3(2n+1)} - 1 = -1.$$

Eine bestimmte divergente Teilfolge ist gegeben durch $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, denn $\cos((-1)^{2n}(2n)\pi) = \cos(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 2n + 1 = +\infty.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 101. Partielle Integration

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $0 < b \neq e^c$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int x^2(2 \cos(x) \sin(x) - \cos(2x)) & \text{(c)} \int x^3 \sin(ax) \, dx \\ \text{(b)} \int \operatorname{arsinh}(-x) \, dx & \text{(d)} \int x^2 b^x e^{-cx} \, dx \end{array}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Unter Verwendung der Identität $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ und mit Hilfe partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int x^2(2 \cos(x) \sin(x) - \cos(2x)) \, dx \\ &= \int x^2(\sin(2x) - \cos(2x)) \, dx \\ &= \left[x^2 \left(-\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \right] - \int 2x \left(-\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} (\cos(2x) + \sin(2x)) \right] + \int x(\cos(2x) + \sin(2x)) \, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} (\cos(2x) + \sin(2x)) \right] + \left[x \left(\frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \right) \right] - \int \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} (\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{x}{2} (\sin(2x) - \cos(2x)) \right] - \left[\frac{-\cos(2x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{4} \right] \\ &= \frac{1}{4} [(1 - 2x - 2x^2) \cos(2x) + (1 + 2x - 2x^2) \sin(2x)]. \end{aligned}$$

(b) Wir benutzen das Integrationstrick von Aufgabe P 82:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arsinh}(-x) \, dx &= [x \operatorname{arsinh}(-x)] - \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + (-x)^2}} \, dx \\ &= \left[x \operatorname{arsinh}(-x) + \sqrt{1 + x^2} \right]. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Kettenregel und die Stammfunktionentabelle 3.1.7 benutzt, um $\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh}(-x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ zu berechnen. Für den letzten Schritt berechnen wir das Integral z.B. durch Substitution mit $t = 1 + x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{2} [2\sqrt{t}] = [\sqrt{1+x^2}].$$

(c) Hier benutzen wir partielle Integration dreimal:

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(ax) \, dx &= \left[x^3 \cdot \frac{-\cos(ax)}{a} \right] + \int \frac{3x^2 \cos(ax)}{a} \, dx \\ \int x^2 \cos(ax) \, dx &= \left[x^2 \cdot \frac{\sin(ax)}{a} \right] - \int \frac{2x \sin(ax)}{a} \, dx \\ \int x \sin(ax) \, dx &= \left[x \cdot \frac{-\cos(ax)}{a} \right] + \int \frac{\cos(ax)}{a} \, dx = \left[x \cdot \frac{-\cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} \right]. \end{aligned}$$

Also haben wir:

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(ax) \, dx &= \left[x^3 \cdot \frac{-\cos(ax)}{a} \right] + \frac{3}{a} \left(\left[x^2 \cdot \frac{\sin(ax)}{a} \right] - \frac{2}{a} \left[x \cdot \frac{-\cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} \right] \right) \\ &= \left[\frac{1}{a^4} \left((6ax - a^3x^3) \cos(ax) + (3a^2x^2 - 6) \sin(ax) \right) \right]. \end{aligned}$$

(d) Zuerst bemerken wir, dass $b^x = e^{x \ln b}$ gilt. Also ist $b^x e^{-cx} = e^{x \ln(b) - cx} = e^{x(\ln(b) - c)}$. Wir setzen $g(x) = x^2$ und $f(x) = \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c}$ (also $f'(x) = e^{x(\ln(b) - c)}$), dann gilt:

$$\begin{aligned} \int x^2 b^x e^{-cx} \, dx &= \left[x^2 \cdot \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c} \right] - \int 2x \cdot \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c} \, dx \\ \int x e^{x(\ln(b) - c)} \, dx &= \left[x \cdot \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c} \right] - \int \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c} \, dx \\ &= \left[x \cdot \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c} - \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{(\ln(b) - c)^2} \right] \end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$\begin{aligned} \int x^2 b^x e^{-cx} \, dx &= \left[x^2 \cdot \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c} - \frac{2}{\ln(b) - c} \left(x \cdot \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{\ln(b) - c} - \frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{(\ln(b) - c)^2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{e^{x(\ln(b) - c)}}{(\ln(b) - c)^3} \left(2 - 2x(\ln(b) - c) + x^2(\ln(b) - c)^2 \right) \right] \\ &= \left[\frac{b^x e^{-cx}}{(\ln(b) - c)^3} \left(2 - 2x(\ln(b) - c) + x^2(\ln(b) - c)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Aufgabe H 102. Integration durch Substitution

Bestimmen Sie die folgenden Integrale (nehmen Sie in (c) an, dass x in $(0, \pi)$ liegt).

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int \frac{x^2 \cosh(x^3)}{\sinh(x^3)} \, dx & \text{(c)} \int \frac{\sqrt{1 - (\cos(x))^2}}{\sqrt{1 + (\cos(x))^2}} \, dx \\ \text{(b)} \int \frac{2x \arctan(2x) + 2 \arctan(2x)}{4x^3 + 4x^2 + x + 1} \, dx & \text{(d)} \int \sqrt{\frac{\sqrt{x} - 1}{4x}} \, dx \end{array}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $t = \sinh(x^3)$. Durch die Kettenregel ist $\frac{dt}{dx} = 3x^2 \cosh(x^3)$. Daher gilt

$$\int \frac{x^2 \cosh(x^3)}{\sinh(x^3)} \, dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} \, dt = \left[\frac{1}{3} \ln |t| \right] = \left[\frac{1}{3} \ln |\sinh(x^3)| \right].$$

Alternative Substitution: $u = x^3$ mit $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 \cosh(x^3)}{\sinh(x^3)} \, dx &= \int \frac{1}{3} \cdot \frac{\cosh(u)}{\sinh(u)} \, du = \int \frac{1}{3} \frac{\frac{d}{du} \sinh(u)}{\sinh(u)} \, du \\ &= \frac{1}{3} [\ln |\sinh(u)|] = \left[\frac{1}{3} \ln |\sinh(x^3)| \right]. \end{aligned}$$

- (b) Zuerst bemerken wir, dass $4x^3 + 4x^2 + x + 1 = (x + 1)(4x^2 + 1) = (2x + 2)(2x^2 + \frac{1}{2})$ gilt: Den Faktor $(x + 1)$ finden wir durch raten einer Nullstelle, den zweiten durch Polynomdivision. Damit ist

$$\frac{2x \arctan(2x) + 2 \arctan(2x)}{4x^3 + 4x^2 + x + 1} = \frac{(2x + 2) \arctan(2x)}{(2x + 2)(2x^2 + \frac{1}{2})} = \frac{\arctan(2x)}{2x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Sei $t = \arctan(2x)$, dann ist $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+4x^2}$ durch die Kettenregel. Daher ist

$$\begin{aligned} \int \frac{2x \arctan(2x) + 2 \arctan(2x)}{4x^3 + 4x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{\arctan(2x)}{2x^2 + \frac{1}{2}} dx \\ &= \int \frac{2 \arctan(2x)}{1 + 4x^2} dx \\ &= \int t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right] = \left[\frac{1}{2} (\arctan(2x))^2 \right]. \end{aligned}$$

- (c) Wir setzen $t = \cos(x)$ und verwenden die Identität $(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$. Da $\frac{dt}{dx} = -\sin(x)$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 - (\cos(x))^2}}{\sqrt{1 + (\cos(x))^2}} dx &= \int \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 + (\cos(x))^2}} dx \quad (\text{da } \sin(x) > 0 \text{ für } x \in (0, \pi)) \\ &= \int -\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt = [-\operatorname{arcsinh}(t)] = [-\operatorname{arcsinh}(\cos(x))]. \end{aligned}$$

- (d) Sei $t = \sqrt{x} - 1$, dann ist $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und

$$\int \sqrt{\frac{\sqrt{x} - 1}{4x}} dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x} - 1}}{2\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right] = \left[\frac{2}{3} (\sqrt{x} - 1)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Aufgabe H 103. Stammfunktionen

Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f_n: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{(1 - x)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Bestimmen Sie für die folgenden $n \in \mathbb{N}$ jeweils eine Stammfunktion F_n von f_n :

- (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n > 3$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x}{1 - x} dx &= [-(x^2 - 2x) \ln(1 - x)] - \int -(2x - 2) \ln(1 - x) dx \\ &= [-x(x - 2) \ln(1 - x)] + 2 \int (x - 1) \ln(1 - x) dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int (x-1) \ln(1-x) dx &= \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \ln(1-x) \right] - \int \frac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{x-1} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \ln(1-x) \right] - \frac{1}{2} \int x-1 dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \ln(1-x) - \frac{1}{4}(x-1)^2 \right] \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-1)^2 (2 \ln(1-x) - 1) \right].\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x}{1-x} dx &= \left[-(x^2 - 2x) \ln(1-x) + (x-1)^2 \ln(1-x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right] \\ &= \left[\ln(1-x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right].\end{aligned}$$

Damit ist $F_1: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(1-x) - \frac{1}{2}(x-1)^2$ eine Stammfunktion von f_1 .

Alternativer 'Trick': Wir bemerken, dass $x^2 - 2x = (1-x)^2 - 1$ gilt.

Damit gilt:

$$\int \frac{x^2 - 2x}{1-x} dx = \int \frac{(1-x)^2 - 1}{1-x} dx = \int 1-x - \frac{1}{1-x} dx = \left[x - \frac{x^2}{2} + \ln(1-x) \right].$$

Damit ist $\tilde{F}_1: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \ln(1-x)$ eine Stammfunktion von f_1 .

Beachten Sie, dass $\tilde{F}_1 = F_1 + \frac{1}{2}$.

Alternativ durch Substitution: Sei $t = 1-x$, dann gelten $\frac{dt}{dx} = -1$ und somit

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x}{1-x} dx &= \int \frac{2(1-t) - (1-t)^2}{t} dt = \int \frac{1-t^2}{t} dt = \int \frac{1}{t} - t dt \\ &= \left[\ln(t) - \frac{t^2}{2} \right] = \left[\ln(1-x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right].\end{aligned}$$

(b) Durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^2} dx &= \left[\frac{x(x-2)}{(1-x)} \right] - \int \frac{1}{(1-x)} \cdot (2x-2) dx \\ &= \left[\frac{x(x-2)}{(1-x)} \right] - \int -2 dx = \left[\frac{x(x-2)}{(1-x)} + 2x \right] = \left[\frac{x^2}{(x-1)} \right].\end{aligned}$$

Damit ist $F_2: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x^2}{(x-1)}$ eine Stammfunktion von f_2 .

Alternativer 'Trick':

$$\int \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^2} dx = \int \frac{(1-x)^2 - 1}{(1-x)^2} dx = \int 1 - \frac{1}{(1-x)^2} dx = \left[x - \frac{1}{1-x} \right].$$

Damit ist $\tilde{F}_2: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x - \frac{1}{1-x}$ eine Stammfunktion von f_2 . Beachten Sie, dass $\tilde{F}_2 = F_2 - 1$ ist.

Alternativ durch Substitution: Sei $t = 1 - x$, dann gelten $\frac{dt}{dx} = -1$ und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^2} dx &= \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} - 1 dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} - t \right] = \left[-\frac{1}{1-x} - 1 + x \right] = \left[x - \frac{1}{1-x} \right]. \end{aligned}$$

(c) Durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^3} dx &= \left[\frac{x(x-2)}{2(1-x)^2} \right] - \int \frac{1}{2(1-x)^2} \cdot (2x-2) dx \\ &= \left[\frac{x(x-2)}{2(1-x)^2} \right] + \int \frac{1}{1-x} dx = \left[\frac{x(x-2)}{2(1-x)^2} - \ln(1-x) \right]. \end{aligned}$$

Damit ist $F_3: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x(x-2)}{2(1-x)^2} - \ln(1-x)$ eine Stammfunktion von f_3 .

Alternativ durch Substitution: Sei $t = 1 - x$, dann gelten $\frac{dt}{dx} = -1$ und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^3} dx &= \int \frac{1-t^2}{t^3} dt = \int \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2t^2} - \ln(t) \right] = \left[-\frac{1}{2(1-x)^2} - \ln(1-x) \right]. \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{F}_3: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x - \frac{1}{2(1-x)^2} - \ln(1-x)$ eine Stammfunktion von f_3 . Beachten Sie, dass $\tilde{F}_3 = F_3 - \frac{1}{2}$.

(d) Durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^n} dx &= \left[\frac{x(x-2)}{(n-1)(1-x)^{n-1}} \right] - \int \frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}} \cdot (2x-2) dx \\ &= \left[\frac{x(x-2)}{(n-1)(1-x)^{n-1}} \right] + \int \frac{2}{(n-1)(1-x)^{n-2}} dx \\ &= \left[\frac{x(x-2)}{(n-1)(1-x)^{n-1}} + \frac{2}{(n-1)(n-3)(1-x)^{n-3}} \right] \\ &= \left[\frac{(n-3)x(x-2) + 2(1-x)^2}{(n-1)(n-3)(1-x)^{n-1}} \right] \\ &= \left[\frac{(n-1)x(x-2) + 2}{(n-1)(n-3)(1-x)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

Damit ist $F_n: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{(n-1)x(x-2) + 2}{(n-1)(n-3)(1-x)^{n-1}}$ eine Stammfunktion von f_n mit $n > 3$.

Alternativ durch Substitution: Sei $t = 1 - x$, dann gelten $\frac{dt}{dx} = -1$ und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^n} dx &= \int \frac{1-t^2}{t^n} dt = \int \frac{1}{t^n} - \frac{1}{t^{n-2}} dt \\ &= \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + \frac{1}{(n-3)t^{n-3}} \right] \\ &= \left[\frac{1}{(1-x)^{n-1}} \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{(1-x)^2}{n-3} \right) \right] \\ &= \left[\frac{(n-1)x(x-2) + 2}{(n-1)(n-3)(1-x)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

Aufgabe H 104. Integration mittels Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int \frac{-x^2 + 10x - 11}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx \qquad (b) \int \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x^2+x+2)} dx$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Nullstelle des Nenners ist $x = 2$.

Wir haben $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2 + x - 6) = (x-2)^2(x+3)$.

Für die Partialbruchzerlegung nutzen wir den Ansatz

$$\frac{-x^2 + 10x - 11}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \frac{-x^2 + 10x - 11}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_{11}}{x-2} + \frac{A_{12}}{(x-2)^2} + \frac{A_{21}}{x+3}$$

mit $A_{11}, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{R}$. Erweitern liefert

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + 10x - 11}{(x-2)^2(x+3)} &= \frac{A_{11}(x-2)(x+3) + A_{12}(x+3) + A_{21}(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)} \\ &= \frac{(A_{11} + A_{21})x^2 + (A_{11} + A_{12} - 4A_{21})x - 6A_{11} + 3A_{12} + 4A_{21}}{(x-2)^2(x+3)}. \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = -1 \\ A_{11} + A_{12} - 4A_{21} = 10 \\ -6A_{11} + 3A_{12} + 4A_{21} = -11 \end{cases}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist $A_{11} = A_{12} = 1$ und $A_{21} = -2$. (Man kann auch $A_{12} = 1$ nach Multiplikation mit $(x-2)^2$ und Grenzübergang $x \rightarrow 2$ finden.)

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2 + 10x - 11}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{(x-2)^2} dx - \int \frac{2}{x+3} dx \\ &= \left[\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - 2 \ln|x+3| \right] \\ &= \left[\ln \frac{|x-2|}{(x+3)^2} - \frac{1}{x-2} \right]. \end{aligned}$$

- (b) Das Polynom $x^2 + x + 2$ hat keine reellen Nullstellen, also gibt es nach 3.4.5 reelle Zahlen A , B und C so, dass

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x^2+x+2)} &= \frac{x^2+x-2}{(x+1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B+Cx}{x^2+x+2} \\ &= \frac{A(x^2+x+2) + (B+Cx)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+2)}. \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ A + B + C = 1 \\ 2A + B = -2 \end{cases}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist $A = -1$, $B = 0$, $C = 2$.

Dann erhalten wir nach Lemma 3.4.8 und 3.4.9

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x^2+x+2)} dx &= \int -\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+x+2} dx \\ &= [-\ln|x+1|] + \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+x+2} dx \\ &= \left[-\ln|x+1| + \ln|x^2+x+2| + \frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}} \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}}\right) \right] \\ &= \left[-\ln|x+1| + \ln|x^2+x+2| + \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 105. Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie jeweils (mit dem Gauß-Algorithmus 3.7.6) die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$, mit

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir verwenden den Gauß-Algorithmus.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} Z_2 - 2Z_1 : \\ Z_3 + Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Z_3 + \frac{2}{3}Z_2 : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array} \right]$$

Demnach erhält man als eindeutige Lösung $x = (1, 0, 0)^T$ und somit

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Z_1 + \frac{1}{3}Z_2 : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{Z_2}{-3} : \\ Z_3 + \frac{2}{3}Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Wir können die Lösung somit direkt ablesen. Es ist

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + L \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 106. Integration mit Partialbruchzerlegung

- (a) Schreiben Sie $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ als Produkt von Linearfaktoren.
- (b) Bestimmen Sie $\int f(x) dx$ für $f(x) = \frac{x^5 - x^4 + x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.
- (c) Bestimmen Sie $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin(x))^5 - (1 - (\cos(x))^2)^2 - (\cos(x))^2 + \sin(x) - 1}{(\sin(x))^3 - (\cos(x))^2 - \sin(x)} \cdot \cos(x) dx$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Nachdem wir durch Raten die Nullstelle $x = 1$ gefunden haben, erhalten wir durch Polynomdivision die Darstellung

$$p(x) = (x + 1)^2(x - 1)$$

- (b) Durch Polynomdivision $(x^5 - x^4 + x^2 + x - 2) : (x^3 + x^2 - x - 1)$ erhalten wir zuerst die Darstellung

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 + \frac{-3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

Einsetzen von $x = 1$ in $-3x^2 + 2x + 1$ zeigt, dass $(x - 1)$ auch ein Linearfaktor von $-3x^2 + 2x + 1$ ist, wir erhalten mittels Polynomdivision die vereinfachte Darstellung:

$$\frac{-3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{-3x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{-3(x + 1) + 2}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2},$$

was auf

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 - \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2}$$

und somit

$$\int f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 3 \ln(|x + 1|) - \frac{2}{x + 1} \right]$$

führt.

- (c) Wir verwenden die Identität $(\cos(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2$:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin(x))^5 - (1 - (\cos(x))^2)^2 - (\cos(x))^2 + \sin(x) - 1}{(\sin(x))^3 - (\cos(x))^2 - \sin(x)} \\ &= \frac{(\sin(x))^5 - ((\sin(x))^2)^2 - (1 - (\sin(x))^2) + \sin(x) - 1}{(\sin(x))^3 - (1 - (\sin(x))^2) - \sin(x)} \\ &= \frac{(\sin(x))^5 - (\sin(x))^4 + (\sin(x))^2 + \sin(x) - 2}{(\sin(x))^3 + (\sin(x))^2 - \sin(x) - 1} = f(\sin(x)) \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin(x))^5 - (1 - (\cos(x))^2)^2 - (\cos(x))^2 + \sin(x) - 1}{(\sin(x))^3 - (\cos(x))^2 - \sin(x)} \cdot \cos(x) \, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(\sin(x)) \cdot \cos(x) \, dx \stackrel{3.3.3}{=} \int_{\sin(-\frac{\pi}{6})}^{\sin(\frac{\pi}{6})} f(\xi) \, d\xi \\ &\stackrel{(a)}{=} \left[\frac{1}{3}\xi^3 - \xi^2 + 3\xi - 3\ln(|\xi + 1|) - \frac{2}{\xi + 1} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 3\ln\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) - \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 3\ln\frac{1}{2} - 4 \right) \\ &= \frac{1 - 6 + 36 - 32 - (-1 - 6 - 36 - 96)}{24} - 3 \left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{138}{24} - 3\ln\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1}\right) = \frac{23}{4} - 3\ln 3 \end{aligned}$$

Aufgabe H 107. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^{e^{42}} \frac{1}{21t + t \ln t} \, dt & \text{(b)} \quad & \int_{-\frac{3}{7}}^{\frac{3}{7}} \frac{1 + 2\xi^2 + \xi^4}{(1 - \xi^2)(1 - \xi^4)} \, d\xi \\ \text{(c)} \quad & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3e^{(\sin(x))^3} \cos(x) \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3e^{(\sin(x))^3} (\cos(x))^3 \, dx \\ \text{(d)} \quad & \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\cosh(x)} \, dx \end{aligned}$$

Hinweis: Erweitern Sie mit $\cosh(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{42}} \frac{1}{21t + t \ln t} \, dt &= \int_1^{e^{42}} \frac{1}{21 + \ln t} \cdot \frac{1}{t} \, dt \\ &\quad \text{Substitution } u(t) := 21 + \ln t \\ &= \int_1^{e^{42}} \frac{1}{u(t)} u'(t) \, dt \\ &= \int_{u(1)}^{u(e^{42})} \frac{1}{u} \, du = [\ln u]_{21}^{63} \\ &= \ln(63) - \ln(21) = \ln\left(\frac{63}{21}\right) = \ln(3) \end{aligned}$$

(b) Wir formen zuerst mit der binomischen Formel um:

$$\frac{1 + 2\xi^2 + \xi^4}{(1 - \xi^2)(1 - \xi^4)} = \frac{(1 + \xi^2)^2}{(1 - \xi^2)^2(1 + \xi^2)} = \frac{1 + \xi^2}{(1 - \xi^2)^2(1 + \xi^2)}$$

Nun machen eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1 + \xi^2}{(1 - \xi)^2(1 + \xi)^2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{(1 - \xi)} + \frac{B}{(1 - \xi)^2} + \frac{C}{(1 + \xi)} + \frac{D}{(1 + \xi)^2}$$

Dieser Ansatz ergibt

$$\begin{aligned} 1 + \xi^2 &= A(1 - \xi)(1 + \xi)^2 + B(1 + \xi)^2 + C(1 - \xi)^2(1 + \xi) + D(1 - \xi)^2 = \\ &= A(1 + \xi - \xi^2 - \xi^3) + B(1 + 2\xi + \xi^2) \\ &\quad + C(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) + D(1 - 2\xi + \xi^2) \\ &= (A + B + C + D) + (A + 2B - C - 2D)\xi \\ &\quad + (-A + B - C + D)\xi^2 + (-A + C)\xi^3, \end{aligned}$$

was auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

führt. Wir wenden Gauß an:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 + Z_1 : \\ Z_4 + Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} Z_3 - 2Z_2 : \\ Z_4 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

$$Z_4 - Z_3 : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} Z_1 - Z_2 : \\ Z_2 + 1/2 \cdot Z_3 : \\ Z_3 + 2 \cdot Z_4 : \\ (-1/4) \cdot Z_4 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} Z_1 - 3/4 \cdot Z_3 - 4Z_4 : \\ Z_2 - Z_4 : \\ 1/4 \cdot Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right]$$

Hiermit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{7}}^{\frac{3}{7}} \frac{1 + 2\xi^2 + \xi^4}{(1 - \xi^2)(1 - \xi^4)} d\xi &= \int_{-\frac{3}{7}}^{\frac{3}{7}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 - \xi)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \xi)^2} d\xi \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \xi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \xi} \right]_{-\frac{3}{7}}^{\frac{3}{7}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{7}{10} = \frac{21}{20} \end{aligned}$$

Alternative Lösungswege:

- Wir hätten durchaus auch schneller ans Ziel kommen können, es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2\xi^2 + \xi^4}{(1 - \xi^2)(1 - \xi^4)} &= \frac{1 + \xi^2}{(1 - \xi)^2(1 + \xi)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 2\xi - 2\xi + 2\xi^2}{(1 - \xi)^2(1 + \xi)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \xi)^2}{(1 - \xi)^2(1 + \xi)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \xi)^2}{(1 - \xi)^2(1 + \xi)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 - \xi)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \xi)^2} \end{aligned}$$

- Andererseits hätten wir auch die Partialbruchzerlegung direkt anwenden können (ohne vorheriges Kürzen), was auf den Ansatz

$$\frac{1 + 2\xi^2 + \xi^4}{(1 - \xi^2)(1 - \xi^4)} = \frac{A}{1 - \xi} + \frac{B}{(1 - \xi)^2} + \frac{C}{1 + \xi} + \frac{D}{(1 + \xi)^2} + \frac{Ex + F}{(1 + \xi^2)}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 1 + 2\xi^2 + \xi^4 &= (A + B + C + D + F) \\ &\quad + (A + 2B - C - 2D + E)\xi \\ &\quad + (2B + 2D - 2F)\xi^2 \\ &\quad + (2B - 2D - 2E)\xi^3 \\ &\quad + (-A + B - C + D + F)\xi^4 \\ &\quad + (-A + C + E)\xi^5 \end{aligned}$$

geführt hätte. Das zugehörige LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat wie zu erwarten – die Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung sind eindeutig

– die Lösung
$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
 diese ist nur aufwendiger zu berechnen.

(c) Wir nutzen $(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$ und erhalten

$$3e^{(\sin(x))^3} \cos(x) - 3e^{(\sin(x))^3} (\cos(x))^3 = 3e^{(\sin(x))^3} \underbrace{(1 - (\cos(x))^2)}_{=(\sin(x))^2} \cos(x) = \frac{d}{dx} e^{(\sin(x))^3}$$

Also gilt:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3e^{(\sin(x))^3} \cos(x) dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3e^{(\sin(x))^3} (\cos(x))^3 dx = \left[e^{(\sin(x))^3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = e - \frac{1}{e}$$

(d) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\cosh(x)} dx &\stackrel{\text{Hinweis}}{=} \int_0^{\ln 3} \frac{\cosh(x)}{(\cosh(x))^2} dx \\ &\stackrel{2.3.3}{=} \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1 + (\sinh(x))^2} \cdot \cosh(x) dx \\ &\quad \text{Substitution } u(x) := \sinh(x) \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1 + (u(x))^2} \cdot u'(x) dx = \int_{\sinh(0)}^{\sinh(\ln(3))} \frac{1}{1 + u^2} du \\ &\stackrel{3.1.7}{=} \left[\arctan(u) \right]_{\sinh(0)}^{\sinh(\ln(3))} \\ &= \arctan(\sinh(\ln 3)) - \arctan(\sinh(0)) \\ &= \arctan\left(\frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3}\right)\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe H 108. Unbestimmte und uneigentliche Integrale

Berechnen Sie

(a) $\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} dx$

(b) $\int \ln|x| \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

(c) $\int_{0+0}^{+\infty} \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Es ist

$$\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} dx$$

Substitution: $u(x) := -\frac{1}{x}$

$$= \int u'(x) \cdot (1 + u(x)) e^{u(x)} dx$$

$$\stackrel{3.3.1}{=} \int (1 + u) e^u du$$

$$\stackrel{3.2.3}{=} [(1 + (u(x) - 1)) e^{u(x)}] = \left[-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right]$$

(b) Es gilt

$$\int \ln|x| \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \int \ln|x| \cdot \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}\right) dx$$

$$\stackrel{(a)}{=} \int \ln|x| \cdot \left(\frac{d}{dx} \left(-\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right)\right) dx =$$

$$\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \left[-\ln|x| \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right] - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) dx$$

$$= \left[-\ln|x| \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right] + \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

Substitution: $u(x) := -\frac{1}{x}$

$$= \left[-\ln|x| \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right] + \int u'(x) e^{u(x)} dx$$

$$= \left[-\ln|x| \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} + e^{-\frac{1}{x}}\right]$$

(c) Mit (a) und (b) gilt für beliebige $\alpha, z, \beta \in (0, \infty)$ mit $\alpha < z < \beta$:

$$\int_{\alpha}^z \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \left[e^{-\frac{1}{x}} - \ln x \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right]_{\alpha}^z$$

$$= e^{-\frac{1}{z}} - \ln z \cdot \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} - \left(e^{-\frac{1}{\alpha}} - \ln \alpha \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\right)$$

$$\int_z^{\beta} \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \left[e^{-\frac{1}{x}} - \ln x \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right]_z^{\beta}$$

$$= e^{-\frac{1}{\beta}} - \ln \beta \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta} - \left(e^{-\frac{1}{z}} - \ln z \cdot \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}\right)$$

Ferner gelten für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ (α, β wie oben)

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^n} &\stackrel{\xi = \frac{1}{\alpha}}{=} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^n}{e^\xi} \stackrel{2.5.6}{=} 0 \\ \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\beta)}{\beta} &\stackrel{''\infty''}{=} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\beta}}{1} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} = 0 \\ \lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{\beta}} &\stackrel{\xi = -\frac{1}{\beta}}{=} \lim_{\xi \rightarrow 0-0} e^\xi = 1 \end{aligned}$$

Wählen wir nun $z = 1$, gilt folglich mit Beispiel 2.5.8 ($\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\alpha}^1 \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} e^{-1} - \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^0}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(\alpha \cdot \ln \alpha)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^2}}_{\rightarrow 0} = \frac{1}{e} \\ \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{\beta}}}_{\rightarrow 1} - \underbrace{\frac{\ln \beta}{\beta}}_{\rightarrow 0 \cdot 1} \cdot e^{-\frac{1}{\beta}} - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{0+0}^{+\infty} \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\alpha}^1 \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx \\ &\quad + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \ln x \cdot \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe H 109. Unbestimmte und uneigentliche Integrale mit Parameter

Zu $d \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_d: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f_d(t) := \ln(t^{t^d})$.

(a) Bestimmen Sie $\int f_d(t) dt$.

(b) Bestimmen Sie alle $d \in \mathbb{R}$, für die das Integral $\int_{0+0}^1 f_d(t) dt$ existiert.
Geben Sie für diese ferner den Wert des Integrals an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Gemäß Definition 2.2.7 gilt für alle $d \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} f_d(t) &= \ln(t^{t^d}) = \ln(e^{t^d \cdot \ln t}) \\ &= t^d \cdot \ln t \end{aligned}$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

$d = -1$: In diesem Falle gilt:

$$\begin{aligned} \int f_{-1}(t) dt &= \int t^{-1} \ln t dt \stackrel{\text{part. Int.}}{=} [(\ln t) \cdot (\ln t)] - \int (\ln t) \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= [(\ln t) \cdot (\ln t)] - \int f_{-1}(t) dt \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich: $\int f_{-1}(t) dt = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2 \right]$.

Alternativer Lösungsweg:

$$\int f_{-1}(t) dt = \int t^{-1} \ln t dt \stackrel{u(t) := \ln t}{=} \int u(t) \cdot u'(t) dt$$

$$\stackrel{3.3.1}{=} \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2 \right]$$

$d \neq -1$: In diesem Falle gilt:

$$\int f_d(t) dt = \int t^d \ln t dt$$

$$\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \left[\frac{1}{d+1} t^{d+1} \ln t \right] - \frac{1}{d+1} \int t^{d+1} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[\frac{1}{d+1} t^{d+1} \ln t \right] - \frac{1}{d+1} \int t^d dt$$

$$= \left[\frac{1}{d+1} t^{d+1} \ln t - \frac{1}{(d+1)^2} t^{d+1} \right]$$

Wichtig: Man beachte, dass die Betragsstriche im Logarithmus nur deshalb weggelassen werden dürfen, da wir aufgrund der Funktionsdefinition im vorliegenden Fall wissen, dass $t > 0$ ist.

(b) Auch hier machen wir eine Fallunterscheidung, allerdings für drei Fälle:

$d < -1$: Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 f_d(t) dt \stackrel{(a)}{=} \left[\frac{1}{d+1} t^{d+1} \ln t - \frac{1}{(d+1)^2} t^{d+1} \right]_{\varepsilon}^1$$

$$= -\frac{1}{(d+1)^2} + \frac{\varepsilon^{d+1}}{(d+1)^2} - \frac{1}{d+1} \varepsilon^{d+1} \ln \varepsilon$$

Hierbei gelten wegen $d+1 < 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\varepsilon^{d+1}}{(d+1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{(d+1)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{|d+1|} = \infty$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 1 - (d+1) \cdot \underbrace{\ln \varepsilon}_{\rightarrow -\infty} = -\infty,$$

womit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\varepsilon^{d+1}}{(d+1)^2} \cdot (1 - (d+1) \cdot \ln \varepsilon) = -\infty$$

folgt. Hieraus ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 f_d(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} -\frac{1}{(d+1)^2} + \frac{\varepsilon^{d+1}(1 - (d+1) \ln \varepsilon)}{(d+1)^2} = -\infty,$$

also Divergenz.

$d = -1$: In diesem Falle gilt für $0 < \varepsilon < 1$

$$\int_{\varepsilon}^1 f_{-1}(t) dt \stackrel{(a)}{=} \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_{\varepsilon}^1 = -\frac{1}{2} (\ln \varepsilon)^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\infty,$$

also ebenfalls Divergenz.

$d > -1$: Wir erhalten für $0 < \varepsilon < 1$ wegen $d + 1 > 0$ bzw. $-d - 1 < 0$:

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^1 f_d(t) dt &\stackrel{(a)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{(d+1)^2} + \frac{\varepsilon^{d+1}}{(d+1)^2} - \frac{1}{d+1} \varepsilon^{d+1} \ln \varepsilon \\ &= -\frac{1}{(d+1)^2} + 0 + \frac{1}{d+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-\ln \varepsilon}{\varepsilon^{-d-1}} \\ &\stackrel{''\infty''}{=} -\frac{1}{(d+1)^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{(-d-1)\varepsilon^{-d-2}} \\ &= -\frac{1}{(d+1)^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(d+1)} \varepsilon^{d+1} = -\frac{1}{(d+1)^2} + 0 = -\frac{1}{(d+1)^2}, \end{aligned}$$

insbesondere also Konvergenz.

Aus obigem ergibt sich: $\int_{0^+}^1 f_d(t) dt$ existiert ausschließlich für $d > -1$, es gilt dann

$$\int_{0^+}^1 f_d(t) dt = -\frac{1}{(d+1)^2}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 110. Geht auch ohne Hauptachsentransformation ...

Bestimmen Sie für $A := \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T A x + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^T x = 0 \right\}$

(a) $\det A_{\text{erw}}$ und $\text{Rg } A_{\text{erw}}$.

(b) die Gestalt von Q .

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt mit dem Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} \det A_{\text{erw}} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 16 + 16 + 16 + 16 = 64 \end{aligned}$$

und somit $\text{Rg } A_{\text{erw}} = 4$.

Alternativer Lösungsweg:

Alternativ können wir Rang und Determinante auch über Gauß bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} Z_1 \leftrightarrow Z_2 : \\ Z_2 \leftrightarrow Z_1 : \\ Z_3 + Z_2 : \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_3 + 4Z_2 : \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich hat A also Rang 4, die Determinante ergibt sich, da wir – abgesehen von einem Zeilentausch – nur Umformungen verwendet haben, welche diese nicht ändern, als

$$\det A = (-1) \cdot (2 \cdot 2 \cdot (-16) \cdot 1) = 64.$$

(b) Zwei EW können wir direkt ablesen: $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = 1$. Für λ_2 muss gelten:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Sp } A = -7,$$

woraus wir $\lambda_2 = -8$ erhalten. (*)

Eigenvektoren zu λ_1 und λ_3 können wir direkt ablesen, es gilt:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu λ_2 müssen senkrecht zu diesen stehen, weshalb wir als zugehörigen EV

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten. Nun müssen wir nur noch normieren, was auf die Transformationsmatrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ führt. Wir erhalten damit}$$

$$y^T \tilde{A} y + 2\tilde{a}^T y + c = 0$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{a} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ c &= 0,\end{aligned}$$

also

$$y_1^2 - 8y_2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2}y_3 = 0$$

Nach anschließender Division durch $2\sqrt{2}$ erhalten wir die euklidische Normalform:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}y_1^2 - 2\sqrt{2}y_2^2 + 2y_3 = 0.$$

Folglich hat Q die Gestalt eines hyperbolischen Paraboloids.

Alternativer Lösungsweg:

Alternativ können wir in diesem Fall die Gestalt direkt nach der Kenntnis der Eigenwerte – also (*) – bestimmen: Mit $\lambda_3 = 0$ und (a) sehen wir: $\text{Rg } A_{\text{erw}} = \text{Rg } A + 2$. Folglich ist Q eine parabolische Quadrik. Da ferner zwei Eigenwerte von A von Null verschieden sind und auch noch unterschiedliche Vorzeichen haben, kann Q nur ein hyperbolisches Paraboloid sein.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 111. Gradienten und Nullstellenmengen

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \int_{x_1}^{x_2} e^{x_3-3} \cdot (x_3 - 3)^2 d\xi$.

- (a) Bestimmen Sie $\text{grad } f$.
 (b) Skizzieren Sie $N_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$ und $G_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla f(x) = 0\}$ jeweils in ein eigenes Koordinatensystem.

Lösungshinweise hierzu:

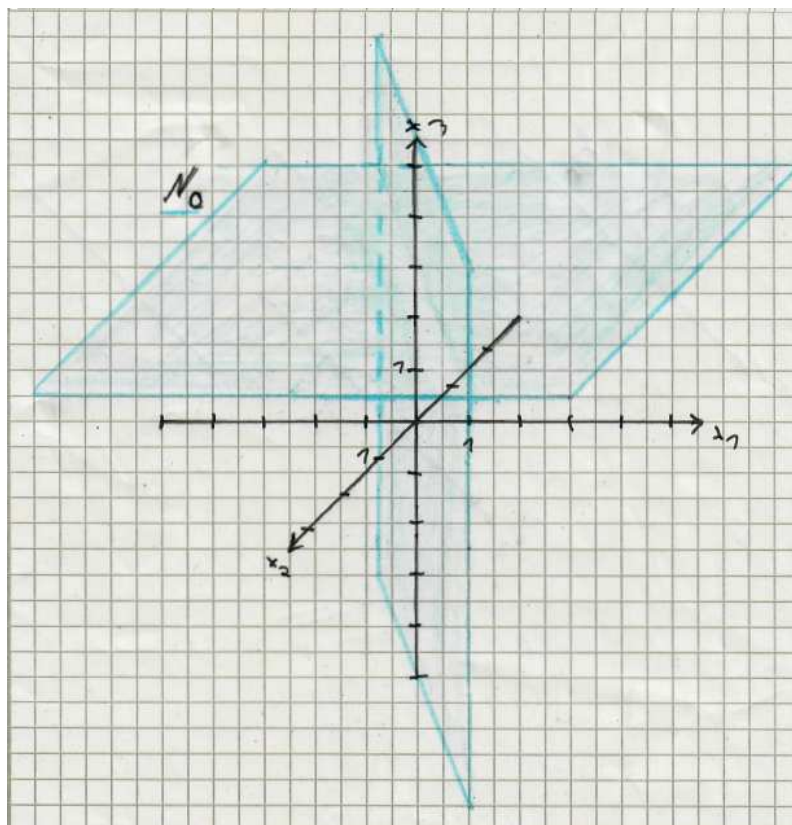
- (a) $\partial_{x_2} f$ können wir mit 3.6.3 direkt ablesen, es gilt: $\partial_{x_2} f(x) = e^{x_3-3} \cdot (x_3 - 3)^2$. Für $\partial_{x_1} f$ nutzen wir zusätzlich 3.6.5 und erhalten $\partial_{x_1} f(x) = -e^{x_3-3} \cdot (x_3 - 3)^2$. Für $\partial_{x_3} f(x)$ schreiben wir $f(x)$ zuerst um:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} e^{x_3-3} \cdot (x_3 - 3)^2 d\xi &= e^{x_3-3} \cdot (x_3 - 3)^2 \cdot \int_{x_1}^{x_2} 1 d\xi \\ &= e^{x_3-3} \cdot (x_3 - 3)^2 \cdot (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (14)$$

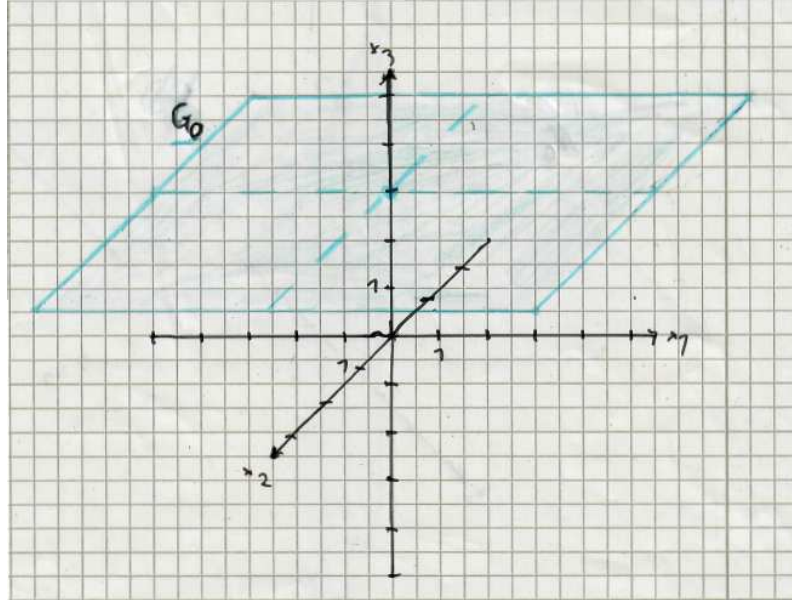
Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_{x_3} f(x) &= e^{x_3-3} \cdot (x_3 - 3)^2 \cdot (x_2 - x_1) + e^{x_3-3} \cdot 2(x_3 - 3) \cdot (x_2 - x_1) \\ \nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -e^{x_3-3}(x_3 - 3)^2 \\ e^{x_3-3}(x_3 - 3)^2 \\ e^{x_3-3}(x_3 - 3)(x_3 - 1)(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

- (b) Mit (14) sehen wir: $f(x)$ wird dann (und nur dann) 0, wenn $x_3 = 3$ oder $x_1 = x_2$ gilt, also $N_0 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \text{ oder } x_3 = 3\}$. Dies lässt sich wie folgt veranschaulichen:



(Die gestrichelten Linien deuten an, dass der entsprechende Teil durch die jeweils andere Ebene verdeckt ist.) Für G_0 erhalten wir mit (15) $G_0 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 3\}$ und somit die Skizze:



(Zur Verdeutlichung der Lage der Ebene wurde mittels gestrichelter Linien die Schnittgeraden mit den Koordinatenachsen angedeutet, dies ist aber nicht unbedingt notwendig.)

Aufgabe H 112. Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\pi x_1 - x_2) x_1 + x_2^2}{\pi x_1^2 + x_2^2}, & x \neq \mathbf{0} \\ 1, & x = \mathbf{0} \end{cases}$

sowie die Parametrisierung $g_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto t \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ einer Geraden G_m .

- Zeigen Sie, dass $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$ in $x_0 = \mathbf{0}$ existieren.
- Bestimmen Sie $L_m := \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ g_m)(t)$. Ist f in $\mathbf{0}$ stetig?
- Für welches $m \in \mathbb{R}$ wird L_m maximal?

Lösungshinweise hierzu:

- ∂_{x_1} : Es gilt mit l'Hospital

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f \left(\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \right) - f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\sin(\pi h) h}{\pi h^2} - 1 \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi h) - \pi h}{\pi h^2} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi h) \cdot \pi - \pi}{2\pi h} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h) \cdot \pi^2}{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

∂_{x_2} : Es gilt

$$\begin{aligned}\partial_{x_2} f \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix} \right) - f \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h^2}{h^2} - 1 \right) = 0\end{aligned}$$

Folglich existieren beide partiellen Ableitungen in $\mathbf{0}$.

Ein alternativer, stellenweise aufwendigerer Lösungsweg lautet wie folgt:

Wir nutzen die unter

<https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppe/Material/extra-2-5-11.pdf>

zu findende Ergänzung zum Satz von l'Hospital:

∂_{x_1} : Wir betrachten für $a < 0 < b$ die Einschränkungen

$g_1: (a, 0] \rightarrow \mathbb{R}: x_1 \mapsto f \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ und $g_2: [0, b) \rightarrow \mathbb{R}: x_1 \mapsto f \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$. Dann gilt für $x_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned}g_1(x_1) &= \frac{\sin(\pi x_1) x_1}{\pi x_1^2} = \frac{\sin(\pi x_1)}{\pi x_1}, \\ g_2(x_1) &= \frac{\sin(\pi x_1)}{\pi x_1},\end{aligned}$$

Diese Funktionen sind mit 1.12.1 (4., 7.) und Beispiel 1.12.5 stetig. Ferner gelten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1} g_1(x_1) &= \frac{\cos(\pi x_1) \cdot \pi \cdot \pi x_1 - \sin(\pi x_1) \pi}{\pi^2 x_1^2} \\ &= \frac{\cos(\pi x_1) \pi x_1 - \sin(\pi x_1)}{\pi x_1^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x_1 \nearrow 0} \frac{d}{dx_1} g_1(x_1) &= \lim_{x_1 \nearrow 0} \frac{\cos(\pi x_1) \pi x_1 - \sin(\pi x_1)}{\pi x_1^2} \\ &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x_1 \nearrow 0} \frac{-\sin(\pi x_1) \cdot \pi^2 x_1 + \cos(\pi x_1) \pi - \cos(\pi x_1) \pi}{2\pi x_1} \\ &= -\frac{\pi}{2} \lim_{x_1 \nearrow 0} \sin(\pi x_1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1} g_2(x_1) &= \frac{\cos(\pi x_1) \pi x_1 - \sin(\pi x_1)}{\pi x_1^2} \\ \lim_{x_1 \searrow 0} \frac{d}{dx_1} g_2(x_1) &= \lim_{x_1 \searrow 0} \frac{\cos(\pi x_1) \pi x_1 - \sin(\pi x_1)}{\pi x_1^2} \\ &= \dots (\text{siehe } g_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Also sind die die Ableitungen $\frac{d}{dx_1} g_1: (a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\frac{d}{dx_1} g_2: (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig fortsetzbar in die Stelle 0 mit $\frac{d}{dx_1} g_1(0) = \frac{d}{dx_1} g_2(0) = 0$. Insbesondere ist $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}: x_1 \mapsto f \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ beidseitig differenzierbar in 0 mit Ableitung $\frac{d}{dx_1} g(0) = 0$, woraus sich $\partial_{x_1} f \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = 0$ ergibt.

∂_{x_2} : Wir betrachten für $a < 0 < b$ die Einschränkungen $g_1: (a, 0] \rightarrow \mathbb{R}: x_2 \mapsto f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ und $g_2: [0, b) \rightarrow \mathbb{R}: x_2 \mapsto f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt für $x_2 \neq 0$:

$$g_1(x_2) = \frac{x_2^2}{x_2^2} = 1 = g_2(0),$$

$$g_2(x_2) = \frac{x_2^2}{x_2^2} = 1 = g_2(0),$$

insbesondere sind g_1 und g_2 als konstante Funktionen stetig. Ferner sind die Ableitungen $\frac{d}{dx_2}g_1: (a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\frac{d}{dx_2}g_2: (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig fortsetzbar in die Stelle 0 mit

$$\lim_{x_2 \nearrow 0} \frac{d}{dx_2}g_1(x_2) = 0 = \lim_{x_2 \searrow 0} \frac{d}{dx_2}g_2(x_2)$$

Also ist $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}: x_2 \mapsto f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ beidseitig differenzierbar in 0 mit Ableitung $\frac{d}{dx_2}g(0) = 0$, woraus sich $\partial_{x_2}f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$ ergibt.

(a) Sei $m \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g_m)(t) &= \frac{\sin((\pi m - 1)t) \quad mt + t^2}{(\pi m^2 + 1) t^2} \\ &= \frac{\sin((\pi m - 1)t) \quad m + t}{(\pi m^2 + 1) t} \end{aligned}$$

Hieraus folgt (erneut mit l'Hospital):

$$\begin{aligned} L_m &= \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ g_m)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((\pi m - 1)t) \quad m + t}{(\pi m^2 + 1) t} \\ &\stackrel{0/0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos((\pi m - 1)t) \quad (\pi m - 1) m + 1}{(\pi m^2 + 1)} \\ &= \frac{\pi m^2 - m + 1}{\pi m^2 + 1} = 1 - \frac{m}{\pi m^2 + 1} \end{aligned}$$

Da also insbesondere $L_m < 1 = f(0)$ für $m > 0$ gilt, ist f in $\mathbf{0}$ nicht stetig.

(b) Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Funktion $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: m \mapsto L_m$. Wegen $L_m < 1 = L(0)$ für $m > 0$ nimmt L – falls das Maximum existiert – dieses auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ an. Wir berechnen nun die Ableitung mit Hilfe der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} L'(m) &= -\frac{\pi m^2 + 1 - m(2\pi m)}{(\pi m^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\pi m^2 - 1}{(\pi m^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Die einzige kritische Stelle im relevanten Bereich ist $m_0 = -\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. Mit

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} 1 - \frac{m}{\pi m^2 + 1} = 1 = L(0)$$

und

$$\begin{aligned} L(m_0) &= 1 - \frac{\left(-\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)}{\pi \left(-\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} > 1 \end{aligned}$$

können wir nun folgern, dass L_m tatsächlich einen maximalen Wert annimmt, und zwar für $m = -\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

Aufgabe H 113. *Eigenwerte und Ableitungen*

Für $A \in \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^T = A\}$ definieren wir: $\Lambda(A) := \max \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ ist EW von } A\}$. Betrachten Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \Lambda \left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} \right)$$

- (a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $f \left((y_1 \ y_2 \ y_3)^T \right)$ an.
 (b) Bestimmen Sie $\partial_{y_2} f$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir benutzen das charakteristische Polynom von $Y := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}$, welches wir mit 5.2.3 (LAG) wie folgt berechnen können:

$$\begin{aligned} \chi_Y(\xi) &= \det \begin{pmatrix} y_1 - \xi & y_2 \\ y_2 & y_3 - \xi \end{pmatrix} \\ &= \xi^2 - \text{Sp } Y \cdot \xi + \det Y \\ &= \xi^2 - (y_1 + y_3) \xi + y_1 y_3 - y_2^2 \end{aligned}$$

Die EW sind die Nullstellen dieses Polynoms, womit wir – unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wir den größeren EW suchen – die Formel

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \frac{y_1 + y_3 + \sqrt{(y_1 + y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)}}{2} \\ &= \frac{y_1 + y_3 + \sqrt{y_1^2 + 2y_1 y_3 + y_3^2 - 4y_1 y_3 + 4y_2^2}}{2} \\ &= \frac{y_1 + y_3 + \sqrt{(y_1 - y_3)^2 + 4y_2^2}}{2} \end{aligned}$$

erhalten.

- (b) Wir nutzen (a) und machen eine Fallunterscheidung:

$y_1 \neq y_3$: In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_2} f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \frac{d}{dy_2} \left(\frac{y_1 + y_3 + \sqrt{(y_1 - y_3)^2 + 4y_2^2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 2y_2}{2\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + 4y_2^2}} \\ &= \frac{2y_2}{\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + 4y_2^2}} \end{aligned}$$

$y_1 = y_3, y_2 \neq 0$: In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_2} f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \frac{d}{dy_2} \left(\frac{y_1 + y_3 + 2\sqrt{y_2^2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2y_2}{\sqrt{y_2^2}} \\ &= \frac{y_2}{|y_2|} \\ &= \frac{2y_2}{\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + 4y_2^2}} \end{aligned}$$

$y_1 = y_3, y_2 = 0$: Analog zum vorherigen Fall müssen wir die Funktion $y_2 \mapsto \frac{2\sqrt{y_2^2}}{2} = |y_2|$ nach y_2 differenzieren – allerdings in $y_2 = 0$. Da an dieser Stelle die Betragsfunktion nicht differenzierbar ist, existiert die partielle Ableitung nach y_2 in diesem Falle nicht.

Zusammengefasst erhalten wir die partielle Ableitung:

$$\partial_{y_2} f: \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = y_3, y_2 = 0 \right\} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{2y_2}{\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + 4y_2^2}}$$

Aufgabe H 114. Gradienten II

Gegeben sei *Montecristo*: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{36}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2y^2$.

- Bestimmen Sie $\nabla \text{Montecristo} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Skizzieren Sie die Menge $N := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla \text{Montecristo} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \}$ in einem kartesischen Koordinatensystem für \mathbb{R}^2 .
- Skizzieren Sie die Menge $N := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla \text{Montecristo} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \}$ in die x - y -Ebene eines Koordinatensystems für \mathbb{R}^3 .
- Der Graph von *Montecristo* ist $\mathcal{G} := \{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = \text{Montecristo} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \}$. Ergänzen Sie die Skizze um den Schnitt von \mathcal{G} mit der x - z - sowie mit der y - z -Ebene.

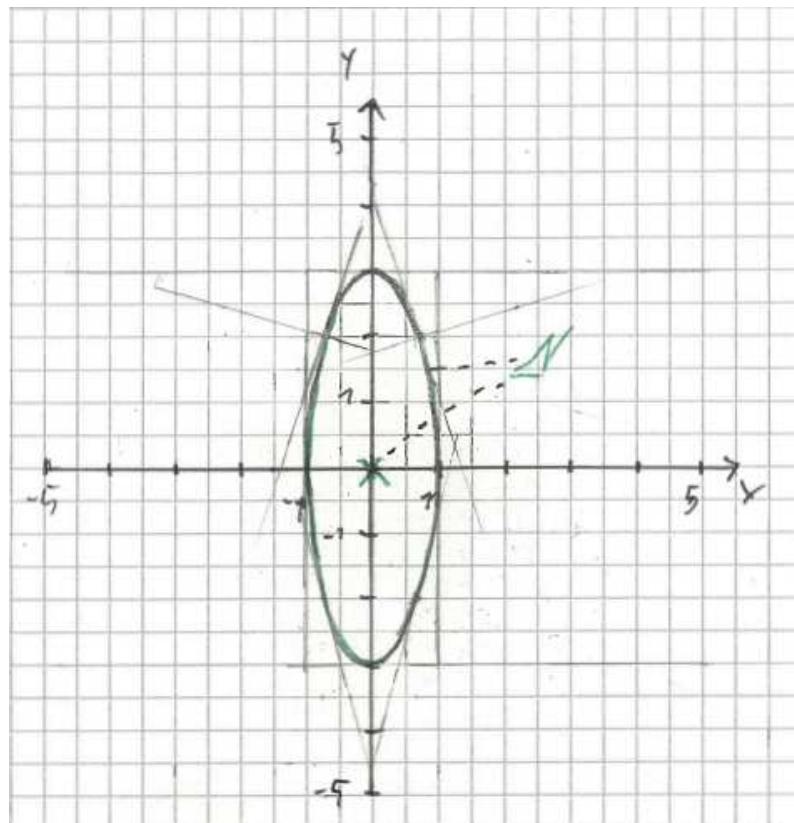
Lösungshinweise hierzu:**(a)** Es gilt:

$$\begin{aligned}\nabla \text{Montecristo} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9x^3 - 9x + xy^2 \\ \frac{1}{9}y^3 - y + x^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9x \left(-x^2 - \frac{1}{9}y^2 + 1\right) \\ -y \left(-x^2 - \frac{1}{9}y^2 + 1\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

(b) Durch unsere Darstellung in (16) können wir erkennen, dass der Gradient von *Montecristo* nur dann gleich $\mathbf{0}$ ist, wenn $x = y = 0$ gilt oder $\left(-x^2 - \frac{1}{9}y^2 + 1\right) = 0$, es gilt folglich

$$N = \{\mathbf{0}\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 - \frac{1}{9}y^2 + 1 \right\}$$

Dies führt auf folgende Skizze:

**(c)+(d)** Aufgrund der Halbachsenlängen der Ellipse, welche Teil von N ist, empfiehlt es sich, die x - und y -Achse im Vergleich zu H111 zu vertauschen (dies hat außerdem den schönen Nebeneffekt, dass nun ein Rechtssystem vorliegt).

Für die Skizze der Schnitte suchen wir zunächst Hilfspunkte (Achsen Schnittpunkte, lokale Extrema, ...), anhand derer wir das Verhalten des Graphen (grob) abschätzen können

- Für die x - z -Ebene $E_{x,z}$ gilt $y = 0$, also gilt für $(x, y, z)^T = (x, 0, z)^T \in E_{x,z} \cap \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}z = \text{Montecristo} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{9}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \\ &= \frac{9}{4}x^2 \cdot (x^2 - 2), \end{aligned}$$

insbesondere sind die Schnittpunkte mit der x -Achse gegeben durch $(-\sqrt{2}, 0, 0)^\top$, $(0, 0, 0)^\top$, und $(\sqrt{2}, 0, 0)^\top$. Unter Berücksichtigung von (b) erhalten wir ferner die – zumindest in Bezug auf den Schnitt mit der x - z -Ebene – lokalen Minimalstellen $(-1, 0)^\top$ und $(1, 0)^\top$, jeweils mit $z = -\frac{9}{4}$:

Die Funktion $\tilde{z}(x) := \text{Montecristo}(x, 0)$ ist auf $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ stetig differenzierbar, wobei die Ableitung $\tilde{z}'(x)$ der partiellen Ableitung $\partial_x \text{Montecristo} \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ entspricht. Diese wird insbesondere dann 0, wenn der Gradient von *Montecristo* Null wird. (Weitere Nullstellen können nicht existieren, da besagter Gradient bereits 3 Nullstellen entlang der x -Achse hat und die Ableitung von $\tilde{z}(x)$ ein Polynom dritten Grades ist.)

Hieraus ergibt sich die Behauptung aus $\tilde{z}(-\sqrt{2}) = \tilde{z}(\sqrt{2}) = \tilde{z}(0) = 0$ und $\tilde{z}(-1) = \tilde{z}(1) = -\frac{9}{4}$ sowie dem Satz von Minimum und Maximum. Ferner erkennen wir hierdurch, dass in $\mathbf{0}$ ein lokales Maximum vorliegt. Das Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$ wird durch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Montecristo}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Montecristo}(x, 0) = \infty$$

bestimmt.

- Für die y - z -Ebene $E_{y,z}$ hingegen gilt $x = 0$, dementsprechend gilt für $(x, y, z)^\top = (0, y, z)^\top \in E_{y,z} \cap \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} z = \text{Montecristo} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix} \right) &= \frac{1}{36}y^4 - \frac{1}{2}y^2 \\ &= \frac{1}{36}y^2(y^2 - 18) \end{aligned}$$

insbesondere sind die Schnittpunkte mit der x -Achse gegeben durch $(0, -3\sqrt{2}, 0)^\top$, $(0, 0, 0)^\top$, und $(0, 3\sqrt{2}, 0)^\top$. Analoge Überlegungen wie oben zeigen ferner, dass sich in $(0, -3)^\top$ und $(0, 3)^\top$ lokale Minima (jeweils mit Wert $-\frac{9}{4}$) sowie in $\mathbf{0}$ ein lokales Maximum befinden. Das Verhalten für $|y| \rightarrow \infty$ wird durch

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \text{Montecristo}(0, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \text{Montecristo}(0, y) = \infty$$

bestimmt.

Weitere Hilfspunkte erhalten, wir – falls nötig – wie üblich durch einsetzen, Ausnutzung von Symmetrien, etc., wie zum Beispiel:

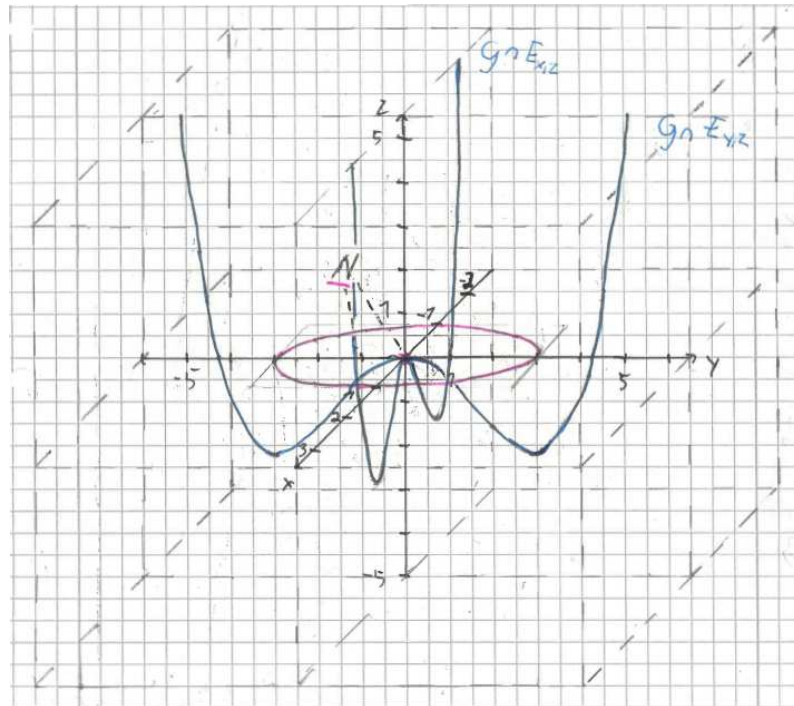
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ \text{Montecristo} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix} \right)^\top \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \text{Montecristo} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4 \end{smallmatrix} \right)^\top \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Punkte, an denen die entsprechenden Schnitte den sichtbaren Bereich verlassen, finden wir auf obige Weise jedoch nicht oder nur mit sehr viel Glück. Hier kann eine Art „Boxed plot“ – ähnlich dem von Mathematica oder Maple ausgegebenen – helfen: Hierzu skizziert man eine Box um den sichtbaren Ausschnitt des Koordinatensystems,

wobei sich die entsprechenden Eckpunkte aus den minimalen und maximalen Werten für x , y und z ergeben. In der folgenden Skizze deuten die gestrichelten Linien die Kanten des entsprechenden Quaders

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -2\sqrt{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\sqrt{2}, -6 \leq y \leq \frac{13}{2}, -5 \leq z \leq \frac{11}{2} \right\}$$

sowie dessen Schnitte mit den Koordinatenebenen an:



Frischhaltebox

Aufgabe H 115. Taylorpolynome

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Bestimmen Sie jeweils $T_n(f, x, x_0)$ für

(a) $x_0 = -3$, $n = 2$,
 $f(x) := e^{x-3}$

(b) $x_0 = 1$, $n = 42$,
 $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$f'(x) = e^{x-3} = f(x),$$

insbesondere also auch $f''(x) = f'(x) = e^{x-3}$. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_2(f, x, -3) &= e^{-6} + e^{-6}(x+3) + \frac{e^{-6}}{2}(x+3)^2 \\ &= \frac{1}{e^6} + \frac{1}{e^6}(x+3) + \frac{1}{2e^6}(x+3)^2 \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Wir nutzen die Exponentialreihe:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{x-3} = e^{-6} \cdot e^{x+3} = e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! e^6} (x+3)^n
 \end{aligned}$$

woraus wir

$$T_2(f, x, -3) = \frac{1}{e^6} + \frac{1}{e^6}(x+3) + \frac{1}{2e^6}(x+3)^2$$

ablesen.

(b) Es gilt

$$\begin{array}{rcl}
 & & f(1) = 0 \\
 f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 & \rightarrow f'(1) = 0 \\
 f''(x) &= 6x - 6 & \rightarrow f''(1) = 0 \\
 f'''(x) &= 6 & \rightarrow f'''(1) = 6 \\
 f^{(4)}(x) &= 0 & \rightarrow f^{(4)}(1) = 0
 \end{array}$$

Hieraus folgt offensichtlich $g^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 4$. Wir erhalten mit $\frac{6}{3!} = 1$

$$T_{42}(f, x, 1) = (x-1)^3$$

Alternativer Lösungsweg:

Wir nutzen den binomischen Lehrsatz:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen können wir direkt

$$T_{42}(f, x, 1) = (x-1)^3$$

angeben.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 116. (Minimale Differenz von Ober- und Untersummen – Analytische Version)^o

Sei $x_0 := 0$, $x_3 := 2$ und $f: [x_0, x_3] \rightarrow \mathbb{R}: \xi \mapsto 4\xi + 2$.

Auf der Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \right\}$ definieren wir die Funktion

$$d: M \rightarrow \mathbb{R}: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \overline{S}(f, \{x_0, x_1, x_2, x_3\}) - \underline{S}(f, \{x_0, x_1, x_2, x_3\})$$

- (a) Geben Sie mithilfe der Monotonie von f einen geschlossenen Ausdruck für $d(x)$ an.
 (b) Bestimmen Sie $\nabla d(x)$.
 (c) Bestimmen Sie $\text{Hd}(x)$.
 (d) Bestimmen Sie $\min d|_{M^\circ} = \min_{x \in M^\circ} d(x)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Begründung verwenden, dass ein Minimum existiert.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es gilt $f'(\xi) = 4 > 0$ für alle $\xi \in (x_0, x_3)$, f ist also monoton steigend. Für ein beliebiges Teilintervall $[a, b] \subseteq [x_0, x_3]$ gilt folglich: $\min_{\xi \in [a, b]} f(\xi) = f(a)$, $\max_{\xi \in [a, b]} f(\xi) = f(b)$. Wir erhalten für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} d(x) &= \overline{S}(f, \{x_0, x_1, x_2, x_3\}) - \underline{S}(f, \{x_0, x_1, x_2, x_3\}) \\ &= \left(\max_{\xi \in [x_0, x_1]} f(\xi) \cdot (x_1 - x_0) + \max_{\xi \in [x_1, x_2]} f(\xi) \cdot (x_2 - x_1) + \max_{\xi \in [x_2, x_3]} f(\xi) \cdot (x_3 - x_2) \right) \\ &\quad - \left(\min_{\xi \in [x_0, x_1]} f(\xi) \cdot (x_1 - x_0) + \min_{\xi \in [x_1, x_2]} f(\xi) \cdot (x_2 - x_1) + \min_{\xi \in [x_2, x_3]} f(\xi) \cdot (x_3 - x_2) \right) \\ &= (f(x_1) - f(x_0))(x_1 - x_0) + (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) + (f(x_3) - f(x_2))(x_3 - x_2) \\ &= (f(x_1) - 2)x_1 + (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) + (10 - f(x_2))(2 - x_2) \\ &= 4x_1^2 + 4(x_2 - x_1)^2 + 4(2 - x_2)^2 \end{aligned}$$

- (b) Mit (a) gilt:

$$\begin{aligned} \nabla d(x) &= \begin{pmatrix} 8x_1 - 8(x_2 - x_1) \\ 8(x_2 - x_1) - 8(2 - x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16x_1 - 8x_2 \\ 16x_2 - 8x_1 - 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (c) Mit (b) erhalten wir:

$$\text{Hd}(x) = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$$

- (d) Aufgrund des Hinweises wissen wir, dass ein Minimum existiert. Dieses muss, da M° offen ist, an einer kritischen Stelle liegen. Gelte also

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla d(x) = \begin{pmatrix} 16x_1 - 8x_2 \\ 16x_2 - 8x_1 - 16 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten aus $\partial_{x_1} d(x)$ die Bedingung $2x_1 = x_2$. Setzen wir dies in $\partial_{x_2} d(x)$ ein, ergibt sich:

$$0 = 32x_1 - 8x_1 - 16 = 24x_1 - 16,$$

also $x_1 = \frac{2}{3}$ und somit $x_2 = \frac{4}{3}$. Da dies die einzige kritische Stelle ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \min d|_{M^\circ} &= \min_{x \in M^\circ} d(x) = d\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

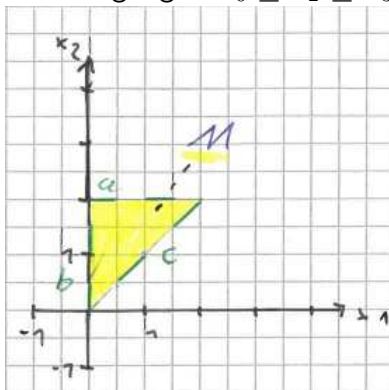
Aufgabe H 117. ∂ (Minimale Differenz von Ober- und Untersummen – Analytische Version)

Seien x_0, x_3, f, M und d wie in H 116. Wir erweitern den Begriff der Ober- und Untersumme und lassen auch zu, dass $x_0 = 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 2$ gelten.

- (a) Skizzieren Sie M in ein geeignetes Koordinatensystem.
 (b) Geben Sie mithilfe der Monotonie von f einen geschlossenen Ausdruck für $d(x)$ an.
 (c) Bestimmen Sie $\min d|_{\partial M} = \min_{x \in \partial M} d(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Aus den Bedingungen $x_0 \leq x_2 \leq x_3$ und $x_0 \leq x_1 \leq x_2$ erhalten wir folgende Skizze:



Zur Verdeutlichung, dass der Rand ∂M nicht zu M gehört, wurde dieser in einer anderen Farbe und mit unterbrochenen Linien dargestellt.

Die Seitennamen a, b und c des Dreiecks ∂M entsprechen hierbei der Benennung der Hilfsfunktionen in Teilaufgabe (c).

- (b) Es ist (vgl. H116)

$$d(x) = 4x_1^2 + 4(x_2 - x_1)^2 + 4(2 - x_2)^2$$

- (c) Wir machen eine Fallunterscheidung für die drei Seiten des Dreiecks ∂M :

$x_0 \leq x_1 \leq x_3, x_2 = x_3$: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h_a: [x_0, x_3] \mapsto \mathbb{R}: x_1 \mapsto d\left(\frac{x_1}{2}\right) = 4x_1^2 + 4(2 - x_1)^2$$

Mit

$$\frac{d}{dx_1} h_a(x_1) = 8x_1 - 8(2 - x_1) = 16x_1 - 16$$

erhalten wir $x_1 = 1$ als einzige kritische Stellen von $\min_{x_1 \in [0,2]} h_a(x_1)$. Mit

$$h_a(1) = 8, \quad h_a(0) = 16, \quad h_a(2) = 16$$

und dem Satz von Minimum und Maximum gilt $\min_{x_1 \in [0,2]} h_a(x_1) = 8$.

$\begin{matrix} x_0=x_1, \\ x_0 \leq x_2 \leq x_3 \end{matrix}$: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h_b : [x_0, x_3] \mapsto \mathbb{R} : x_2 \mapsto d \left(\begin{matrix} 0 \\ x_2 \end{matrix} \right) = 4x_2^2 + 4(2 - x_2)^2$$

Mit

$$\frac{d}{dx_2} h_b(x_2) = 8x_2 - 8(2 - x_2) = 16x_2 - 16$$

erhalten wir $x_2 = 1$ als einzige kritische Stellen von $\min_{x_2 \in [0,2]} h_b(x_2)$. Mit

$$h_b(1) = 8, \quad h_b(0) = 16, \quad h_b(2) = 16$$

und dem Satz von Minimum und Maximum gilt $\min_{x_2 \in [0,2]} h_b(x_2) = 8$.

$\begin{matrix} x_0 \leq x_1 \leq x_3, \\ x_2=x_1 \end{matrix}$: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h_c : [x_0, x_3] \mapsto \mathbb{R} : x_1 \mapsto d \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_1 \end{matrix} \right) = 4x_1^2 + 4(2 - x_1)^2$$

Dies ist die selbe Funktion wie h_a , womit wir sofort $\min_{x_1 \in [0,2]} h_c(x_1) = 8$ erhalten.

Zusammengefasst erhalten wir somit

$$\min_{x \in \partial M} d(x) = 8$$

Alternativer Lösungsweg: Wir hätten den Rand durchaus auch ohne Sonderbehandlung der Intervallränder und ohne Berechnung der Ableitungen obiger Hilfsfunktionen untersuchen können:

Sei h_a wie oben, dann gilt

$$h_a(x_1) = 4x_1^2 + 4(2 - x_1)^2 = 8x_1^2 - 16x_1 + 16 = 8(x_1 - 1)^2 + 8$$

Bei dieser Darstellung erkennen wir sofort, dass stets $h_a(x_1) \geq 8$ gilt mit Gleichheit für $x_1 = 1 \in [x_0, x_3]$, insbesondere also $\min_{x_1 \in [0,2]} h(x_1) = h(1) = 8$. Analoges gilt für h_b und h_c :

$$h_b(x_2) = 4x_2^2 + 4(2 - x_2)^2 = 8(x_2 - 1)^2 + 8$$

$$h_c(x_1) = 4x_1^2 + 4(2 - x_1)^2 = 8(x_1 - 1)^2 + 8$$

Analog zu oben folgt

$$\min_{x \in \partial M} d(x) = 8$$

Aufgabe H 118. Kritische Stellen und Extrema

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(e^{1-x^2} - 1 \right) (1 - y^4)$.

- Bestimmen Sie $\nabla f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ sowie die Menge $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \mathbf{0} \right\}$ der kritischen Stellen.
- Skizzieren Sie K sowie die Nullstellenmenge von f in ein Koordinatensystem. Kennzeichnen Sie ferner, welches Vorzeichen die Funktion in den von der Nullstellenmenge begrenzten Gebieten jeweils annimmt.
- Bestimmen Sie $Hf \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ und $Hf(\mathbf{0})$.
- Entscheiden Sie für jede kritische Stelle, ob ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt.

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Es gilt

$$\nabla f \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} -2xe^{1-x^2} (1-y^4) \\ -4y^3 (e^{1-x^2} - 1) \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung von K machen wir eine Fallunterscheidung anhand der Faktoren von f_y :

$y = 0$: In diesem Falle ist $f_x(x, y) = -2xe^{1-x^2}$, es folgt $x = 0$.

$y \neq 0$ In diesem Falle muss $x = \pm 1$ gelten und somit $f_x(x, y) = \mp 2(1 - y^4)$, es folgt $y = \pm 1$.

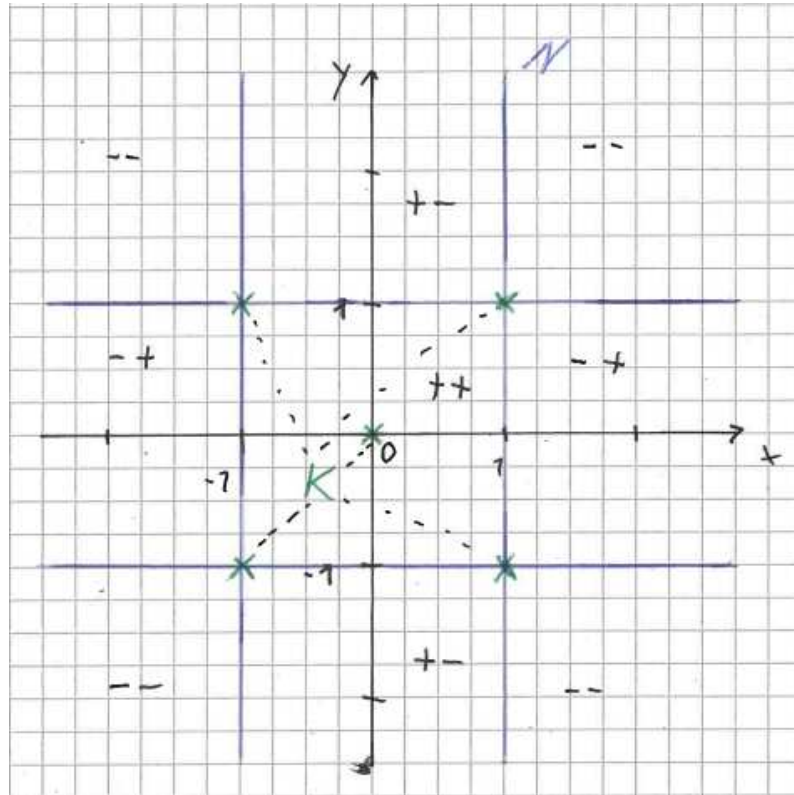
Die Menge der kritischen Stellen ergibt sich folglich als

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) f wird genau dann Null, wenn einer der beiden Faktoren $(e^{1-x^2} - 1)$ oder $(1 - y^4)$ Null wird. Hiermit erhalten wir als Nullstellenmenge $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$ als

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ oder } x = -1 \text{ oder } y = -1 \text{ oder } y = 1 \right\}$$

Es ergibt sich folgende Skizze:



Die Vorzeichen wurden – analog zu 4.5.12 – nach Faktoren getrennt eingetragen, das „Gesamtvorzeichen“ ergibt sich somit durch die „Rechenregeln“

$$„+“ \cdot „+“ = „-“ \cdot „-“ = „+“$$

$$„+“ \cdot „-“ = „-“ \cdot „+“ = „-“$$

(c) Die Hesse-Matrix lautet

$$Hf\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (4x^2 - 2)e^{1-x^2}(1-y^4) & 8xy^3e^{1-x^2} \\ 8xy^3e^{1-x^2} & -12y^2(e^{1-x^2} - 1) \end{pmatrix},$$

mithin gilt $Hf\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Anhand der Vorzeichen in unserer Skizze erkennen wir: In beliebig kleinen Umgebungen der kritischen Stellen $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt es sowohl Stellen, an denen f positive Werte annimmt, als auch solchen an denen f negative Werte annimmt, folglich liegen hier jeweils Sattelpunkte vor.

Im Inneren der kompakten Menge $Q := [-1, 1] \times [-1, 1]$ hingegen nimmt f nur positive Werte an. Da nach dem Satz vom Minimum und Maximum f auf Q ein Maximum annimmt, welches nicht auf dem Rand von Q liegen kann – es gilt $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ für alle Randpunkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \partial Q$, muss dieses im Inneren an einer kritischen Stelle angenommen werden. Da $\mathbf{0}$ die einzige Kritische Stelle in Q° ist, liegt dort ein Maximum vor.

Aufgabe H 119. Taylorpolynome

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie der Entwicklungspunkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\begin{aligned} \partial_{v_1}^2 f(a) &= 1 & , & & \partial_{v_2}^2 f(a) &= 2 & , & & \partial_{v_3}^2 f(a) &= 3 \\ \partial_{v_1} f(a) &= 1 & , & & \partial_{v_2 - v_3} f(a) &= 1 & , & & f(a) &= 4 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie $\nabla f(a)$ mit 4.3.12.
- (b) Bestimmen Sie $Hf(a)$ mit 4.4.9.
- (c) Geben Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, a)$ an.
- (d) Entscheiden Sie: Liegt in a ein Extremum vor? Wenn ja, welcher Art?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} := \nabla f(a)$. Mit 4.3.12. erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1^\top \\ (v_2 - v_3)^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{v_1} f(a) \\ \partial_{v_2} f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform hierzu lautet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

also ist $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (b) Aufgrund von $C^2(\mathbb{R}^2)$ existiert die Hesse-Matrix, welche wiederum symmetrisch ist. Wir können also $Hf(a) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix}$ mit $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ schreiben. Mit 4.4.9 erhalten wir – mit der Notation $v_j = \begin{pmatrix} v_j^{(1)} \\ v_j^{(2)} \end{pmatrix}$ (die Klammern verdeutlichen, dass hier keine Potenz, sondern ein Index gemeint ist) – somit aus den Bedingungen

$$j = v_j^\top Hf(a) v_j = h_1 \left(v_j^{(1)}\right)^2 + 2h_2 \left(v_j^{(1)} v_j^{(2)}\right) + h_3 \left(v_j^{(2)}\right)^2, \quad j = 1, 2, 3$$

das LGS

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile lesen wir $h_1 = \frac{1}{2}$, aus der letzten $h_3 = 3$ ab. Die erste Zeile wird nun zu $2 + 4h_2 + 3 = 1$, woraus wir $h_2 = -1$ und somit

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

erhalten.

- (c) Mit (a) und (b) gilt

$$\begin{aligned} T_2(f, x, a) &= f(a) + \partial_{x-a} f(a) + \frac{1}{2} \partial_{x-a}^2 f(a) \\ &= 4 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^\top \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 4 + \frac{1}{2} (x_1 - 1) + \frac{1}{4} (x_1 - 1)^2 - (x_1 - 1)x_2 + \frac{3}{2} x_2^2 \end{aligned}$$

- (d) Da der Gradient von f in a nicht der Nullvektor ist, kann in a kein Extremum vorliegen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 120. Ebenen

Gegeben seien die Punkte $P_1 = (1, 0, 1)^\top$, $P_2 = (9, 9, 13)^\top$ und $P_3 = (-8, -8, 13)^\top$. Sei E die Ebene mit $P_1, P_2, P_3 \in E$. Bestimmen Sie

- (a) eine Parameterdarstellung von E . (b) die Hesse-Normalform von E .

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Mit $v = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $w = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$ ergibt sich eine Parameterdarstellung gemäß Definition 2.8.3 (LAG) als

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(b) Wir berechnen einen Normalenvektor n als

$$\eta = v \times w = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 \\ -204 \\ 17 \end{pmatrix} = 17 \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$n := \frac{\eta}{|\eta|} = \frac{1}{|(12, -12, 1)^T|} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{289}} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten den Abstand d zum Ursprung mittels

$$\langle n | P \rangle = \left\langle \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{13}{17} = d,$$

die Hesse-Normalform lautet somit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{12}{17}x_1 - \frac{12}{17}x_2 + \frac{1}{17}x_3 = \frac{13}{17} \right\}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 121. *Seltene Extrema unter Nebenbedingungen*

Gegeben seien die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{4}x_1^3 - \frac{1}{4}x_2^3 + 10$ und

$g: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{8} - \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\nabla g(x)$.

(b) Sei $D = \{x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid g(x) = 0\}$. Die Einschränkung $f|_D$ nimmt ein relatives Minimum sowie ein relatives Maximum an. Bestimmen Sie diese.

Hinweis: D besteht aus vier verschiedenen „Ästen“ (einer pro Quadrant) welche die Punkte $\begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ enthalten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es sind

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ -3x_2^2 \end{pmatrix}$$
$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_1^3} \\ \frac{2}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

(b) Wir stellen mit (a) das Lagrange-System auf:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 3x_1^2 + \lambda \cdot \frac{2}{x_1^3} &= 0 \\ \text{(II)} \quad -3x_2^2 + \lambda \cdot \frac{2}{x_1^3} &= 0 \\ \text{(III)} \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

Da infolge der Nebenbedingung $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ gelten, können wir die Gleichungen mit diesen beiden Variablen multiplizieren, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert. Multiplizieren wir (I) mit x_1^3 , (II) mit x_2^3 und (III) mit $8x_1^2x_2^2$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{(I')} \quad 3x_1^5 + 2\lambda &= 0 \\ \text{(II')} \quad -3x_2^5 + 2\lambda &= 0 \\ \text{(III')} \quad x_1^2x_2^2 - 8x_2^2 - 8x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Aus (I')-(II') folgt $x_1^5 + x_2^5 = 0$ und somit $x_2 = -x_1$. Setzen wir dies in (III') ein, ergibt sich:

$$0 = x_1^4 - 16x_1^2 = x_1^2(x_1^2 - 16)$$

Hieraus folgt mit $x_1 \neq 0$, dass $x_1 = -4$ oder $x_1 = 4$ gelten. Wir erhalten die kritischen Stellen $P_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. (Die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren wären $\lambda_1 = 1536$ und $\lambda_2 = -1536$.)

existieren. Da der Gradient $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} \\ \frac{2}{x^3} \\ \frac{2}{x^3} \end{pmatrix}$ nicht $\mathbf{0}$ werden kann, müssen diese an kritischen Stellen angenommen werden. Da wir nur zwei solche erhalten haben, müssen wir nur noch entscheiden, an welcher ein relatives Minimum und an welcher ein relatives Maximum vorliegt. (Würde an einer Stelle beides vorliegen, müsste f auf dem entsprechenden Ast konstant sein. Wie wir am Vergleich der Funktionswerte sehen werden, kann dieser Fall nicht eintreten.)

P_1 : Die kritische Stelle P_1 liegt im 2. Quadranten und damit auf dem selben Ast wie $\begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$. Ein Vergleich der Funktionswerte zeigt

$$f\left(\begin{matrix} -4 \\ 4 \end{matrix}\right) = -16 - 16 + 10 = -22$$

$$f\left(\begin{matrix} -6\sqrt{2} \\ 3 \end{matrix}\right) = \frac{-216 \cdot 2\sqrt{2}}{4} - \frac{27}{4} + 10 = -108\sqrt{2} - \frac{27}{4} + 10 < -22 = f(P_1),$$

d. h. f nimmt auf diesem Ast nur kleinere Werte als in P_1 an, andernfalls müssten weitere kritische Stellen existieren. Somit liegt in P_1 ein relatives Maximum mit Wert $f(P_1) = -22$ vor.

P_2 : Aus analogen Gründen – es ex. nur eine einzige kritische Stelle im Quadranten – kann f auf dem entsprechenden Ast, der im 4. Quadranten liegt, nur Werte annehmen, die entweder alle größer als $f(P_2)$ oder alle kleiner als $f(P_2)$ sind. Ein Vergleich der Funktionswerte von P_2 mit $\begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$, welches auf dem entsprechenden Ast liegt, zeigt

$$f\left(\begin{matrix} 4 \\ -4 \end{matrix}\right) = 16 + 16 + 10 = 42$$

$$f\left(\begin{matrix} 6\sqrt{2} \\ -3 \end{matrix}\right) = 108\sqrt{2} + \frac{27}{4} + 10 > 42 = f(P_2),$$

d. h. f nimmt in P_2 ein relatives Minimum mit Wert $f(P_2) = 42$ an.

Bemerkung: Dass das einzige relative Minimum größer ist als das einzige relative Maximum, liegt daran, dass die Menge D nicht kompakt ist.

Bei kompakten Mengen kann es auch vorkommen, dass an einem relativen Minimum ein größerer Wert als an einem relativen Maximum angenommen wird, aber in dem Fall müssen mehr als zwei Extremstellen existieren: Aufgrund der Kompaktheit existiert ein absolutes Minimum m und ein absolutes Maximum M , welche natürlich $m \leq M$ erfüllen (und als absolute Extrema natürlich insbesondere relative Extrema sind).

Aufgabe H 122. Extrema mit Lagrange

Gegeben seien die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2y$ und

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - y^4 + 3y^3 - 2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x^2y.$$

Wir suchen die Extrema von f auf $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$.

(a) Stellen Sie das Lagrange-System auf.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen.

(c) Geben Sie an, an welchen Stellen $f|_D$ das absolute Minimum/Maximum annimmt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass D beschränkt ist.

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Das Lagrange-System lautet:

$$(I) \quad \lambda \cdot (-2x^3 - xy^2 + 4xy) = 0$$

$$(II) \quad 2 + \lambda \cdot (-4y^3 + 9y^2 - 4y - x^2y + 2x^2) = 0$$

$$(III) \quad -\frac{1}{2}x^4 - y^4 + 3y^3 - 2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x^2y = 0$$

(b) Wir lösen das System aus (a), wobei wir in (I) zuerst x ausklammern:

$$(I) \quad \lambda \cdot x \cdot (-2x^2 - y^2 + 4y) = 0$$

$$(II) \quad 2 + \lambda \cdot (-4y^3 + 9y^2 - 4y - x^2y + 2x^2) = 0$$

$$(III) \quad -\frac{1}{2}x^4 - y^4 + 3y^3 - 2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x^2y = 0$$

Nun können wir eine Fallunterscheidung machen:

 $x = 0$: In diesem Falle erhalten wir das System

$$(I') \quad 0 = 0$$

$$(II') \quad 2 + \lambda \cdot (-4y^3 + 9y^2 - 4y) = 0$$

$$(III') \quad -y^4 + 3y^3 - 2y^2 = 0$$

Die Gleichung

$$0 = -y^4 + 3y^3 - 2y^2 = -y^2(y^2 - 3y + 2)$$

hat nur die Lösungen $y = 0$, $y = 1$ und $y = 2$, wobei $y = 0$ wegen der zweiten Gleichung nicht möglich ist. Wir erhalten die kritischen Stellen $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren wären $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

 $x \neq 0$: In diesem Falle erhalten wir nach Division von (I) durch x und λ – der Fall $\lambda = 0$ widerspräche (II) – das System

$$(I') \quad (-2x^2 - y^2 + 4y) = 0$$

$$(II) \quad 2 + \lambda \cdot (-4y^3 + 9y^2 - 4y - x^2y + 2x^2) = 0$$

$$(III) \quad -\frac{1}{2}x^4 - y^4 + 3y^3 - 2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x^2y = 0$$

Aus (I') erhalten wir $x^2 = 2y - \frac{1}{2}y^2$, was wir nun in (III) einsetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \left(2y - \frac{1}{2}y^2 \right)^2 - y^4 + 3y^3 - 2y^2 - \frac{1}{2} \left(2y - \frac{1}{2}y^2 \right) y^2 + 2 \left(2y - \frac{1}{2}y^2 \right) y \\ &= -\frac{1}{2} \left(4y^2 - 2y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right) - y^4 + 3y^3 - 2y^2 - y^3 + \frac{1}{4}y^4 + 4y^2 - y^3 \\ &= -\frac{7}{8}y^4 + 2y^3 \end{aligned}$$

Da $y = 0$ wegen (II) nicht infrage kommen kann, erhalten wir $y = \frac{16}{7}$. Da dies keine Nullstelle von $y(-4y^2 + 9y - 4)$ ist, ist II damit lösbar, es existiert also auch ein Lagrange-Multiplikator. Wir erhalten mit $x^2 = 2y - \frac{1}{2}y^2$ die kritischen Stellen

$$P_3 = \left(-\frac{4\sqrt{6}}{7}, \frac{16}{7} \right), \quad P_4 = \left(\frac{4\sqrt{6}}{7}, \frac{16}{7} \right)$$

- (c) D ist gemäß dem Hinweis beschränkt und g stetig, daher ist D kompakt. Insbesondere existieren infolge der Stetigkeit von f das absolute Minimum und das absolute Maximum von f auf D . Als Extremalstellen kommen hierbei nur kritische Stellen oder Stellen, an denen ∇g verschwindet, infrage. Kandidaten der ersten Art haben wir bereits bestimmt, letzteres müssen wir noch überprüfen. Hierbei nutzen wir, dass wir in (b) alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, für die $f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ und $y \neq 0$ gelten, als kritische Stellen erhalten haben. Wir müssen also nur den Fall $y = 0$ überprüfen. In diesem Falle vereinfacht sich $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zu

$$g\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}x^4 = 0$$

Hieraus folgt $x = 0$, $\mathbf{0}$ ist also in D und kommt – wegen $\nabla g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ als Extremalstelle ebenfalls in Frage, weitere Kandidaten existieren nicht. Ein Vergleich der Funktionswerte von f an den entsprechenden Stellen – welche den doppelten y -Werten entsprechen – zeigt: $f|_D$ nimmt in $\mathbf{0}$ das absolute Minimum an, in $\begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{6}}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{6}}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$ das absolute Maximum.

Aufgabe H 123. Extrema unter Nebenbedingungen in \mathbb{R}^3

Wir betrachten die Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1-\frac{1}{2}(x_3+1)^2}{1+x_1^2} - x_2^2$ und $g_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x_2$ sowie $g_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0\}$.

- (a) Bestimmen Sie $Jg(x)$ für $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$.
- (b) Finden Sie die kritischen Stellen von $f|_M$ mit Lagrange.
- (c) Finden Sie alle möglichen Extremalstellen von $f|_M$, indem Sie M parametrisieren.
- (d) Geben Sie $\min_{x \in M} f(x)$ und $\max_{x \in M} f(x)$ an.

Hinweis: Sowohl bei (b) als auch (c) kann $1 + x_1^2 = 2 - x_3^2$ zur Vereinfachung helfen.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es gilt mit $g(x) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

(b) Wir stellen mit (a) das Lagrange-System auf:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \frac{-x_1(2-(x_3+1)^2)}{(1+x_1^2)^2} + 0 + \lambda_2 \cdot 2x_1 = 0 \\
 \text{(II)} \quad & -2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2x_2 = 0 \\
 \text{(III)} \quad & -\frac{x_3+1}{1+x_1^2} + 0 + \lambda_2 \cdot 2x_3 = 0 \\
 \text{(IV)} \quad & x_2 = 0 \\
 \text{(V)} \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

welches wir mit (IV) schnell vereinfachen können zu

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \frac{-x_1(2-(x_3+1)^2)}{(1+x_1^2)^2} + 0 + \lambda_2 \cdot 2x_1 = 0 \\
 \text{(II')} \quad & \lambda_1 = 0 \\
 \text{(III)} \quad & -\frac{x_3+1}{1+x_1^2} + 0 + \lambda_2 \cdot 2x_3 = 0 \\
 \text{(IV)} \quad & x_2 = 0 \\
 \text{(V')} \quad & x_1^2 + 0 + x_3^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

$x_1 = 0$: In diesem Falle folgt aus (V) sofort $x_3 = \pm 1$, wir erhalten die kritischen Stellen

$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren wären $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ bzw. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$.

$x_2 \neq 0$: Wir teilen die erste Zeile durch $-x_1$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \text{(I')} \quad & \frac{2-(x_3+1)^2}{(1+x_1^2)^2} + 0 + -2\lambda_2 = 0 \\
 \text{(II')} \quad & \lambda_1 = 0 \\
 \text{(III)} \quad & -\frac{x_3+1}{1+x_1^2} + 0 + \lambda_2 \cdot 2x_3 = 0 \\
 \text{(IV)} \quad & x_2 = 0 \\
 \text{(V')} \quad & x_1^2 + 0 + x_3^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

und somit $2\lambda_2 = \frac{2-(x_3+1)^2}{(1+x_1^2)^2}$. Nutzen wir ferner, dass aus (V) $1 + x_1^2 = 2 - x_3^2$ folgt, erhalten wir durch Einsetzen in (III)

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{x_3+1}{1+x_1^2} + x_3 \cdot \frac{2-(x_3+1)^2}{(1+x_1^2)^2} \\
 &= \frac{-(x_3+1)(2-x_3^2) + 2x_3 - x_3(x_3^2 + 2x_3 + 1)}{(1+x_1^2)^2} \\
 &= \frac{-2x_3 - 2 + x_3^3 + x_3^2 + 2x_3 - x_3^3 - 2x_3^2 - x_3}{(1+x_1^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-2 - x_3^2 - x_3}{(1 + x_1^2)^2}$$

Da die Polynomfunktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: u \mapsto -u^2 - u - 2$ wegen $(-1)^2 - 4(-1)(-2) = -7 < 0$ keine reellen Nullstellen hat, ist das System für $x_1 \neq 0$ unlösbar, es existieren keine weiteren kritischen Stellen.

(c) Mit $0 = g_1(x) = x_2$ vereinfacht sich $g_2(x) = 0$ zu

$$x_1^2 + x_3^2 - 1 = 0,$$

M beschreibt den Einheitskreis in der x_1 - x_3 -Ebene. Wir erhalten als eine Parametrisierung

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Somit gilt mit dem Hinweis

$$\begin{aligned} (f \circ C)(t) &= \frac{1 - \frac{1}{2}(\sin(t) + 1)^2}{1 + (\cos(t))^2} \\ \frac{d}{dt}(f \circ C)(t) &= \frac{-(\sin(t) + 1)\cos(t)(1 + (\cos(t))^2) + (2 - (\sin(t) + 1)^2)\cos(t)\sin(t)}{(1 + (\cos(t))^2)^2} \\ &= \cos(t) \cdot \frac{-(\sin(t) + 1)(2 - (\sin(t))^2) + 2\sin(t) - (\sin(t) + 1)^2\sin(t)}{(1 + (\cos(t))^2)^2} \\ &= \cos(t) \cdot \frac{-2 + (\sin(t))^3 + (\sin(t))^2 - ((\sin(t))^2 + 2\sin(t) + 1)\sin(t)}{(1 + (\cos(t))^2)^2} \\ &= \cos(t) \cdot \frac{-2 - (\sin(t))^2 - \sin(t)}{(1 + (\cos(t))^2)^2} \end{aligned}$$

Wie bereits festgestellt hat die Polynomfunktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: u \mapsto -u^2 - u - 2$ keine reellen Nullstellen, also kann der Bruch nicht 0 null werden. Folglich sind die einzigen Nullstellen der Ableitung $t_1 = \frac{\pi}{2}$ und $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Die mögliche Extremalstellen von $f|_M$ sind somit

$$\begin{aligned} P_1 &= C(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_2 &= C\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ P_3 &= C\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ P_4 &= C(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1 \end{aligned}$$

- (d) Wir nutzen (a)+(b). Mit (a) erkennen wir, dass $Jg(x)$ nur für $x_1 = x_3 = 0$ nicht vollen Rang hat. Da aber für $x \in M$ wegen $g_1(x) = 0$ die Gleichung $x_1^2 + x_3^2 - 1 = 0$ gilt, kann dieser Fall in M nicht eintreten, d. h. alle Extremalstellen müssen, sofern solche existieren, kritische Stelle sein.

Da M wegen $g_2(x) = |x|^2 - 1 \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty$ beschränkt ist, ist auch besagte Existenz gewährleistet. Folglich müssen wir nur noch f an den kritischen Stellen vergleichen:

$$f(K_1) = 1, \quad f(K_2) = -1.$$

Wir erhalten somit $\min_{x \in M} f(x) = -1$ und $\max_{x \in M} f(x) = 1$.

Alternativer Lösungsweg mit (c):

Da wir für M eine Parametrisierung $C: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gefunden haben, so dass I ein kompaktes Intervall ist, müssen Minimum und Maximum von $f|_M$ existieren: f nimmt auf M genau die Werte an, welche $f \circ C$ auf I annimmt!

Wir setzen die in (c) erhaltenen Kandidaten für Extremalstellen in f ein:

$$\begin{aligned} f(P_1) &= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{1}{4} = f(P_4) \\ f(P_2) &= \frac{1 - \frac{1}{2}(1 + 1)^2}{1 + 0} = -1 \\ f(P_3) &= \frac{1 - \frac{1}{2}(-1 + 1)^2}{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

Somit gelten $\min_{x \in M} f(x) = -1$ und $\max_{x \in M} f(x) = 1$.

Aufgabe H 124. Extrema in Halbräumen

Gegen sei die Menge $D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x \right\rangle \geq 2 \right\}$ sowie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -|x|^2 - (x_1 - 4)x_1$$

- (a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $E := \partial D$.
 (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f|_E$ mit einem geeigneten Gleichungssystem.
 (c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse in (b) mithilfe von (a).
 (d) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Einschränkung $f|_D: D \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$.

Zusatz: Können Sie entscheiden, ob diese Extrema auch absolut sind?

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Der Rand ∂D ist die Ebene $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x \right\rangle = 2 \right\}$.

Durch Einsetzen/Raten erkennen wir, dass die Punkte $P_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ in E liegen. Wir erhalten die Parameterdarstellung:

$$E: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

(b) Der Gradient von $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{3}(2 \ -1 \ 3)x - 2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 2$ ist gegeben durch $g(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, insbesondere wird er nie null. Alle Extremalstellen sind also kritische Stellen. Wir nutzen $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ und stellen das Lagrange-System auf:

$$(I) \quad -4x_1 + 4 + \lambda \cdot \frac{2}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$(II) \quad -2x_2 + \lambda \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \quad | \cdot 3$$

$$(III) \quad -2x_3 + \lambda \cdot \frac{2}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$(IV) \quad \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 2 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$(I') \quad -12x_1 + 12 + 2\lambda = 0$$

$$(II') \quad -6x_2 - \lambda = 0$$

$$(III') \quad -6x_3 + 2\lambda = 0$$

$$(IV') \quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 6 = 0$$

Wir erhalten mit das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$Z_2 + 6Z_1 : \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 12 & 2 & 24 \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$Z_3 - Z_2 : \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 12 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$2 \cdot Z_4 - Z_3 : \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 12 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 24 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -Z_2 - Z_3 : \\ -7 \cdot Z_3 - 3 \cdot Z_4 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 84 & 0 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 24 \end{array} \right]$$

$$7 \cdot Z_2 - Z_4 \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 42 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 84 & 0 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 24 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 42 \cdot Z_1 + 7 \cdot Z_2 - Z_3 : \\ 7 \cdot Z_2 - Z_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 84 & 0 & 0 & 0 & 132 \\ 0 & 42 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 84 & 0 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 24 \end{array} \right]$$

Womit wir $x_K := \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$ als einzige kritische Stelle erhalten. Es kann somit maximal ein Extremum von $f|_E$ geben.

Dass in der kritischen Stelle tatsächlich ein Extremum vorliegt, und es sich hierbei um ein lokales Maximum handelt, sehen wir wie folgt: Es gilt

$$\begin{aligned} f(x_K) &= -\frac{1}{49} (11^2 + 4^2 + 8^2) - \left(-\frac{17}{7}\right) \frac{11}{7} \\ &= -\frac{14}{49} = -\frac{2}{7} \\ f(x) &= -|x|^2 - x_1^2 + 4x_1 - 4 + 4 \\ &= -|x|^2 - (x_1 - 2)^2 + 4 \\ &\leq -|x|^2 + 4 \end{aligned} \tag{17}$$

Sei nun $r := 3 + |x_K| = 3 + \frac{\sqrt{201}}{7}$ und $M := E \cap \overline{U_r(x_K)}$. Dann gelten:

- $x_K \in M$
- Für beliebiges $x \in \partial M$ gilt:

$$r = |x - x_K| \leq |x| + |x_K|$$

insbesondere also

$$|x| \geq r - |x_K| = 3 \tag{18}$$

- M ist kompakt, insbesondere nimmt f auf M ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum an. Wegen

$$f(x) \leq -|x|^2 + 4 \stackrel{(17)}{\leq} -5 < f(x_K)$$

für $x \in \partial M$ muss das Maximum im Inneren von M an einer Stelle x_0 angenommen werden.

Aufgrund der Definition von M sind aber lokale Extrema von $f|_M$ im Inneren lokale Extrema von $f|_E$. Da x_K die einzige kritische Stelle von $f|_E$ ist, muss also $x_0 = x_K$ gelten, insbesondere liegt hier ein lokales Maximum von $f|_E$ vor.

(c) Wir bestimmen die Extrema der Funktion

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 3-3s-3t \\ -6s \\ 3t \end{pmatrix}\right) \\ &= -((3-3s-3t)^2 + 36s^2 + 9t^2) - (-1-3s-3t)(3-3s-3t) \\ &= -(45s^2 + 18st - 18s + 18t^2 - 18t + 9) - (9s^2 + 18st - 6s + 9t^2 - 6t - 3) \\ &= -54s^2 - 36st + 24s - 27t^2 + 24t - 6 \end{aligned}$$

und folglich

$$\nabla \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -108s - 36t + 24 \\ -36s - 54t + 24 \end{pmatrix}$$

Aus $\nabla \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = 0$ erhalten wir somit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und somit die kritische Stelle $\begin{pmatrix} \frac{2}{21} \\ \frac{8}{21} \end{pmatrix}$. Wegen

$$\mathbf{H}\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -108 & -36 \\ -36 & -54 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{H}\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{21} \\ \frac{8}{21} \end{pmatrix}\right)\right) &= 7128 > 0 \\ \text{Sp}\left(\mathbf{H}\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{21} \\ \frac{8}{21} \end{pmatrix}\right)\right) &= -162 < 0 \end{aligned}$$

Nach 4.5.8 hat \tilde{f} in $\begin{pmatrix} \frac{2}{21} \\ \frac{8}{21} \end{pmatrix}$ folglich ein lokales Maximum, womit $f|_E$ in

$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{21} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{21} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

ein lokales Maximum hat.

Bemerkung: Die Argumentation auf Basis der Hessematrix ist nur auf die Funktion \tilde{f} anwendbar, da wir für diese lokale Minimierer in \mathbb{R}^2 , also insbesondere ohne Nebenbedingung suchen. Für $f|_E$ selbst können wir diese nicht verwenden.

- (d) Sei x_K die kritische Stelle aus (b) und $r := 3 + |x_K| = 3 + \frac{\sqrt{201}}{7}$. Zuerst untersuchen wir, ob es lokale Extrema im Inneren von D , also $D \setminus E$ gibt. Die eindeutige Lösung \tilde{x} von

$$\mathbf{0} = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} -4x_1 + 4 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix},$$

ist ablesbar, es gilt $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\left\langle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{3} < 2$ liegt \tilde{x} nicht in D ,

kommt also als relatives Extremum nicht in Betracht.

Lokale Extrema von $f|_D$ können also nur auf dem Rand E liegen. Da ein solches insbesondere ein relatives Extremum von $f|_E$ ist, ist x_K aus (b) die einzige mögliche Extremalstelle. Analog zu (b) definieren wir $r := 3 + \frac{\sqrt{201}}{7}$ und $\widetilde{M} := D \cap \overline{U_r(x_K)}$. Dann gelten:

- $x_K \in \widetilde{M}$
- \widetilde{M} ist kompakt, insbesondere nimmt f auf \widetilde{M} ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum an. Da aber im inneren keine kritischen Punkte existieren, müssen diese auf dem Rand liegen.

Wir teilen den Rand von \widetilde{M} in zwei Stücke:

- $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \partial\widetilde{M} \text{ und } x \notin E\}$: Analog zu (b) gilt

$$|x| \geq r - |x_K| = 3,$$

und somit

$$f(x) \leq -|x|^2 + 4 \leq -5 < f(x_K),$$

auf diesem Randstück kann das Maximum nicht liegen.

- $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \partial\widetilde{M} \text{ und } x \in E\}$: Dieses Randstück ist genau $M = E \cap \overline{U_r(x_K)}$. Da auf diesem Randstück das Maximum von $f|_{\widetilde{M}}$ liegen muss und dieses insbesondere ein lokales Extremum von $f|_E$ ist, muss das absolute Maximum von $f|_{\widetilde{M}}$ in x_K angenommen werden. Aufgrund der Konstruktion von \widetilde{M} folgt: In x_K liegt ein lokales Maximum von $f|_D$ vor.

Zusatz: Für (b) und (d) können wir diese Frage durch unsere Argumentation mit geeigneten Umgebungen sehr schnell beantworten: Wie bereits festgestellt liegt in x_K das absolute Maximum der Einschränkungen $f|_M$ bzw. $f|_{\widetilde{M}}$ mit $M = E \cap \overline{U_r(x_K)}$ und $\widetilde{M} = D \cap \overline{U_r(x_K)}$. Ist nun $x \in E \setminus M$ bzw. $x \in D \setminus \widetilde{M}$, folgt aufgrund der Definition dieser Mengen

$$|x| \geq |x - x_K| - |x_K| \geq r - |x_K| = 3$$

und somit

$$f(x) \leq -|x|^2 + 4 \leq -5 < f(x_K),$$

folglich befindet sich in x_K jeweils das absolute Maximum.

Für (c) nutzen wir den Algorithmus der Hauptachsentransformation. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\tilde{f}\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) &= -54s^2 - 36st + 24s - 27t^2 + 24t - 6 \\ &= 3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} s & t \end{smallmatrix} \right) \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - 2\end{aligned}$$

Wir betrachten daher die quadratische Form $q(u) = u^\top Au + 2a^\top x + c$ mit

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \\ a &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ c &= -2\end{aligned}$$

Die EW von A sind $\lambda_1 = -21$ und $\lambda_2 = -6$, zugehörige EV sind $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, womit wir mit Hilfe der Transformationsmatrix $F := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ die Darstellung

$$\tilde{q}(y) = y^\top \tilde{A}y + 2\tilde{a}^\top y + c$$

mit

$$\begin{aligned}y &= Fx \\ \tilde{A} &= F^\top AF = \begin{pmatrix} -21 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\ \tilde{a} &= F^\top a = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\tilde{q}(y) &= -21y_1^2 - 6y_2^2 + 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{5}}y_1 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}y_2 - 2 \\ &= -21 \left(y_1 - \frac{4}{7\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{48}{35} - 6 \left(y_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{8}{15} - 2 \\ &= -21 \left(y_1 - \frac{4}{7\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{48}{35} - 6 \left(y_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{8}{15} - 2 \\ &= -21 \left(y_1 - \frac{4}{7\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{48}{35} - 6 \left(y_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{8}{15} - \frac{2}{21}\end{aligned}$$

Wir betrachten nun – wegen $F \begin{pmatrix} \frac{4}{7\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} \\ \frac{8}{21} \end{pmatrix}$ – das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{21} \\ \frac{8}{21} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right)$$

Dann gilt mit obigen sowie $z = {}_{\mathbb{F}}\text{id}_{\mathbb{E}}\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$:

$$\left(\tilde{f} \circ {}_{\mathbb{E}}\text{id}_{\mathbb{F}}\right)(z) = -63z_1^2 - 18z_2^2 - \frac{2}{11}$$

Wir erkennen sofort:

$$\left(\tilde{f} \circ {}_{\mathbb{E}}\text{id}_{\mathbb{F}}\right)(z) \leq \left(\tilde{f} \circ {}_{\mathbb{E}}\text{id}_{\mathbb{F}}\right)(\mathbf{0}) = -\frac{2}{11}$$

Wegen $z = {}_{\mathbb{F}}\text{id}_{\mathbb{E}}\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$ sehen wir, dass \tilde{f} in ${}_{\mathbb{E}}\text{id}_{\mathbb{F}}(\mathbf{0}) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{2}{21} \\ \frac{8}{21} \end{smallmatrix}\right)$ ein globales Maximum hat.

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos(2x) \cos(x) \, dx$

(b) $\int_1^2 \frac{x}{(\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}} \, dx$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen das Additionstheorem:

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos(2x) \cos(x) \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{16} \cos(4x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(b) Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} \frac{x}{(\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}} &= \frac{x}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{x}{x^{\frac{1}{8}}} \\ &= x^{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

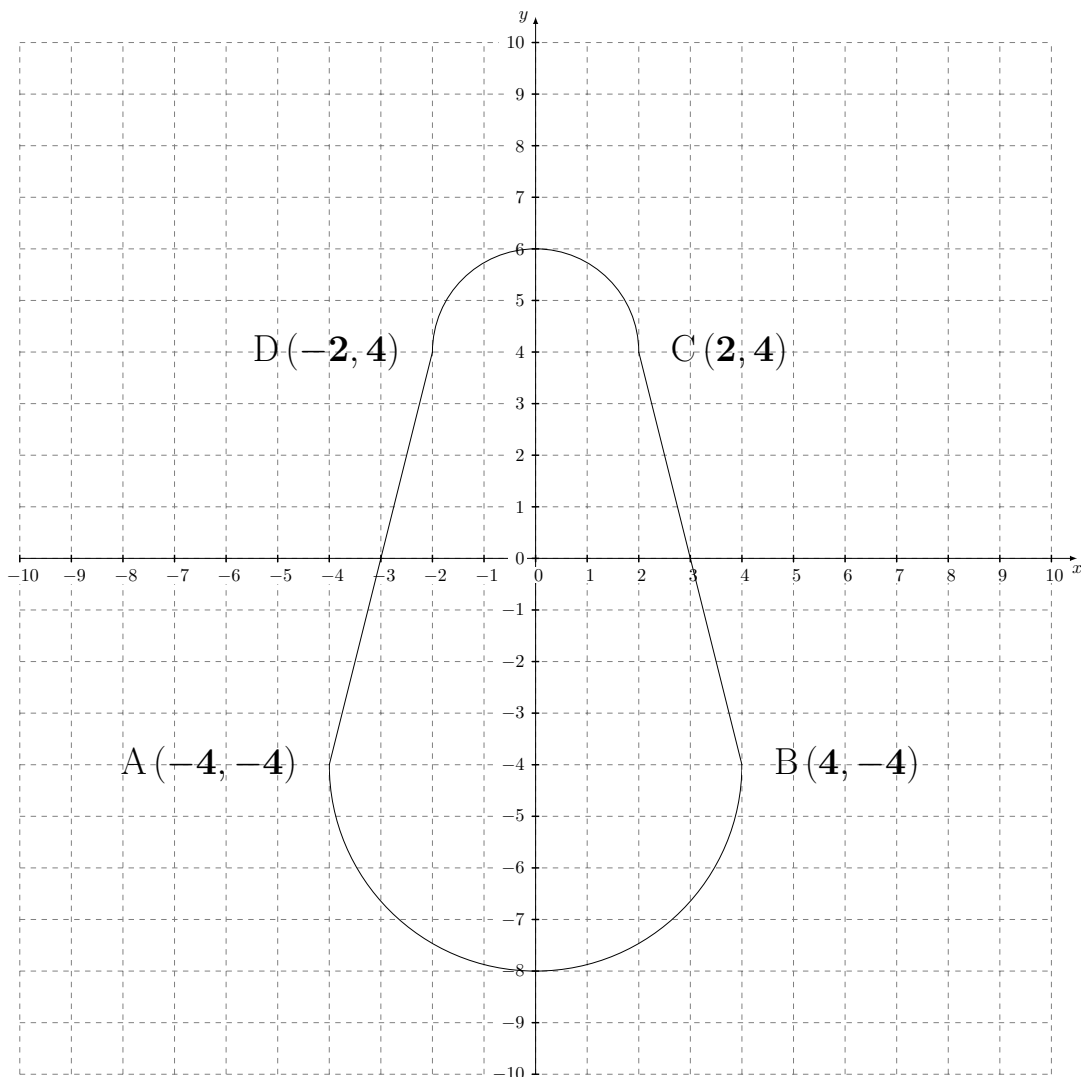
Es folgt, dass für das Integral gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{(\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}} x \, dx &= \int_1^2 x^{\frac{7}{8}} \, dx \\ &= \left[\frac{8}{15} x^{\frac{15}{8}} \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{15} 2^{\frac{15}{8}} - \frac{8}{15} \\ &= \frac{8}{15} \left(2^{\frac{15}{8}} - 1 \right).\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 126. Eine Parametrisierung für eine zusammengesetzte Kurve

Wir betrachten im Folgenden die gezeigte Kurve, welche aus zwei Halbkreisen und zwei geraden Strecken besteht.



- Bestimmen Sie für jede Teilkurve (Halbkreise und Strecken) eine geeignete Parametrisierung.
- Stellen Sie sicher, dass jeweils zwei verschiedene ihrer gewählten Parametrisierungen an den Randpunkten (A , B , C und D) übereinstimmen.
- Welche Längen haben die Teilkurven? Welche Länge hat die Gesamtkurve?

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir beginnen zunächst mit den beiden Halbkreisen. Wir wissen, dass eine Parametrisierung für einen Kreis gegeben ist durch

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto r_0 + R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

wobei $r_0 \in \mathbb{R}^2$ der Kreismittelpunkt und $R \in \mathbb{R}^+$ der Radius ist. Hieraus erhalten wir direkt die Parametrisierung für die beiden Halbkreise: Für den oberen (kleineren) Halbkreis ist $r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $R = 2$. Der Definitionsbereich der Laufvariable muss hierbei auf $[0, \pi]$ eingeschränkt werden. Somit ist die Parametrisierung

$$\gamma_{\text{oben}}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Für den anderen Halbkreis können wir analog vorgehen. Wir erhalten

$$\gamma_{\text{unten}}: [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Die beiden Strecken können durch Geraden beschrieben werden. Die Geradengleichungen lauten

$$\gamma_{\text{rechts}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 4-2t \\ -4+8t \end{pmatrix}. \quad (22)$$

und

$$\gamma_{\text{links}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} -2-2t \\ 4-8t \end{pmatrix}. \quad (23)$$

- (b) Die in der vorherigen Teilaufgabe definierten Parametrisierungen erfüllen genau die Bedingung.
 (c) Wir rechnen die Länge der Strecke aus und erhalten

$$L = \sqrt{(2-4)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{68} \quad (24)$$

Die Länge der Halbkreise ergibt sich aus dem Umfang des jeweiligen Halbkreises. Für den Umfang gilt $U = R\pi$. Wir erhalten $L_{\text{gesamt}} = 2\pi + 4\pi + 2\sqrt{68} = 6\pi + 2\sqrt{68}$.

Aufgabe H 127. Wenn wir manche Sätze schon nicht komplett beweisen...

Seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto xyz$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \exp(x^2 + y^2 + z^2)$. Berechnen Sie ohne Lemma 4.8.1 zu nutzen:

- (a) $\text{grad}(f + g)$
- (b) $\text{grad}(fg)$
- (c) $\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}(xyz + \exp(x^2 + y^2 + z^2)) \quad (25)$$

$$= \begin{pmatrix} yz + 2x \exp(x^2 + y^2 + z^2) \\ xz + 2y \exp(x^2 + y^2 + z^2) \\ xy + 2z \exp(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix} \quad (26)$$

(b)

$$\text{grad}(fg) = \text{grad}(xyz \exp(x^2 + y^2 + z^2)) \quad (27)$$

$$= \begin{pmatrix} yz \exp(x^2 + y^2 + z^2) + 2x^2 yz \exp(x^2 + y^2 + z^2) \\ xz \exp(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy^2 z \exp(x^2 + y^2 + z^2) \\ xy \exp(x^2 + y^2 + z^2) + 2xyz^2 \exp(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix} \quad (28)$$

(c)

$$\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{grad}\left(\frac{xyz}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)}\right) \quad (29)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{yz}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{-2x^2 yz}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} \\ \frac{xz}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{-2xy^2 z}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} \\ \frac{xy}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{-2xyz^2}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$= \frac{1}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} \begin{pmatrix} yz - 2x^2 yz \\ xz - 2xy^2 z \\ xy - 2xyz^2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$(32)$$

Aufgabe H 128. Ist die Kettenregel für Jacobi-Matrizen immer hilfreich?

Seien $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(a) Wie viele Zeilen und Spalten haben $J(g)$, $J(h)$ und $J(g \circ h)$? Existiert $h \circ g$? Wenn ja, wie viele Zeilen und Spalten hat $J(h \circ g)$?

(b) Sei von nun an $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$ und $h: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $J(g \circ h)$.

Hat $g \circ h$ somit ein Potential? Haben g und/oder h Potentiale? Wenn ja, geben Sie jeweils eines an.

(c) Sei $k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (y+z)(2x+z) + 3x^2 + y^2 \\ (x+z)(2y+x) + 3y^2 + z^2 \\ (x+y)(2z+y) + 3z^2 + x^2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Potential für k .

Lösungshinweise hierzu:

- (a) $J(g)$: 3 Spalten und 2 Zeilen, $J(h)$: 1 Spalte und 3 Zeilen, $J(g \circ h)$: 1 Spalte und 2 Zeilen. $h \circ g$ existiert nicht.
- (b) Es ist $g \circ h(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$. Also ist $J(g \circ h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}$. Sowohl die Verkettung, als auch die beiden Funktionen sind keine Vektorfelder. Es kann kein Potential existieren.
- (c) Wir nutzen hierbei die Symmetrie der Einträge mit aus, um uns einige Integrale zu ersparen. Es ist $\int [(y+z)(2x+z) + 3x^2 + y^2] dx = x^3 + x^2y + xy^2 + x^2z + xyz + xz^2 + C(y, z)$. Mit einer Konstanten $C(y, z)$. Analoges kann für die anderen Integrale gezeigt werden. Auf Grund der Symmetrie der integrierten Komponenten, können wir ein Potential direkt ablesen. Dieses ist $x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + zy^2 + yz^2 + xyz$.

Aufgabe H 129. Niveaumengen und Gleichungssysteme

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 - y^2)(x - 3y)$.

- (a) Bestimmen Sie die Niveaumenge $\{r \in \mathbb{R}^2 | f(r) = 0\}$ und skizzieren Sie diese.
- (b) Bestimmen Sie ∇f .
- (c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}^2$ für die $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestimmen Sie für folgende Punkte b jeweils $\nabla f(b)$ und zeichnen Sie $\nabla f(b)$ angeheftet an b in ihre Skizze ein

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(iv) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir bemerken, dass $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Somit folgt, dass $0 = (x^2 - y^2)(x - 3y)$, wenn entweder $x = -y$, $x = y$, oder $x = 3y$ ist. In der folgenden Skizze sind die drei Geraden eingezeichnet worden: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$ und $f_3(x) = \frac{1}{3}x$.
- (b) Eine direkte Berechnung liefert $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x(x-3y) + (x^2-y^2) \\ -2y(x-3y) - 3(x^2-y^2) \end{pmatrix}$
- (c) Als Bedingungen erhalten wir $2x(x-3y) + (x^2-y^2) = 0$ und $-2y(x-3y) - 3(x^2-y^2) = 0$. Diese beiden Gleichungen sind gleichbedeutend mit $3x^2 - 6xy - y^2 = 0$ und $-2yx + 9y^2 - 3x^2 = 0$. Addieren wir beide Gleichungen erhalten wir $-8yx + 8y^2 = 8y(y-x) = 0$. Somit sehen wir, dass $y = 0$ oder $x = y$ gelten muss. Im ersten Fall ist zudem $x = 0$. Im zweiten Fall erhalten wir zunächst durch Einsetzen $-4x^2 = 0$ und $4y^2 = 0$. Also auch $x, y = 0$. Damit verschwindet der Gradient nur für $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (d) Nutzen wir die Ergebnisse aus den letzten beiden Teilaufgaben, folgt, dass die Gradienten gegeben sind als

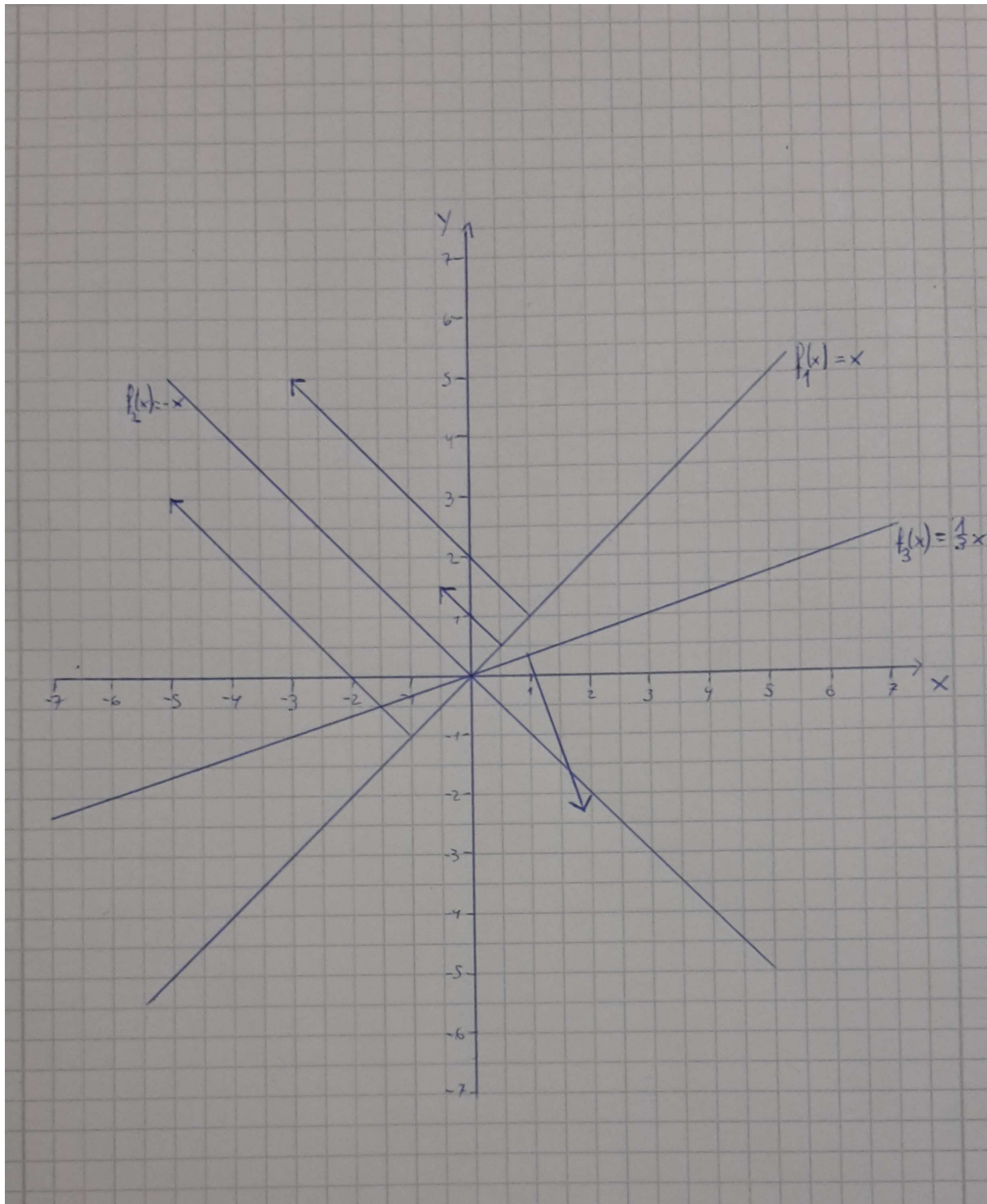
(i) $\nabla f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\nabla f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(ii) $\nabla f\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\nabla f\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$

Die Gradienten angeheftet an die jeweiligen Punkte, sind in der Skizze mit eingezeichnet worden.



Frischhaltebox

Aufgabe H 130. Konvergenz von Reihen

Konvergieren folgende Reihen? Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe, wenn sie konvergiert.

(a)
$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{3i+2}{6i}\right)^j$$

(b)
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2i+5}{1+3i}\right)^j$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\left| \frac{3i + 2}{6i} \right| = \frac{|3i + 2|}{|6i|} \quad (33)$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 + 3^2}}{6} \quad (34)$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{6} < 1 \quad (35)$$

Somit konvergiert die Reihe. Nun können wir den Grenzwert berechnen. Es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3i + 2}{6i} \right)^j = \frac{1}{1 - \frac{3i+2}{6i}} \quad (36)$$

$$= \frac{6i}{3i - 2} \quad (37)$$

$$= \frac{18}{13} - \frac{12}{13}i \quad (38)$$

Damit folgt

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{3i + 2}{6i} \right)^j = \frac{18}{13} - \frac{12}{13}i - 1 - \left(\frac{3i + 2}{6i} \right)^1 \quad (39)$$

$$= -\frac{3}{26} - \frac{23}{39}i \quad (40)$$

(b) Es ist

$$\left| \frac{2i + 5}{1 + 3i} \right| = \frac{|2i + 5|}{|1 + 3i|} \quad (41)$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 + 5^2}}{\sqrt{1 + 3^2}} \quad (42)$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{10}} > 1 \quad (43)$$

Somit divergiert die Reihe.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 131. Harmonische Funktionen und Divergenz, sowie Rotation

(a) Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \exp(x) \sin(y)$ harmonisch?

(b) Ist $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ harmonisch?

(c) Sei $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sin(x) + \exp(y^2 + z^2)$.

Zeigen Sie $\operatorname{div} \operatorname{grad} h = \Delta h$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} h = 0$ ohne Lemma 5.2.8 zu benutzen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp(x) \sin(y) = \exp(x) \sin(y)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \exp(x) \sin(y) = -\exp(x) \sin(y)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \Delta \exp(x) \sin(y) &= \exp(x) \sin(y) - \exp(x) \sin(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist die Funktion harmonisch.

(b) Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Analoges folgt für die beiden anderen Ableitungen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Delta \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht harmonisch.

(c) Wir berechnen die einzelnen Ausdrücke. Es ist

$$\operatorname{grad} h = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 2y \exp(y^2 + z^2) \\ 2z \exp(y^2 + z^2) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} h &= -\sin(x) + 2 \exp(y^2 + z^2) + 4y^2 \exp(y^2 + z^2) + 2 \exp(y^2 + z^2) \\ &\quad + 4z^2 \exp(y^2 + z^2) \\ &= -\sin(x) + 4 \exp(y^2 + z^2) (y^2 + z^2 + 1). \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \Delta h &= -\sin(x) + [2(2y^2 + 1) + 2(2z^2 + 1)] \exp(y^2 + z^2) \\ &= -\sin(x) + 4 \exp(y^2 + z^2) (y^2 + z^2 + 1). \end{aligned}$$

Somit gilt Gleichheit.

Aufgabe H 132. Kurvenintegrale von Vektorfeldern

(a) Es sei die Parametrisierung $C: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 2+t^4 \\ t \end{pmatrix}$ einer Kurve K gegeben. Skizzieren Sie diese Kurve. Bestimmen Sie für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \sin(y) \end{pmatrix}$ das Kurvenintegral $\int_K f(s) \cdot ds$.

(b) Es sei die Parametrisierung $\tilde{C}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ einer Kurve \tilde{K} gegeben. Skizzieren Sie diese Kurve. Bestimmen Sie für $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x^2 y^2 \\ z \end{pmatrix}$ das Kurvenintegral $\int_{\tilde{K}} g(s) \cdot ds$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es handelt sich um eine um 90° gedrehte Parabel. Wir berechnen direkt

$$\begin{aligned} \int_K f(s) \cdot ds &= \int_0^2 \begin{pmatrix} 2+t^4 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^2 [8t^3 + 4t^7 + \sin(t)] dt \\ &= \left[2t^4 + \frac{1}{2}t^8 - \cos(t) \right]_0^2 \\ &= 161 - \cos(2) \end{aligned}$$

(b) Es handelt sich um die Sinus-Funktion in der x, z Ebene bei $y = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_K f(s) \cdot ds &= \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} \\ t^2 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{1+t^2} + \sin(t) \cos(t) \right] dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-1}^1 \sin(t) \cos(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \arctan(t) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass

$$\int_{-1}^1 \sin(t) \cos(t) \, dt = 0,$$

was wir direkt auf Grund der Symmetrie des Integranden sehen.

Aufgabe H 133. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

- (a) Es sei die Parametrisierung $C: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ einer Kurve K gegeben. Bestimmen Sie für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x^4 + x^2y^2$ das Kurvenintegral $\int_K f(s) \, ds$.
- (b) Sei nun die Parametrisierung $\tilde{C}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \sin(t) \\ t \cos(t) \end{pmatrix}$ einer Kurve \tilde{K} gegeben. Bestimmen Sie für $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{1+x^2+y^2}$ das Kurvenintegral $\int_{\tilde{K}} g(s) \, ds$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir berechnen

$$\int_K f(s) \, ds = \int_0^\pi (2 \sin(t)^4 + \sin(t)^2 \cos(t)^2) \, dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(t)^4 &= \sin(t)^2 (1 - \cos(t)^2) \\ &= \sin(t)^2 - \sin(t)^2 \cos(t)^2 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_K f(s) \, ds = \int_0^\pi (2 \sin(t)^2 - \sin(t)^2 \cos(t)^2) \, dt.$$

Wir betrachten nun die einzelnen Integrale.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi 2 \sin(t)^2 \, dt &= \int_0^\pi (1 - \cos(2t)) \, dt \\ &= \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

Auch ist

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(t)^2 \cos(t)^2 \, dt &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(2t)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos(4t)) \, dt \\ &= \frac{1}{8} \left[t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{8} \pi \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_K f(s) \, ds = \frac{7}{8} \pi.$$

(b) Es ist

$$g(\tilde{C}(t)) = \sqrt{1+t^2}$$

und

$$\tilde{C}'(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)+t \cos(t) \\ \cos(t)-t \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$|\tilde{C}'(t)| = \sqrt{1+t^2}.$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{K}} g(s) \, ds &= \int_0^{2\pi} (1+t^2) \, dt \\ &= \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe H 134. *Etwas aufwendiger als sonst . . .*

Wir betrachten eine geschlossene Kurve K , welche auf den Kanten eines Vierecks mit Eckpunkten $A = (0, 0)$, $B = (5, 1)$, $C = (7, 4)$ und $D = (-2, 3)$ verläuft.

- (a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Kurve K .
- (b) Bestimmen Sie $\oint_K f(s) \, ds$ für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \exp(y)$.
- (c) Angenommen wir entfernen Punkt D und betrachten eine geschlossene Kurve \tilde{K} , welche auf den Kanten des Dreiecks mit Eckpunkten A , B und C verläuft. Bestimmen Sie nun $\oint_{\tilde{K}} f(s) \, ds$ für die oben definierte Funktion f .

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir bestimmen zunächst Parametrisierungen der Geraden \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} und \overline{DA} . Diese sind gegeben durch

- (i) $C_{\overline{AB}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} t$
- (ii) $C_{\overline{BC}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (iii) $C_{\overline{CD}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
- (iv) $C_{\overline{DA}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- (b) Mit den bestimmten Parametrisierungen können wir die Kurvenintegrale direkt bestimmen.

(i)

$$\begin{aligned} \int_{C_{\overline{AB}}} f(s) \, ds &= \int_0^1 5t \exp(t) \sqrt{26} \, dt \\ &= 5\sqrt{26} \int_0^1 t \exp(t) \, dt \\ &= 5\sqrt{26} [\exp(t)(t-1)]_0^1 \\ &= 5\sqrt{26} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{C_{\overline{BC}}} f(s) \, ds &= \sqrt{13} \int_0^1 (2t + 5) \exp(3t + 1) \, dt \\ &= \frac{\sqrt{13}}{9} e (19e^3 - 13)\end{aligned}$$

(iii)

$$\int_{C_{\overline{CD}}} f(s) \, ds = \sqrt{82} (11 - 2e) e^3$$

(iv)

$$\int_{C_{\overline{DA}}} f(s) \, ds = -\frac{2}{9} \sqrt{13} (1 + 2e^3)$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\int_K f(s) \, ds &= \int_{C_{\overline{AB}}} f(s) \, ds + \int_{C_{\overline{BC}}} f(s) \, ds + \int_{C_{\overline{CD}}} f(s) \, ds + \int_{C_{\overline{DA}}} f(s) \, ds \\ &= \frac{\sqrt{13}}{9} (45\sqrt{2} - 2) - \frac{13\sqrt{13}}{9} e - \frac{1}{9} (4\sqrt{13} - 99\sqrt{82}) e^3 + \frac{1}{9} (19\sqrt{13} - 18\sqrt{82})\end{aligned}$$

(c) Eine Parametrisierung für die neue Gerade ist $C_{\overline{CA}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Somit folgt

$$\int_{C_{\overline{CA}}} f(s) \, ds = \frac{7}{16} \sqrt{65} (1 + 3e^4).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_K f(s) \, ds &= \int_{C_{\overline{AB}}} f(s) \, ds + \int_{C_{\overline{BC}}} f(s) \, ds + \int_{C_{\overline{CA}}} f(s) \, ds \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{13} (80\sqrt{2} + 7\sqrt{5}) - \frac{13\sqrt{13}}{9} e + \frac{1}{144} \sqrt{13} (304 + 189\sqrt{5}) e^4\end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 135. Positive Definitheit

Sind die folgenden Matrizen positiv definit?

(a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 2022 & 1 & 0 \\ 1 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 23\pi \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda E \right) &= (2 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - 4) - 2(2(2 - \lambda) - 4) \\ &\quad + 2(-2(2 - \lambda) + 4) \\ &= (2 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - 4) + 4(-2(2 - \lambda) + 4) \\ &= (2 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - 4) + 8(-(2 - \lambda) + 2) \\ &= -\lambda [(2 - \lambda)(2 + (2 - \lambda)) - 8] \\ &= -\lambda [(2 - \lambda)(4 - \lambda) - 8] \\ &= -\lambda [8 - 6\lambda + \lambda^2 - 8] \\ &= -\lambda\lambda(-6 + \lambda) \end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte 0, 0 und 6. Die Matrix ist nicht positiv definit.

(b) Da es sich um eine Blockmatrix handelt, genügt es sich die einzelnen Blöcke anzusehen.

Der erste Block ist $\begin{pmatrix} 2022 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte dieses Blocks sind positiv, denn

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2022 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} - \lambda E \right) = (2022 - \lambda)(17 - \lambda) - 1$$

Hierbei ist zu beachten, dass

$$(2022 - \lambda)(17 - \lambda) = 1$$

nur möglich ist, wenn $\lambda > 0$. Der zweite Block besitzt nur den Eintrag 23π . Der Eigenwert ist somit 23π . Die Matrix ist also positiv definit.