Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

15. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 71. *Berechnung von Reihenwerten*
Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m}-\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{3m+3}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n-1}{n+3}\right)^k$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es handelt sich um eine Teleskopreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m}-\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{3m+3}=\sum_{m=1}^{\infty}a_m-a_{m+1}$$

für $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_m:=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m}$. Es folgt somit

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m}-\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{3m+3}&=\sum_{m=1}^{\infty}a_m-a_{m+1}\\&=\lim_{M\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{M}a_m-a_{m+1}\right)=\lim_{M\to\infty}(a_1-a_{M+1})\\&=\left(1+\frac{1}{1}\right)^3-\lim_{M\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{M+1}\right)^{M+1}\right)^3\\&\overset{(*)}{=}\left(1+\frac{1}{1}\right)^3-\left(\lim_{M\to\infty}\left(1+\frac{1}{M+1}\right)^{M+1}\right)^3\\&=8-e^3.\end{aligned}$$

Dabei haben wir in $(*)$ den Grenzwertsatz 1.5.3 benutzt.

(b) Wir werten zuerst die äußere Summe über n aus und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n-1}{n+3}\right)^k&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1^2-2-1}{1+3}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^2-4-1}{2+3}\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^k.\end{aligned}$$

Es handelt sich somit um die Summe zweier geometrischer Reihen und wir erhalten - wie in Beispiel 1.8.4 gesehen -

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}\quad\text{und}\quad\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^k=\frac{1}{1-(-\frac{1}{5})}=\frac{5}{6}.$$

Für den Wert der Reihe ergibt sich somit

$$\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n-1}{n+3}\right)^k=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{3}{2}.$$

Aufgabe H 72. *Konvergenzuntersuchung*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} n^2\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{2^{2n-1}(n+1)^2}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{(n^2-1)^2 - 1} - n^2$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Lemma 1.9.1 (Nullfolgenkriterium) muss die Folge der Summanden eine Nullfolge bilden, damit die Reihe konvergieren kann. Betrachten wir also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summanden, so erkennen wir, dass die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{2k} = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2k)^2\right) = \cos\left(2\pi k^2\right) = 1$$
$$a_{2k-1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)^2\right) = \cos\left(\frac{4k^2-4k+1}{2}\pi\right) = 0$$

konstant sind. Die Folge hat somit 2 Häufungspunkte und ist insbesondere nicht konvergent.

(b) Für die Folge der Summanden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}(n+1)}{2^{2n+1}(n+2)^2} \cdot \frac{2^{2n-1}(n+1)^2}{3^n n} = \frac{3}{4}\frac{(n+1)^3}{(n+2)^2 n}$$
$$= \frac{3}{4}\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^2+4n} \leqq \frac{3}{4}\frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n} = \frac{3}{4},$$

da $1 \leqq n^2 + n$. Somit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium (1.9.13).

(c) Für die Folge der Summanden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n - n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{1-\frac{n}{2^n}}} \geqq \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}.$$

Da $(\frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt zudem

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n - n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{1-\frac{n}{2^n}}} \leqq \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}.$$

Mit dem Sandwichsatz (1.5.6) erhalten wir somit

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

und die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium (1.9.16).

(d) Für die Folge der Summanden gilt

$$\begin{aligned}
a_n = \sqrt{(n^2-1)^2-1} - n^2 &= \left(\sqrt{(n^2-1)^2-1} - n^2\right) \frac{\sqrt{(n^2-1)^2-1}+n^2}{\sqrt{(n^2-1)^2-1}+n^2} \\
&= \frac{(n^2-1)^2-1-(n^2)^2}{\sqrt{(n^2-1)^2-1}+n^2} \\
&= \frac{-2n^2}{n^2\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^4}}+1\right)} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^4}}+1}.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^4}}+1} = \frac{-2}{1+1} = -1.$$

Insbesondere bildet die Folge der Summanden keine Nullfolge und die Reihe ist nicht konvergent nach Lemma 1.9.1 (Nullfolgenkriterium).

Aufgabe H 73. *Parameterabhängige Konvergenz*

Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n (n!) n^n}{(2n)!}$ für alle $x \in [-1, 1]$ konvergiert.

Lösungshinweise hierzu: Da $|x|^n \leqq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$, ist die Reihe für $x = 1$ eine Majorante der restlichen Reihen. Es reicht somit aus die Konvergenz für $x = 1$ nachzuweisen. Wir betrachten dazu die Folge der Summanden $a_n = \frac{n! n^n}{(2n)!}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)!(n+1)^{(n+1)}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n! n^n} \\
&= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n} \\
&= (n+1) \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot (n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung des Grenzwertsatz 1.5.3 ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)2n+1}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot e < 1.
\end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium (1.9.13).

Aufgabe H 74. *Verdichtungskriterium*

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mittels $b_n := a_{2^k}$ für $2^k \leqq n < 2^{k+1}$.

(a) Zeigen Sie: $a_n \leqq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie: $\sum\limits_{n=1}^{2^{m+1}-1} a_n \leqq \sum\limits_{n=1}^{2^{m+1}-1} b_n = \sum\limits_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k}$ für $m \geqq 0$.

(c) Folgern Sie: Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(d) Verwenden Sie **(c)** um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $2^k \leqq n < 2^{k+1}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt aus der Definition der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sofort

$$b_n = a_{2^k} \geqq a_n.$$

(b) Die erste Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} a_n \leqq \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} b_n$$

folgt unmittelbar aus **(a)**, denn $a_n \leqq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit insbesondere für $1 \leqq n \leqq 2^{m+1}-1$ für jegliches $m \geqq 0$. Die Gleichung folgt aus der Definition der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} b_n = \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} b_n = \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^k} = \sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k}.$$

(c) Wir betrachten die Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} b_n \qquad \text{und} \qquad T_M = \sum_{k=0}^{M} 2^k a_{2^k}.$$

Mit den Partialsummen geschrieben lautet **(b)** wie folgt

$$S_{2^{m+1}-1} = \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} b_n = \sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k} = T_m. \tag{$*$}$$

Nach Annahme konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ und equivalent dazu auch die Folge der Partialsummen $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Insbesondere ist diese Folge beschränkt (Lemma 1.5.2) und mit $(*)$ folgt auch

$$S_{2^{m+1}-1} = T_m < C. \tag{$**$}$$

für ein geeignetes $C > 0$ und für alle $m \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativ ist, ist die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und mit $(**)$ erhalten wir

$$0 \leqq S_n < C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Die Folge (S_n) ist somit monoton wachsend und beschränkt und konvergiert demnach nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß (1.6.5). Damit konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

(d) Es bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Summanden. Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit $q = 2^{1-\alpha}$. Es handelt sich also um eine geometrische Reihe und für $\alpha > 1$ ist $|q| = 2^{1-a} < 1$ und somit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ nach Beispiel 1.8.4. Mit **(c)** folgt, dass auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert.

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. *Komplexe Zahlen*

Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Zahlenebene.

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) = 1\right\}$$

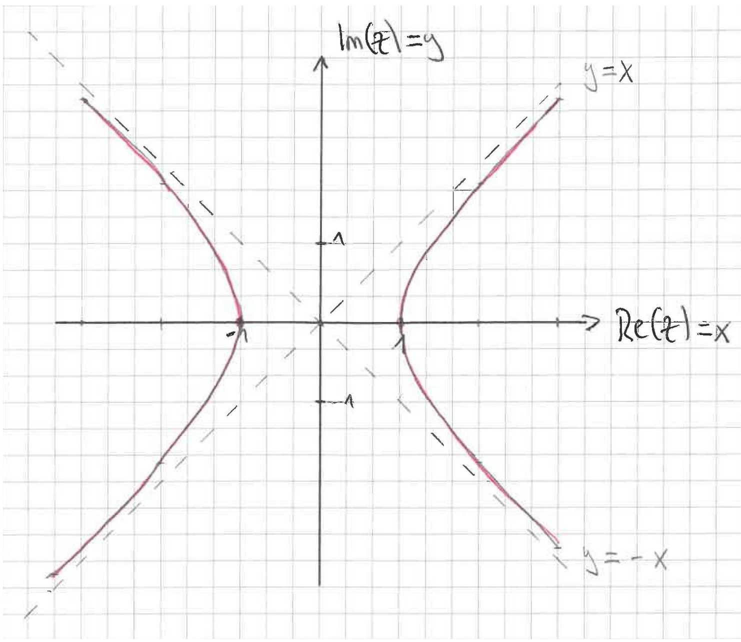
Lösungshinweise hierzu: Setzen wir $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ergibt sich die Gleichung

$$1 = \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}((x + \mathrm{i}y)^2) = \operatorname{Re}(x^2 + 2\mathrm{i}xy + \mathrm{i}^2y^2) = \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) = x^2 - y^2.$$

Es handelt sich somit um eine Quadrik mit Normalform

$$-x^2 + y^2 + 1 = 0$$

und die Menge beschreibt nach 6.3.8 ein Hyperbel. Diese hat die Scheitelpunkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ sowie die beiden Asymptoten $y = x$ und $y = -x$.



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 76. *Stetigkeit und einseitige Grenzwerte*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \begin{cases} -1, & t \leqq -1 \\ \frac{1}{2}t + 1, & t > -1 \end{cases}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto 2t^2 + t - 1$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

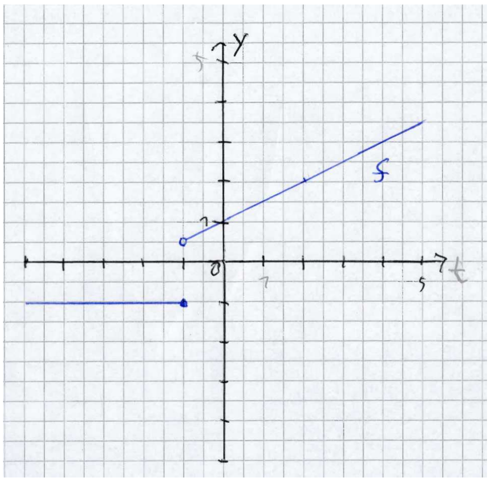
(b) Sei $t_0 := -1$. Ist f linksseitig stetig in t_0? Ist f rechtsseitig stetig in t_0? Ist f stetig in t_0?

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $(f \circ g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto f(g(t))$. Ist $f \circ g$ stetig?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von $(g \circ f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto g(f(t))$. Ist $g \circ f$ stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $t \leqq -1$ entspricht f der konstanten Funktion $t \mapsto -1$, für $t > -1$ der Geraden $t \mapsto \frac{1}{2}t + 1$, was auf folgende Skizze führt:



Bemerkung: Da f in $t_0 = -1$ einen Sprung macht, muss in der Skizze erkenntlich gemacht werden, auf welchem Teilstück des Graphen der Punkt $(t_0, f(t_0))$ liegt. In obiger Skizze geschah dies mittels eines ausgefüllten und eines leeren Kreises.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -1-0} f(t) &= \lim_{t \to -1-0} -1 = -1 = f(-1) \\ \lim_{t \to -1+0} f(t) &= \lim_{t \to -1-0} \frac{1}{2}t + 1 = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to -1+0} t\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{2} \neq f(-1) \end{aligned}$$

Folglich ist f folglich linksstetig in t_0. Die Funktion ist allerdings nicht rechtsseitig stetig in t_0, somit nach 1.11.10 auch nicht stetig.

(c) Um das verhalten des Graphen skizzieren/abschätzen zu können, berechnen zunächst die Stellen t mit $g(t) = -1$:

$$\begin{array}{rrcl} & g(t) & = & -1 \\ \Leftrightarrow & t^2+t-1 & = & -1 \\ \Leftrightarrow & t^2+t & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t(2t+1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t & \in & \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\} \end{array}$$

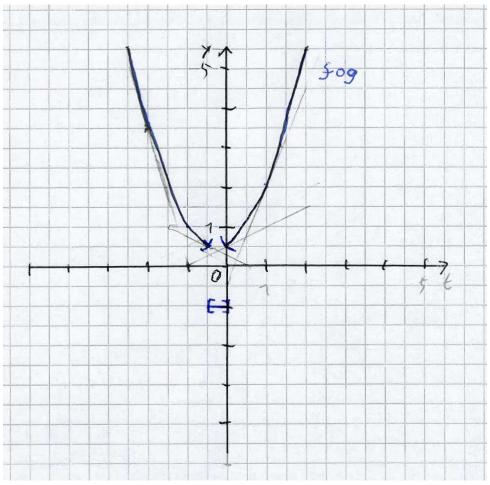
Für $t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ gilt insbesondere $g(t) < -1$, für $t \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [0, \infty)$ hingegen $g(t) > -1$, was mit

$$\frac{1}{2}g(t) + 1 = t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

auf die Darstellung

$$f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \begin{cases} t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t < -\frac{1}{2} \\ -1, & -\frac{1}{2} \leqq t \leqq 0 \\ t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t > 0 \end{cases}$$

führt. Wir erhalten die folgende Skizze:



Bemerkung: In obiger Skizze wurde eine andere zulässige Darstellung für die Randpunkte des Graphen (an den Unstetigkeitsstellen) gewählt: Die Punkte, an denen die eckigen Klammern sind („-]"), gehören dazu, die Punkte, an denen die runden Klammern abgewendet („-)") nicht – ganz so wie bei Intervallen.

Wir berechnen für die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0+0} f(g(t)) &= \lim_{t \to 0+0} f(2t^2+t-1) \\ &= \lim_{t \to 0+0} \frac{1}{2}\left(2t^2+t-1\right) + 1 \\ &= \lim_{t \to 0+0} t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{t \to t_0-0} f(g(t)) &= \lim_{t \to 0-0} f(2t^2+t-1) \\ &= \lim_{t \to 0-0} -1 = -1 \end{aligned}$$

Somit ist $f \circ g$ unstetig in $t_0 = 0$ und somit auch nicht stetig.

Bemerkung: Zum Nachweis der Unstetigkeit einer Funktion auf Ihrem Definitionsbereich genügt es den Definitionen nach, Unstetigkeit in einem Punkt zu beweisen, daher muss $t_0 = -\frac{1}{2}$ nicht mehr überprüft werden, ebenso wenig alle $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, auch wenn $f \circ g$ dort stetig ist.

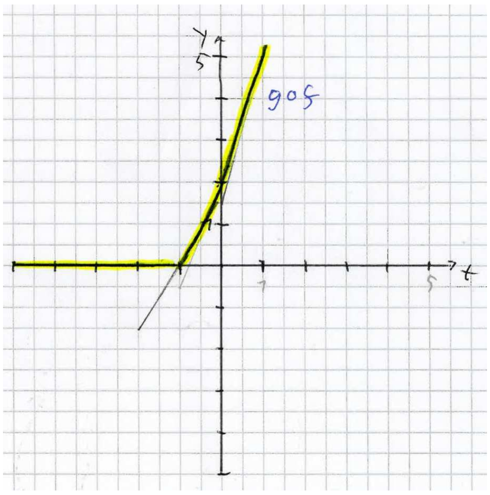
(d) Für $t \leqq -1$ gilt $f(t) = -1$ und somit $g(f(t)) = g(-1) = 0$. Für $t > -1$ hingegen gilt

$$\begin{aligned} g(f(t)) = g\left(\frac{1}{2}t + 1\right) &= 2\left(\frac{1}{2}t+1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t+1\right) - 1 \\ &= \frac{1}{2}t^2 + 2t + 2 + \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 2, \end{aligned}$$

was auf die Darstellung

$$g \circ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \begin{cases} 0, & t \leqq -1 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 2, & t > -1 \end{cases}$$

führt und somit auf folgende Skizze:



Für alle $t_0 \neq -1$ stimmt f in einer hinreichend kleinen Umgebung mit einer stetigen Funktion ($t \mapsto -1$ für $t_0 < -1$ bzw. $t \mapsto \frac{1}{2}t + 1$ für $t_0 > -1$) überein, ist somit also stetig in t_0. Da g als stetige Funktion (siehe 1.12.3) insbesondere in $f(t_0)$ stetig ist, ist es auch die Verkettung (1.12.1.7/1.12.4). Es bleibt $t_0 = -1$ zu überprüfen. Wir haben:

$$\lim_{t \to -1-0} g(f(t)) = \lim_{t \to -1-0} g(-1) = g(-1) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -1+0} g(f(t)) &= \lim_{t \to -1-0} g\left(\frac{1}{2}t+1\right) \\ &= \lim_{t \to -1-0} 2\left(\frac{1}{2}t+1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t+1\right) - 1 \\ &= \lim_{t \to -1-0} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}t^2 + t + 1\right) + \left(\frac{1}{2}t+1\right) - 1 \\ &= \lim_{t \to -1-0} \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = 0 \end{aligned}$$

Also gilt $\lim\limits_{t\to -1-0} g(f(t)) = g(-1) = \lim\limits_{t\to -1+0} g(f(t))$, somit ist $g\circ f$ auch in -1 stetig und somit stetig.

Aufgabe H 77. *Funktionsgrenzwerte und stetige Fortsetzungen*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{4-(2\cos(x))^2}$.

(a) Geben Sie eine stetige Funktion $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an mit $g(x)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{N} := \{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}$.

(c) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ so, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$ gilt. Existiert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine solche Funktion kann nur existieren, wenn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert und in $\mathbb{R}$ liegt. Wir vereinfachen zunächst $f(x)$: Es gilt für $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{4-(2\cos(x))^2} \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot 2\sqrt{1-(\cos(x))^2} = 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left|\sin(x)\right| , \end{aligned}$$

insbesondere gilt mit der Abschätzung $-1\leqq\cos(t)\leqq 1\forall t\in\mathbb{R}$

$$-2\left|\sin(x)\right| \leqq 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left|\sin(x)\right| \leqq 2\left|\sin(x)\right|$$

für alle $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} -2\left|\sin(x)\right| &\overset{1.12.1}{=} -2\left|\lim_{x\to 0}\sin(x)\right| \\ &= -2\left|\sin(0)\right| = 0 = 2\left|\lim_{x\to 0}\sin(x)\right| \\ &= \lim_{x\to 0} 2\left|\sin(x)\right| \end{aligned}$$

folgt durch ein Sandwich-Argument $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Definieren wir nun $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mittels $g(x) := \begin{cases} f(x) & x\neq 0 \\ 0 & x = 0\end{cases}$, so ist g nach obigem stetig in $x=0$. Auf $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ wiederum stimmt g mit f überein und ist somit als Produkt von Verkettungen stetiger Funktionen gemäß 1.12.4 stetig, also ist g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Eine Nullstelle ist gemäß (a) $x_0 = 0$. Für $x\neq 0$ wird $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left|\sin(x)\right|$ genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 wird. Die Nullstellen von $\left|\sin(x)\right|$ in $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ sind gegeben durch $x_k = \pi k, k\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$. Die Nullstellen von $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sind analog gegeben durch $\frac{1}{\tilde{x}_k} = \pi k + \frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ bzw. $\tilde{x}_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$. Wir erhalten mit $x_0 = 0 = 0\cdot\pi$

$$\mathcal{N} = \left\{\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2}{(2k+1)\pi} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(c) Wir definieren $x_n := \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Dann gelten:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}(2n+1) = \infty$$

sowie

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} 2\underbrace{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)\right|}_{=1}\cos\left(\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 2\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) \overset{1.12.2}{=} 2\lim_{t\to 0+0}\cos(t) = 2\end{aligned}$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := \pi n$ ebenfalls gegen ∞ strebt und nach (b) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ erfüllt – immerhin gilt $f(x) = g(x)$ für $x \neq 0$ – existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ **nicht**.

Aufgabe H 78. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{1+\sin(x)}}{x^4}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi x^3}{4x^3-x^2+5}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3-6}-\sqrt{x^2+4}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+\cos(x)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$0 \leqq \left|\frac{x^2+\sqrt{1+\sin(x)}}{x^4}\right| \leqq \frac{x^2+\sqrt{2}}{x^4}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{2}}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^4} = 0$ folgt daher $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{1+\sin(x)}}{x^4} = 0$ („Sandwich“) .

(b) Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^3}{4x^3-x^2+5} \overset{1.11.8}{=} \frac{\pi}{4}.$$

Da $\tan$ in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi x^3}{4x^3-x^2+5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

(c) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3-6}-\sqrt{x^2+4}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4}\left(\sqrt{\frac{x^3-6}{x^2+4}}-1\right).$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-6}{x^2+4} = +\infty$ und $\sqrt{x^2+4}\left(\sqrt{\frac{x^3-6}{x^2+4}}-1\right) \geqq 2\left(\sqrt{\frac{x^3-6}{x^2+4}}-1\right)$ folgt daher $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4}\left(\sqrt{\frac{x^3-6}{x^2+4}}-1\right) = +\infty$.

(d) Es ist
$$\frac{2x^2+3}{4x^2+\cos(x)} = \frac{2+\frac{3}{x^2}}{4+\frac{\cos(x)}{x^2}}.$$
Wegen
$$0 \leqq \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leqq \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$
folgt daher $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x)}{x^2}=0$, somit auch
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{4x^2+\cos(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{4+\frac{\cos(x)}{x^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H 79. *Parametrisierte Funktion*
Seien $p, q \in \mathbb{R}$ reelle Parameter mit $p < 0$. Gegeben sei die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} |x-p|, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leqq x \leqq 1, \\ q-x, & 1 < x. \end{cases}$$

(a) Sei $1 > \varepsilon > 0$. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x)-f(0)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist.

(b) Für welchen Wert des Parameters p ist f an der Stelle -1 stetig ?

(c) Für welchen Wert des Parameters q ist f an der Stelle 1 stetig ?

(d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $[-4, 4]$ für das Paar der in (b) und (c) gefundenen Parameterwerte.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zu zeigen ist, dass $\forall 1 > \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Es gilt für $x \in (-1, 1)$
$$|f(x) - f(0)| = \left|x^2\right| = |x-0|^2,$$
setzen wir also für $0 < \varepsilon < 1$
$$\delta := \delta(\varepsilon) := \sqrt{\varepsilon},$$
so gilt wegen $(-\delta, \delta) \subseteqq (-1, 1)$ folglich
$$|f(x) - f(0)| = |x-0|^2 \leqq \delta^2 = \varepsilon$$
für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Insbesondere ist f in x_0 stetig: Für $\varepsilon < 1$ haben wir soeben ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ gefunden, sodass
$$f(U_\delta(0)) \subseteqq U_\varepsilon(f(0))$$
gilt, für $\varepsilon \geqq 1 > \frac{1}{2}$ können wir $\delta := \sqrt{\frac{1}{2}}$ setzen, dann gilt
$$f(U_\delta(0)) \subseteqq U_{\frac{1}{2}}(f(0)) \subseteqq U_\varepsilon(f(0))$$
Wir schließen daraus, dass f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist.

(b) Für die einseitigen Grenzwerte gelten

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = \lim_{x\to-1-0} |x-p| = |-1-p|$$
$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{x\to-1+0} x^2 = (-1)^2 = 1 = f(-1)$$

f ist genau dann stetig an der Stelle $x_0 = -1$, wenn gilt

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = f(-1) = \lim_{x\to-1+0} f(x)$$

bzw.

$$|-1-p| = 1$$

Folglich muss $-1-p=1$ oder $-1-p=-1$ gelten, woraus wir $p=-2$ erhalten. (Wegen $p<0$ scheidet die Lösung $p=0$ aus.) Somit ist f nur für $p=-2$ in $x_0=-1$ stetig.

(c) Für die einseitigen Grenzwerte gelten

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to-1-0} x^2 = 1 = f(1)$$
$$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to-1+0} q-x = q-1$$

f ist genau dann stetig an der Stelle $x_0 = -1$, wenn gilt

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = f(1) = \lim_{x\to1+0} f(x)$$

bzw.

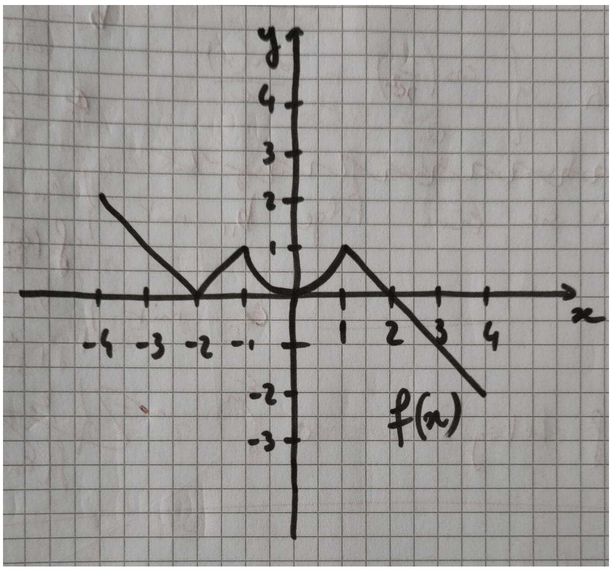
$$1 = q-1,$$

woraus wir sofort $q=2$ erhalten. Somit ist f nur für $q=2$ in $x_0=1$ stetig.

(d) Wir setzen p aus (b) und q aus (c) in die Funktionsdefinition ein und erhalten

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \begin{cases} |x+2| & \text{für } x<-1, \\ x^2 & \text{für } -1 \leqq x \leqq 1, \\ 2-x & \text{für } 1<x. \end{cases} = \begin{cases} -x-2 & \text{für } x<-2, \\ x+2 & \text{für } -2 \leqq x < -1, \\ x^2 & \text{für } -1 \leqq x \leqq 1, \\ 2-x & \text{für } 1<x. \end{cases},$$

was auf folgende Skizze führt:



Frischhaltebox

Aufgabe H 80. *LGS*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & -6 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 42 \\ 29 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir nutzen Gauß und Beginnen mit einem Zeilentausch

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 0 & -2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & 4 & -6 & 42 \\ 3 & -4 & -1 & 0 & 29 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 \Leftrightarrow Z_2 : \\ Z_2 \Leftrightarrow Z_1 : \\ Z_3 - 3Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & -4 & 4 & -6 & 42 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -13 & 18 & -97 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 2Z_2 : \\ -\frac{1}{2}Z_2 : \\ Z_3 + 4Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 6 & -14 & 36 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -17 & 34 & -85 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + \frac{6}{17}Z_3 : \\ Z_2 + \frac{1}{34}Z_3 : \\ -\frac{1}{17}Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

Wir erhalten als Lösungsmenge $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 81. *Gleichheitsproblem, Intervallhalbierungsmethode*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto t^2 - 1$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto 3t - t^3$.

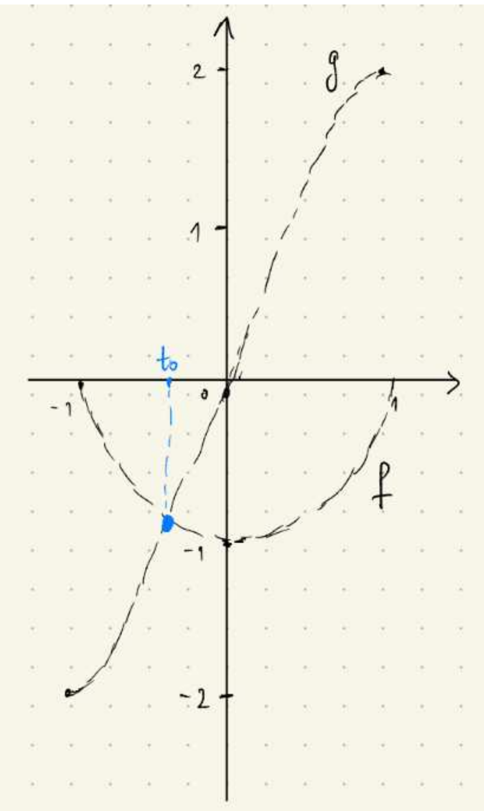
(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g im Intervall $[-1, 1]$.

(b) Verwenden Sie den Nullstellensatz von Bolzano, um zu zeigen: Es gibt ein $t_0 \in [-1, 1]$ mit $f(t_0) = g(t_0)$. Markieren Sie diese Stelle t_0 in der Skizze aus (a).

(c) Wir betrachten die Funktion $f - g$ und das Intervall $[-1, 1]$. Führen Sie drei Schritte der Intervallhalbierungsmethode durch, um $a, b \in [-1, 1]$ zu finden mit $|b - a| = \frac{1}{4}$ und $t_0 \in [a, b]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Beachten Sie, dass $f(t) = (t+1)(t-1)$ und $g(t) = -t(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$. Die Nullstellen von f sind -1 und 1. Die einzige Nullstelle von g im Intervall $[-1, 1]$ ist 0. Außerdem nimmt g positive Werte für $0 < t \leqq 1$ $\big(-t(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3}) > 0$ für $0 < t \leqq 1\big)$ und negative Werte für $-1 \leqq t < 0$ $\big(-t(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3}) < 0$ für $-1 \leqq t < 0\big)$ und es gilt $g(1) = 2$ und $g(-1) = -2$. Wir erhalten die folgende Skizze für f und g im Intervall $[-1, 1]$:



(b) Wir betrachten die Funktion $h := f - g$. Beachten Sie, dass h stetig im Intervall $[-1, 1]$ ist, mit $h(-1) = f(-1) - g(-1) = 2 > 0$ und $h(1) = f(1) - g(1) = -2 < 0$. Es folgt aus dem Nullstellensatz von Bolzano, dass es $t_0 \in [-1, 1]$ mit $h(t_0) = 0$ gibt. Also $f(t_0) = g(t_0)$. Die Stelle t_0 wird in der Skizze markiert.

(c) Wir betrachten nochmal die Funktion $h = f - g$. Im Teil (b) wurde es schon nachgewiesen, dass $h(-1) > 0$ und $h(1) < 0$. Im ersten Schritt der Intervallhalbierungsmethode erhalten wir

$$\frac{-1+1}{2} = 0$$

als Mittelpunkt des Intervalls $[-1, 1]$ und

$$h(0) = f(0) - g(0) = -1 < 0.$$

Im zweiten Schritt des Verfahrens betrachten wir das Intervall $[-1, 0]$, dessen Mittelpunkt

$$\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$$

ist. Weil

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} > 0$$

ist, wendet man den dritten Schritt der Intervallhalbierungsmethode auf das Intervall $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ an. Der Mittelpunkt von $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ ist

$$\frac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\frac{1}{4}$$

und

$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{13}{64} < 0.$$

Daraus folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$ hat. Wir setzen $a := -\frac{1}{2}$ und $b := -\frac{1}{4}$. Beachten Sie, dass $|b - a| = \frac{1}{4}$. Die Nullstelle t_0 ist ein Element von $[a, b]$.

Aufgabe H 82. *Potenzreihen*

(a) Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{k} z^k$?

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} z^k$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Entwicklungspunkt der Potenzreihe ist $z_0 := 0$ und die entsprechende Folge ist $a_k := \frac{2^k+3^k}{k}$. Wir verwenden das Quotienten-Kriterium, um den Konvergenzradius zu bestimmen:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1} + 3^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{2^k + 3^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \cdot \frac{3^{k+1}\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\right)}{3^k\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 3 \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\right)}{\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right)} = 3.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also $\rho := \frac{1}{3}$ (nach 1.14.7). Nach 1.14.4 konvergiert die Reihe absolut für alle z in

$$U_\rho(z_0) = U_{\frac{1}{3}}(0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{3} \right\}$$

und sie divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U_\rho(z_0)$. Insbesondere konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{1}{3} < z < \frac{1}{3}$.
Für $z = \frac{1}{3}$ erhält man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{k} \right)$$

und sie divergiert, weil die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert und $\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{k}$ gilt für alle $k \geqq 1$.
Für $z = -\frac{1}{3}$ erhält man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \left(-\frac{2}{3}\right)^k + (-1)^k \frac{1}{k} \right). \tag{2}$$

Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent. Nach der Majoranten-Kriterium konvergiert absolut die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$, da die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergiert ($\frac{2}{3} < 1$). Aus 1.9.3 folgt, dass die Reihe (2) konvergiert.
Die Potenzreihe konvergiert dann für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{1}{3} \leqq z < \frac{1}{3}$ und sie divergiert für die restlichen reellen Zahlen.

(b) Die entsprechende Folge ist $a_k := \frac{k^k}{k!}$ und

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(k+1)^k k!}{(k+1)k!k^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also $\rho := \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Aufgabe H 83. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(z - \mathrm{i})^k$ **(b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 3^k k (z^2 + 4\mathrm{i}z - 4)^k$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Entwicklungspunkt der Potenzreihe ist $z_0 := \mathrm{i}$ und die entsprechende Folge ist $a_k := \frac{1}{k^2}$. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = 1.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also $\rho := \frac{1}{1} = 1$ (nach 1.14.7). Nach 1.14.4 konvergiert die Reihe absolut für alle z in $U_{z_0}(\rho) = U_{\mathrm{i}}(1)$.

Sei nun $w \in \mathbb{C}$ beliebig mit $|w - i| = 1$. In diesem Fall erhalten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \text{wobei } b_k := \frac{(w-i)^k}{k^2}. \tag{3}$$

Da $|b_k| = \frac{1}{k^2}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert absolut die Reihe aus (3). Daraus folgt, dass die Potenzreihe aus Teil (a) konvergiert auch auf dem Rand des Konvergenzkreises.

(b) Beachten Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k k(z^2 + 4\mathrm{i}z - 4)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k k(z + 2\mathrm{i})^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + 2\mathrm{i})^n,$$

wobei

$$a_n := \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der Entwicklungspunkt der Potenzreihe ist $z_0 := -2\mathrm{i}$. Nach $1.5.7$ und $1.5.10$ gilt es

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}} = \sqrt{3}.$$

Daraus folgt, dass $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{3}$. Nach dem Wurzel-Kriterium ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\rho := \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Sei nun $w \in \mathbb{C}$ beliebig mit $|w + 2i| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. In diesem Fall erhalten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad \text{wobei } b_n := a_n (w + 2\mathrm{i})^n. \tag{4}$$

Beachten Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} |b_{2k}| = \lim_{k\to\infty} |a_{2k}||w + 2\mathrm{i}|^{2k} = \lim_{k\to\infty} 3^k k \frac{1}{3^k} = \lim_{k\to\infty} k = +\infty.$$

Es folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ und die Reihe aus (4) divergiert. Deshalb divergiert die Potenzreihe aus Teil (b) auf dem Rand des Konvergenzkreises.

Aufgabe H 84. *Produkt von Potenzreihen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon U_1(0) \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k \quad \text{und} \quad g\colon U_1(0) \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

(a) Berechnen Sie $f \cdot g$ in geschlossener Form.

(b) Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe unter Verwendung von 1.14.11.4.

(c) Verwenden Sie 1.8.4 direkt, um erneut $f \cdot g$ als Potenzreihe zu schreiben.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $z \in U_1(0)$. Es gilt $|-z| = |z| < 1$. Aus 1.14.8 folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Also $(f \cdot g)(z) = \dfrac{1}{1+z} \cdot \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{1-z^2}$ für $z \in U_1(0)$.

(b) Für $z \in U_1(0)$ gilt es

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} (-1)^n 1^{k-n} \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^2\right)^n,$$

wobei

$$c_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(c) Es gilt $z \in U_1(0)$ genau dann, wenn $|z| < 1$ und in diesem Fall gilt auch $|z^2| < 1$. Deswegen ist

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^2\right)^n = \frac{1}{1-z^2}$$

für $z \in U_1(0)$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 85. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Lösungshinweise hierzu: *Induktionsanfang:* Die Gleichung gilt für $n = 1$, da

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}.$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Gleichung gilt für $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Induktionsschritt: Beachten Sie, dass

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{IV}}{=} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{(n+1)+1}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Gleichung $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Die Gleichung kann auch ohne Induktion bewiesen werden:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

18. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 86. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Beweisen Sie unter Verwendung von 1.14.18 die folgende Gleichung für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z) \cdot \big(16\,(\sin(z))^4 - 20\,(\sin(z))^2 + 5\big) = \sin(5z).$$

(b) Verwenden Sie (a), um alle Lösungen der Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ zu berechnen.

(c) Verwenden Sie die Substitution $t = x^2$, um damit nochmals alle Lösungen der Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ zu berechnen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$. Aus dieser Formel folgt, dass

$$\begin{aligned}(\sin(z))^2 &= -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2 = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} - 2\right),\\
(\sin(z))^4 &= \left(-\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} - 2\right)\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z}\right)^2 - 4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z}\right) + 4\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4z} + 2 - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} + 4\right) = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4z} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} + 6\right).\end{aligned}$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned}16(\sin(z))^4 - 20(\sin(z))^2 + 5 &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4z} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} + 6\right) + \left(5\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} + 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} - 10\right) + 5\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}4z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} + 1\end{aligned}$$

und $(\sin(z)) \cdot (16(\sin(z))^4 - 20(\sin(z))^2 + 5)$ ist gleich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} + 1\right)\\
=&\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}3z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5z} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\\
=&\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5z}\right) = \sin(5z).\end{aligned}$$

(b) Beachten Sie, dass $\sin(5z) = 0$ gilt für

$$5z = k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{k\pi}{5} \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

Sei $z := \frac{k\pi}{5}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wenn k kein Vielfaches von 5 ist, ist $\sin(z) \neq 0$ und $\sin(5z) = 0$, und aus der Gleichung im Teil (a) folgt, dass $16(\sin(z))^4 - 20(\sin(z))^2 + 5 = 0$. Deshalb sind $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ und $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ zwei unterschiedliche positive reelle Lösungen der Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ ($\frac{\pi}{5}$ und $\frac{2\pi}{5}$ sind zwei unterschiedliche Winkel im 1. Quadrant). In ähnlicher Weise sind $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ und $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ zwei unterschiedliche negative reelle Lösungen der Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$. Da die Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ maximal vier unterschiedliche komplexe Lösungen hat, haben wir alle Lösungen gefunden.

(c) Wir verwenden die Substitution $t = x^2$, um nochmals alle Lösungen der Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
16x^4 - 20x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 16(x^2)^2 - 20x^2 + 5 = 0 &\Leftrightarrow 16t^2 - 20t + 5 = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 16 \cdot 5}}{32} \Leftrightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{16 \cdot 5}}{32} \\
&\Leftrightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}} \vee x = -\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}.
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\left\{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}$.

Bemerkung: Aus den Teilen (a) und (b) ist es einfach zu folgern, dass $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ und $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Aufgabe H 87. *Differenzierbarkeit*

(a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g(0) = -1$.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := x \cdot g(x)$. Berechnen Sie $f'(0)$ unter Verwendung des Differentialquotienten. Berechnen Sie $f'(0)$ erneut, unter Verwendung der Produktregel.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = 0$.
Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := \begin{cases} g(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $f'(0)$ unter Verwendung des Differentialquotienten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen $f'(0)$ unter Verwendung des Differentialquotienten. Da g differenzierbar in 0 ist, ist g auch stetig in 0 und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{xg(x) - 0g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{xg(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = -1.$$

Es folgt, dass f differenzierbar in 0 ist und $f'(0) = -1$.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass f differenzierbar in 0 ist, ist es genug anzunehmen, dass g stetig in 0 ist (Differenzierbarkeit von g in 0 ist nicht notwendig). In diesem Fall gilt $f'(0) = g(0)$.

Da g differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist, kann man auch die Produktregel verwenden, um $f'(0)$ zu bestimmen:

$$f'(x) = (x)'g(x) + xg'(x) = g(x) + xg'(x)$$

und $f'(0) = g(0) + 0 \cdot g'(0) = g(0) = -1$.

(b) Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Beachten Sie, dass

$$0\leqq\left|\frac{g(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqq\left|\frac{g(x)}{x}\right|=\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right|.$$

Da

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right|=|g'(0)|=0$$

gilt, ist

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|=0=\left|\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

und $f'(0)=0$.

Aufgabe H 88. *Ableitungen*

Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f, von f' und von f''.

(a) $f(x)=\dfrac{x}{\cos(x)}$

(b) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$

(c) $f(x)=\sqrt{\ln(x)}$

(d) $f(x)=\sinh(\sin(x))$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der maximale reelle Definitionsbereich von f ist

$$D_f:=\{x\in\mathbb{R}\mid\cos(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Es gilt

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\cos(x)}\right)'=\frac{\cos(x)-x(-\sin(x))}{(\cos(x))^2}=\frac{1+x\tan(x)}{\cos(x)}=\sec(x)(1+x\tan(x))$$

und

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{1+x\tan(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left(\tan(x) + x\frac{1}{(\cos(x))^2}\right)\cos(x) - (1+x\tan(x))(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\tan(x)}{\cos(x)} + \frac{x}{(\cos(x))^3} + \frac{(1+x\tan(x))\tan(x)}{\cos(x)} = \frac{x}{(\cos(x))^3} + \frac{(2+x\tan(x))\tan(x)}{\cos(x)} \\
&= x(\sec(x))^3 + (2+x\tan(x))\tan(x)\sec(x).
\end{aligned}$$

Die maximale reelle Definitionsbereiche $D_{f'}$ von f' und $D_{f''}$ von f'' stimmen mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ überein.

(b) Der maximale reelle Definitionsbereich von f ist $D_f := \mathbb{R}$. Beachten Sie, dass

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x \geqq 1, \\ -x+1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

Die Funktion f ist nicht differenzierbar in 1, weil die Grenzwerte $\lim_{x\to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$ und $\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$ nicht übereinstimmen. Wir erhalten

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 1, \\ -1, & \text{falls } x < 1, \end{cases}$$

und

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x > 1, \\ 0, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

wobei die maximale reelle Definitionsbereiche $D_{f'}$ von f' und $D_{f''}$ von f'' beide gleich $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sind.

(c) Der maximale reelle Definitionsbereich von f ist

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} \mid \ln(x) \geqq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 1\} = [1, +\infty).$$

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \left(\sqrt{\ln(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$$

und der maximale reelle Definitionsbereich von f' ist $D_{f'} := (1, +\infty)$, da $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x-1} = +\infty$. Es gilt auch

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}\right)' = -\frac{(2x\sqrt{\ln(x)})'}{4x^2\ln(x)} = -\frac{2\sqrt{\ln(x)} + 2x\frac{1}{2}(\ln(x))^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}}{4x^2\ln(x)} \\
&= -\frac{2\sqrt{\ln(x)} + (\ln(x))^{-\frac{1}{2}}}{4x^2\ln(x)} = -\frac{2\ln(x)+1}{4x^2(\ln(x))^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

und der maximale reelle Definitionsbereich von f'' ist auch $D_{f''} := (1, +\infty)$.

(d) Der maximale reelle Definitionsbereich von f ist $D_f := \mathbb{R}$. Es gilt

$$f'(x) = \cosh(\sin(x))\cos(x)$$

und

$$f''(x) = (\cosh(\sin(x))\cos(x))' = \sinh(\sin(x))(\cos(x))^2 - \cosh(\sin(x))\sin(x).$$

Die maximale reelle Definitionsbereiche $D_{f'}$ von f' und $D_{f''}$ von f'' stimmen mit $D_f = \mathbb{R}$ überein.

Aufgabe H 89. *Produktregel*

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen. Verwenden Sie die Produktregel, um $(f \cdot g)^{(0)}$, $(f \cdot g)^{(1)}$, $(f \cdot g)^{(2)}$ und $(f \cdot g)^{(3)}$ zu bestimmen.

(b) Wir betrachten nun die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$. Zeigen Sie, dass für alle ganze Zahlen $n \geqq 0$ gilt:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = x^3 2^n \mathrm{e}^{2x} + 3nx^2 2^{n-1}\mathrm{e}^{2x} + 3n(n-1)x2^{n-2}\mathrm{e}^{2x} + n(n-1)(n-2)2^{n-3}\mathrm{e}^{2x}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir verwenden die Produktregel, um $(f \cdot g)^{(0)}$, $(f \cdot g)^{(1)}$, $(f \cdot g)^{(2)}$ und $(f \cdot g)^{(3)}$ zu bestimmen. Es gilt $(f \cdot g)^{(0)}(x) = (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = f^{(0)}(x)g^{(0)}(x)$,

$$(f \cdot g)^{(1)}(x) = (f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(0)}(x),$$

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(2)}(x) &= (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))' \\
&= (f(x)g''(x) + f'(x)g'(x)) + (f'(x)g'(x) + f''(x)g(x)) \\
&= f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x) \\
&= f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) + 2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(0)}(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(3)}(x) &= (f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x))' \\
&= (f(x)g'''(x) + f'(x)g''(x)) + 2\left(f'(x)g''(x) + f''(x)g'(x)\right) \\
&\quad + (f''(x)g'(x) + f'''(x)g(x)) \\
&= f(x)g'''(x) + 3f'(x)g''(x) + 3f''(x)g'(x) + f'''(x)g(x) \\
&= f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) + 3f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(3)}(x)g^{(0)}(x).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Regel für höhere Ableitungen eines Produkts von Funktionen ergibt sich aus der Produktregel mittels vollständiger Induktion:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x).$$

(b) Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Die Gleichung gilt für $n = 0$, da

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(0)}(x) &= f(x)g(x) = x^3 \mathrm{e}^{2x} \\ &= x^3 2^0 \mathrm{e}^{2x} + 3 \cdot 0 x^2 2^{0-1} \mathrm{e}^{2x} + 3 \cdot 0 \cdot (-1) x 2^{0-2} \mathrm{e}^{2x} + 0 \cdot (-1) \cdot (-2) 2^{0-3} \mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Gleichung gilt für $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Induktionsschritt: Beachten Sie, dass

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \left((f \cdot g)^{(n)}(x)\right)' \\ &\overset{\text{IV}}{=} \left(x^3 2^n \mathrm{e}^{2x} + 3n x^2 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x} + 3n(n-1) x 2^{n-2} \mathrm{e}^{2x} + n(n-1)(n-2) 2^{n-3} \mathrm{e}^{2x}\right)' \\ &= \left(x^3 2^{n+1} \mathrm{e}^{2x} + 3x^2 2^n \mathrm{e}^{2x}\right) + \left(3n x^2 2^n \mathrm{e}^{2x} + 3n \cdot 2x 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x}\right) \\ &\quad + \left(3n(n-1) x 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x} + 3n(n-1) 2^{n-2} \mathrm{e}^{2x}\right) + n(n-1)(n-2) 2^{n-2} \mathrm{e}^{2x} \\ &= x^3 2^{n+1} \mathrm{e}^{2x} + \left(3x^2 2^n \mathrm{e}^{2x} + 3n x^2 2^n \mathrm{e}^{2x}\right) + \left(3n \cdot 2x 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x} + 3n(n-1) x 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x}\right) \\ &\quad + \left(3n(n-1) 2^{n-2} \mathrm{e}^{2x} + n(n-1)(n-2) 2^{n-2} \mathrm{e}^{2x}\right) \\ &= x^3 2^{n+1} \mathrm{e}^{2x} + 3(1+n) x^2 2^n \mathrm{e}^{2x} + 3n(2 + (n-1)) x 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x} \\ &\quad + n(n-1)(3 + (n-2)) 2^{n-2} \mathrm{e}^{2x} \\ &= x^3 2^{n+1} \mathrm{e}^{2x} + 3(n+1) x^2 2^{(n+1)-1} \mathrm{e}^{2x} + 3(n+1)((n+1)-1) x 2^{(n+1)-2} \mathrm{e}^{2x} \\ &\quad + (n+1)((n+1)-1)((n+1)-2) 2^{(n+1)-3} \mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Gleichung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 90. *Determinante, Inverse Matrix*
Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A und entscheiden Sie, ob A invertierbar ist. Falls ja, bestimmen Sie die inverse Matrix von A.

Lösungshinweise hierzu: Um die Determinante von A zu berechnen, verwenden wir die Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}\det A &= (1 \cdot 1 \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot 2) + (0 \cdot 1 \cdot 0) - (2 \cdot 1 \cdot 0) - (0 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 1 \cdot 2) \\ &= 1 + 4 + 0 - 0 - 0 - 2 = 3.\end{aligned}$$

Da die Determinante von A nicht Null ist, ist A invertierbar.
Bemerkung: Für beliebig große Matrizen können wir den Entwicklungssatz von Laplace oder den Gauß-Algorithmus einsetzen, um die Determinante zu berechnen. Um dies zu veranschaulichen, verwenden wir den Entwicklungssatz von Laplace und wählen die erste Zeile:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot (1 - 2) = 3.$$

Um die inverse Matrix von A zu berechnen, lösen wir das lineare Gleichungssystem $AX = E_3$, wobei E_3 die Einheitsmatrix ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Die inverse Matrix von A ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

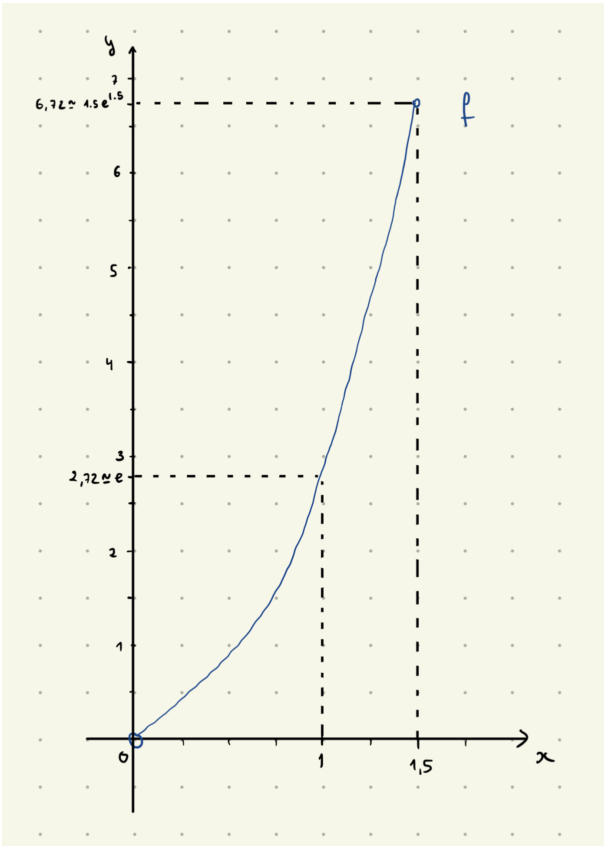
Aufgabe H 91. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

(a) Sei $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)\colon x \mapsto x\mathrm{e}^x$. Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $(\,0\,,\,1{,}5\,)$. Bestimmen Sie f'. Folgern Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie $f(1)$, $f^{-1}(\mathrm{e})$ und $(f^{-1})'(\mathrm{e})$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive differenzierbare Funktion. Sei zudem $f(1) = 3$ und $f'(1) = 5$. Bestimmen Sie $(f^{-1})'(3)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erhalten die folgende Skizze für f im Intervall $(\,0\,,\,1{,}5\,)$:



Anwendung der Produktregel auf f liefert $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$ für $x \in (0,+\infty)$.

Um zu zeigen, dass f eine Umkehrfunktion besitzt, müssen wir nachweisen, dass f bijektiv ist. Die Funktion f ist auf $(0,+\infty)$ definiert und sie ist stetig und streng monoton wachsend, da $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$ für alle $x > 0$ immer positiv ist. Daher ist f injektiv. Um die Surjektivität von f zu zeigen, betrachten wir die Grenzwerte von f, wenn x gegen $0+0$ und gegen $+\infty$ strebt:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x\mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty.$$

Daher nimmt f alle positiven Werte in $(0,+\infty)$ an. Somit ist f surjektiv.

Es gilt $f(1) = 1 \cdot \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ und $f^{-1}(\mathrm{e}) = f^{-1}(f(1)) = 1$. Schließlich bestimmen wir $(f^{-1})'(\mathrm{e})$ unter Verwendung der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Beachten Sie, dass $f'(1) = 2\mathrm{e} \neq 0$. Es folgt, dass

$$(f^{-1})'(\mathrm{e}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\mathrm{e}))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

(b) Um $(f^{-1})'(3)$ zu bestimmen, verwenden wir die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Beachten Sie, dass f bijektiv ist und sie ist an der Stelle 1 differenzierbar mit $f'(1) = 5 \neq 0$. Es folgt, dass f^{-1} differenzierbar in $f(1) = 3$ und

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}.$$

Aufgabe H 92. *Mittelwertsatz*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := \arctan(x)$.

(a) Sei x eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie, dass es eine Zwischenstelle $\xi \in (0, x)$ gibt mit $f'(\xi) = \frac{\arctan(x)}{x}$.

(b) Zeigen Sie mittels (a), dass die folgenden Ungleichungen gelten für $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

(c) Seien $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto g(x) := \frac{x}{1+x^2}$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto h(x) := x$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g und h im Intervall $[-2, 2]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $x > 0$. Um zu zeigen, dass es eine Zwischenstelle $\xi \in (0, x)$ gibt, für die $f'(\xi) = \frac{\arctan(x)}{x}$ gilt, verwenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Nach dem Mittelwertsatz, wenn eine Funktion g auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist, dann gibt es mindestens eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

Im vorliegenden Fall betrachten wir die Funktion f auf dem Intervall $[0, x]$. Wir überprüfen die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Die Funktion f ist stetig auf dem Intervall $[0, x]$, da der Arkustangens eine stetige Funktion ist. Die Funktion f ist differenzierbar auf dem offenen Intervall $(0, x)$, da der Arkustangens eine differenzierbare Funktion ist. Da die Voraussetzungen erfüllt sind, können wir den Mittelwertsatz anwenden und folgern, dass es eine Zwischenstelle $\xi \in (0, x)$ gibt mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x} = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

(b) Sei $x > 0$. Die Ableitung von f an der Stelle x ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Aus Teil (a) folgt, dass es $\xi \in (0, x)$ gibt mit

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

Beachten Sie, dass $\frac{1}{1+\xi^2} < 1$. Da $0 < \xi < x$ gilt, gilt auch $0 < 1 + \xi^2 < 1 + x^2$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+\xi^2}$. Wir erhalten die Ungleichungen:

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan(x)}{x} < 1$$

Wir multiplizieren die Ungleichungen mit x und erhalten:

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

Beachten Sie, dass $g(1) = \frac{1}{2}$, $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{2}{5}$ und $g(-2) = -\frac{2}{5}$. Wir erhalten die folgende Skizze für f, g und h im Intervall $[-2, 2]$:

Aufgabe H 93. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(-\cos(\pi x))}{\sin(\pi x)}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin(\pi x)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} (x+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\ln(-\cos(\pi)) = \ln(1) = 0$ und $\sin(\pi) = 0$, bleibt der Ausdruck $\frac{0}{0}$ unbestimmt. Wir können hier die Regel von L'Hospital anwenden, indem wir die Ableitungen von Zähler und Nenner betrachten:

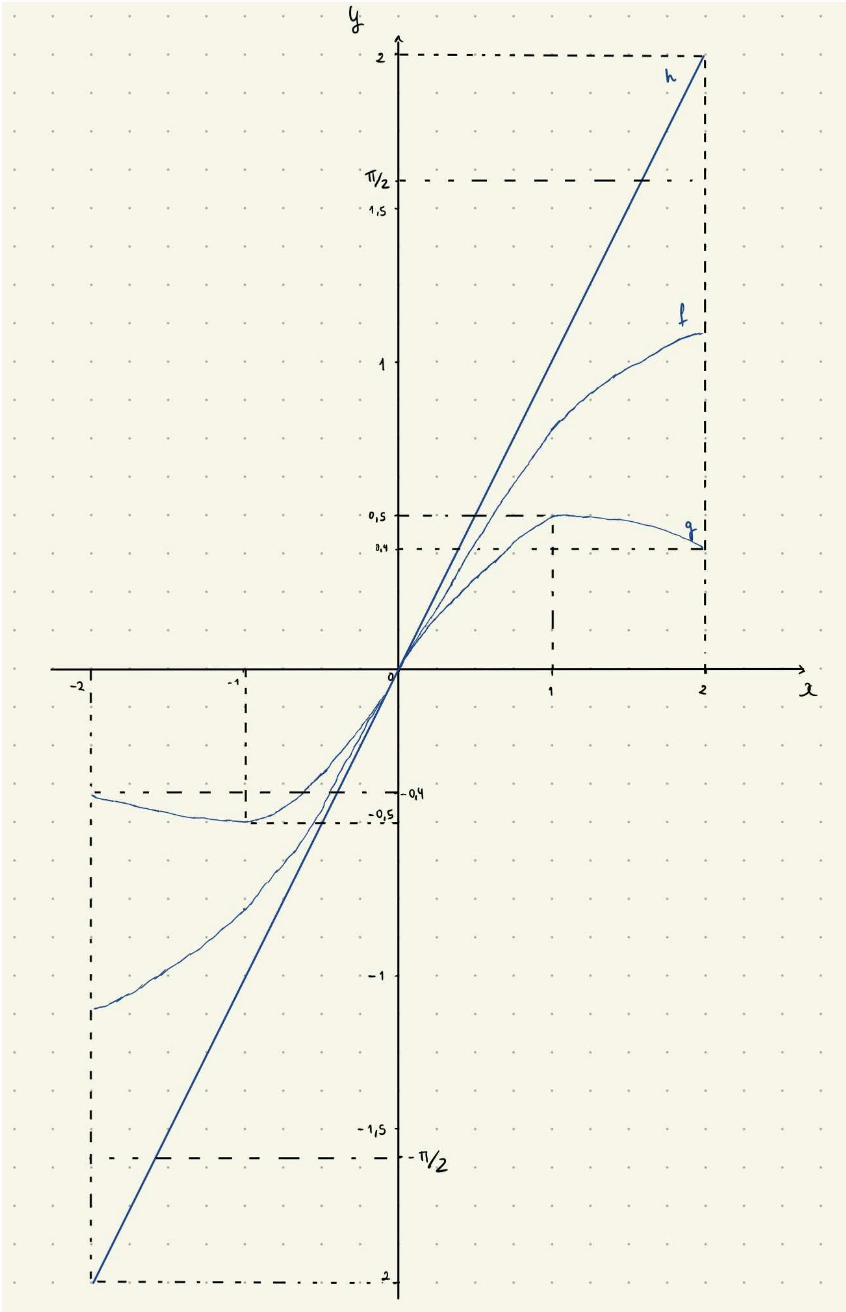
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(-\cos(\pi x))}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-\cos(\pi x))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi\sin(\pi x)}{-\cos(\pi x)}}{\pi\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1} -\frac{\sin(\pi x)}{(\cos(\pi x))^2}$$
$$= -\frac{0}{(-1)^2} = 0.$$

(b) Da $2^4 - 4^2 = 0$ und $\sin(2\pi) = 0$, bleibt der Ausdruck $\frac{0}{0}$ unbestimmt. Wir können hier die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 4^x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3 - \ln(4)4^x}{\pi\cos(\pi x)}$$
$$= \frac{4\cdot 8 - 16\ln(4)}{\pi} = \frac{16(2 - \ln(4))}{\pi}.$$

(c) Beachten Sie, dass $\sin(0) - 0 = 0$ und $0^3 = 0$. Wir wenden die Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} \quad \text{(erste Anwendung der Regel von L'Hospital, bleibt } \frac{0}{0}\text{)}$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{6x} \quad \text{(zweite Anwendung der Regel von L'Hospital, bleibt } \frac{0}{0}\text{)}$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\cos(x)}{6} \quad \text{(dritte Anwendung der Regel von L'Hospital)}$$
$$= -\frac{\cos(0)}{6} = -\frac{1}{6}.$$



Bemerkung: Alternativ könnte man die Regel von L'Hospital zweimal anwenden und dann argumentieren, dass

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{6x} = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = -\frac{1}{6} \cdot 1 = -\frac{1}{6}.$$

(d) Beachten Sie, dass

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x+1}}.$$

Da $\sin\left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$ und $\frac{1}{+\infty+1} = 0$, bleibt der Ausdruck $\frac{0}{0}$ unbestimmt. Wir wenden die

Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1.$$

Bemerkung: Für eine alternative Lösung beachten Sie, dass

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

und der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

hat der Form $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y}$, wenn wir $\frac{1}{x}$ als y betrachten. Dieser Grenzwert ist bekannt und hat den Wert 1. Es folgt, dass

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1\cdot 1 = 1.$$

Aufgabe H 94. *Taylorpolynome, Restglied nach Lagrange*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos(2x)$.

(a) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_2(f,x,0)$ und $T_4(f,x,0)$. Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$, $T_2(f,x,0)$ und $T_4(f,x,0)$ für $x\in[-2,2]$.

(b) Bestimmen Sie ein $C>0$ mit $|f(x)-T_4(f,x,0)| \leqq C|x|^5$ für $x\in[-1,1]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um die Taylorpolynome $T_2(f,x,0)$ und $T_4(f,x,0)$ zu berechnen, benötigen wir die Ableitungen der Funktion f an der Entwicklungsstelle $x_0 := 0$.

Die Ableitungen der Funktion $f(x) = \cos(2x)$ sind wie folgt:

$$f'(x) = -2\sin(2x), \quad f''(x) = -4\cos(2x), \quad f'''(x) = 8\sin(2x), \quad f''''(x) = 16\cos(2x).$$

Das Taylorpolynom $T_2(f,x,0)$ ist gegeben durch

$$T_2(f,x,0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

und $T_4(f,x,0)$ ist gegeben durch

$$T_4(f,x,0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4.$$

Setzen wir die Werte ein:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \cos(2\cdot 0) = \cos(0) = 1\\
f'(0) &= -2\sin(2\cdot 0) = -2\sin(0) = 0\\
f''(0) &= -4\cos(2\cdot 0) = -4\cos(0) = -4\\
f'''(0) &= 0\\
f''''(0) &= 16
\end{aligned}$$

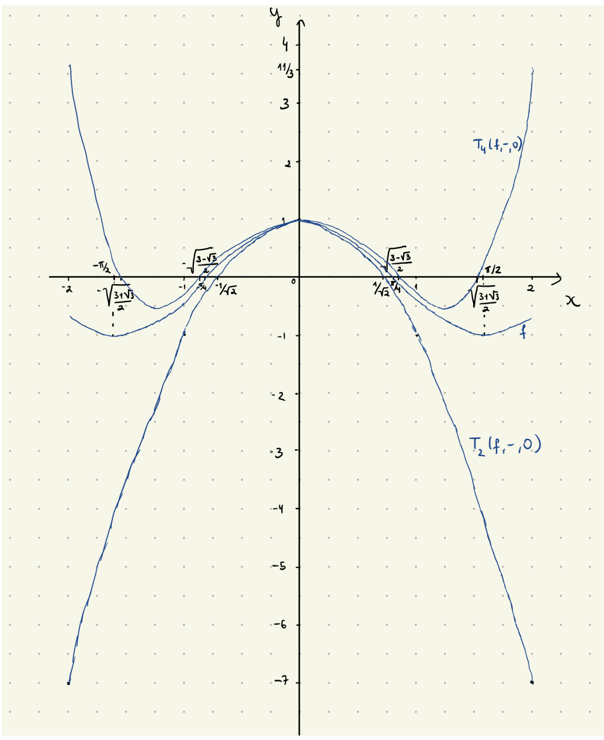
Somit erhalten wir

$$T_2(f,x,0) = 1 + 0\cdot x + \frac{-4}{2!}x^2 = 1 - 2x^2$$

und

$$T_4(f,x,0) = 1 + 0\cdot x + \frac{-4}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{16}{4!}x^4 = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4.$$

(b) Beachten Sie, dass $1-2x^2=0$ ist genau dann, wenn $x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. In ähnlicher Weise berechnen wir die Nullstellen von $1-2x^2+\frac{2}{3}\left(x^2\right)^2$. Es gilt $1-2x^2+\frac{2}{3}\left(x^2\right)^2 = 0$ genau dann, wenn $x \in \left\{-\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}\right\}$. Wir erhalten die folgende Skizze der Graphen von $f(x)$, $T_2(f,x,0)$ und $T_4(f,x,0)$ für $x\in[-2,2]$:



(c) Um diese Aufgabe zu lösen, verwenden wir den Satz von Taylor und betrachten ein Intervall $[a,b]$ so, dass $[-1,1] \subsetneqq (a,b)$. Wir können zum Beispiel das Intervall $[-2,2]$ wählen. Die Funktion f ist auf dem abgeschlossenen Intervall $[-2,2]$ stetig und auf dem offenen Intervall $(-2,2)$ fünfmal differenzierbar. Nach dem Satz von Taylor ist $f(x) - T_4(f,x,0)$ gleich dem Restglied nach Lagrange

$$R_5(f,x,0) = \frac{f^{(5)}(\vartheta_{x,0}x)}{5!}x^5$$

für alle $x \in (-2,2)$. Hier ist $\vartheta_{x,0}$ eine Zahl mit $0 \leqq \vartheta_{x,0} < 1$. Beachten Sie, dass

$$f^{(5)}(x) = (f^{(4)}(x))' = (16\cos(2x))' = -32\sin(2x)$$

und $|f^{(5)}(x)| \leqq 32$ gelten für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass

$$|f(x) - T_4(f,x,0)| = \left|\frac{f^{(5)}(\vartheta_{x,0}x)}{5!}x^5\right| = \frac{\left|f^{(5)}(\vartheta_{x,0}x)\right|}{5!}|x|^5 \leqq \frac{32}{5!}|x|^5 = \frac{4}{15}|x|^5$$

gilt für alle $x \in (-2,2)$ und insbesondere für alle $x \in [-1,1]$. Wenn $C := \frac{4}{15}$ ist, gilt die Ungleichung $|f(x) - T_4(f,x,0)| \leqq C|x|^5$ für alle $x \in [-1,1]$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. *Eigenwerte*

Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Lösungshinweise hierzu: Um die Eigenwerte der Matrix A zu berechnen, bestimmen wir das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_3)$ von A und wir lösen die Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &\overset{S_2 \leftarrow S_2 + S_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{S_3 \leftarrow S_3 + S_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4-\lambda & -\lambda \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{Z_1 \leftarrow Z_1 - Z_3}{=} (4-\lambda)\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\lambda(-1) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda).
\end{aligned}$$

Es gilt $\chi_A(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\lambda \in \{0,2,4\}$. Die Eigenwerte von A sind 0, 2 und 4. Eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für Diagonalisierbarkeit ist, dass das charakteristische Polynom der Matrix vollständig in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Da das charakteristische Polynom von A gleich $-\lambda(4-\lambda)(2-\lambda)$ ist, ist A diagonalisierbar.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 96. *Kurvendiskussion*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

(a) Bestimmen Sie f' und f''. Hat f Wendepunkte?

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (x - 1))$ sowie $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)$.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen zuerst eine Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{rrrl}
\big(& x^2 & -2x & +2\,\big) \div (x-1) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} \\
 & -x^2 & +x & \\
\hline
 & & -x & +2 \\
 & & x & -1 \\
\hline
 & & & 1
\end{array}
$$

Hieraus erhalten wir

$$
\begin{aligned}
f'\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \\
f''\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R}\colon x &\mapsto \frac{2}{(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

Wegen $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$ hat f' in keinem der offenen Intervalle $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$ lokale Extrema, folglich hat f keine Wendepunkte.

Alternativer Lösungsweg: Anstelle der Polynomdivision hätten wir auch die binomische Formel verwenden können, es gilt

$$
\frac{x - 2x + 2}{x - 1} = \frac{x - 2x + 1 + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2 + 1}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}
$$

(b) Da die relevanten Teilintervalle $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$ offen sind, müssen sämtliche lokalen Extrema in kritischen Stellen vorliegen. Sei daher $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0$, dann gilt

$$
(x-1)^2 = 1
$$

woraus wir die kritischen Punkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ erhalten. Wir müssen noch überprüfen ob dies Extrema sind (und ggf. welcher Art). Wir nutzen 2.7.3: Es gelten

$$
\begin{aligned}
f''(0) &= -2 \\
f''(2) &= 2
\end{aligned}
$$

somit liegen tätsachlich Extrema vor, in $x_1 = 0$ ein lokales Maximum, in $x_2 = 2$ ein lokales Minimum.

(c) Für $x > 2$ gilt $x - 1 > \frac{x}{2} > 0$ und somit $0 \leqq \frac{1}{x-1} \leqq \frac{2}{x}$, wir erhalten aus $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

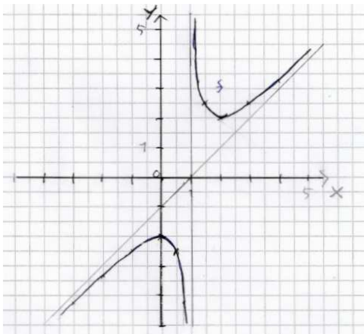
Da ferner $x - 1$ für $x \to 1 + 0$ „rechts" gegen 0 geht, folgt

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \underbrace{x-1}_{\to 0} + \frac{1}{x-1} = \infty$$

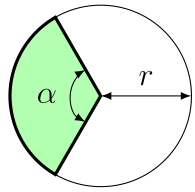
(d) Wir setzen einige Werte ein

$$\begin{array}{ccc} f(-3) = -\frac{17}{4} & f(-2) = -\frac{10}{3} & f(-1) = -\frac{5}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} & f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{17}{4} & f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{17}{4} \\ f(3) = \frac{5}{2} & f(4) = \frac{10}{3} & f(5) = \frac{17}{4} \end{array}$$

und erhalten mit obigen Überlegungen



Aufgabe H 97. *Extrema*



Ein Garten soll in Form eines Kreissektors mit Radius $r > 0$ und Zentriwinkel $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ angelegt und umzäunt werden, wie in der rechts stehenden Skizze veranschaulicht.

(a) Stellen Sie Flächeninhalt F und Zaunlänge Z als Funktionen in r und α dar.

(b) Sei nun $F := 42$.

(i) Bestimmen Sie die Zaunlänge $Z = Z(\alpha)$ in Abhängigkeit von α sowie die Nullstelle α_0 von $Z'(\alpha)$.

(ii) Überprüfen Sie: Für $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \alpha_0\right]$ ist Z streng monoton fallend, für $\alpha \in \left[\alpha_0, \frac{11\pi}{6}\right]$ ist Z streng monoton steigend. Überprüfen Sie ferner: $Z(\alpha)$ nimmt in α_0 ein globales Minimimum auf $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Fläche ergibt sich als $F = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha r^2}{2}$, zusammen mit aus der Schule bekannten Formeln für die Länge eines Kreisbogens erhalten wir:

$$\begin{aligned} F&\colon (0,\infty) \times \left[\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}\right] : (r,\alpha) \mapsto \frac{\alpha r^2}{2} \\ Z&\colon (0,\infty) \times \left[\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}\right] : (r,\alpha) \mapsto \underbrace{\alpha r}_{\substack{\text{Länge des}\\ \text{Kreisbogens}}} + \underbrace{2r}_{\substack{\text{Verbindungen zum}\\ \text{Mittelpunkt}}} \end{aligned}$$

(b) **(i)** Mit (a) erhalten wir aus der Fläche den von α abhängigen Radius als $r(\alpha) = \sqrt{\frac{2\cdot 42}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{21}{\alpha}}$. (Man beachte $\alpha > 0, r > 0$!) Hieraus erhaten wir nun

$$Z(\alpha) = \alpha r(\alpha) + 2r(\alpha) = (\alpha+2)\,2\sqrt{\frac{21}{\alpha}} = 2\sqrt{21}\left(\sqrt{\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} Z'(\alpha) &= 2\sqrt{21}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}^3}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

woraus wir sofort $\alpha_0 = 2$ erhalten.

(ii) Wir untersuchen zunächst Monotonie

- Für $\alpha < \alpha_0$ gilt $\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_0} = 0$, somit folgt wegen $\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{\alpha}} > 0$

$$Z'(\alpha) < 0 \quad \forall \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, 2\right],$$

die Funktion ist auf $\left[\frac{\pi}{6}, 2\right]$ streng monoton fallend.

- Für $\alpha > \alpha_0$ gilt $\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_0} = 0$, somit folgt

$$Z'(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \left[2, \frac{11\pi}{6}\right],$$

die Funktion ist auf $\left[2, \frac{11\pi}{6}\right]$ streng monoton steigend.

Es gilt in Folge der Monotonie folglich $Z(2) \leqq Z(\alpha)$ für alle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, 2\right]$ und $Z(2) \leqq Z(\alpha)$ für alle $\left[2, \frac{11\pi}{6}\right]$, also $Z(2) \leqq Z(\alpha)$ für alle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$, somit liegt in $\alpha_0 = 2$ ein globales Minimum von Z auf $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ vor.

Aufgabe H 98. *Taylorreihe*

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-2,2) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\ln(4-x^2)$.

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x) = (n-1)!\left((-1)^n \frac{1}{(2+x)^n} + \frac{1}{(2-x)^n}\right)$.

(b) Geben Sie die Taylorreihe $T(f, x, x_0)$ von f im Entwicklungspunkt $x_0 := \sqrt{3}$ an.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ von $T\left(f, x, \sqrt{3}\right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** $n = 1$: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) = f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln(4-x^2)\right) \\
&= \frac{2x}{4-x^2} = \frac{2+x-(2-x)}{(2-x)(2+x)} \\
&= \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} = (1-1)!\left((-1)^1 \frac{1}{(2+x)^1} + \frac{1}{(2-x)^1}\right)
\end{aligned}$$

IH Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(x) = (n-1)!\left((-1)^n \frac{1}{(2+x)^n} + \frac{1}{(2-x)^n}\right)$.

IS $n \to n+1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &\overset{\text{IH}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n-1)!\left((-1)^n \frac{1}{(2+x)^n} + \frac{1}{(2-x)^n}\right) \\
&= (n-1)!\left((-1)^n \frac{(-n)}{(2+x)^{n+1}} + \frac{(-n)}{(2-x)^{n+1}} \cdot (-1)\right) \\
&= n!\left((-1)^{n+1} \frac{1}{(2+x)^{n+1}} + \frac{1}{(2-x)^{n+1}}\right) \\
&= ((n+1)-1)!\left((-1)^{n+1} \frac{1}{(2+x)^{n+1}} + \frac{1}{(2-x)^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
T(f, x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\sqrt{3}\right)}{n!}\left(x-\sqrt{3}\right)^n \\
&\qquad f^{(0)}(\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -\ln(4-3) = 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\left((-1)^n \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\right)}{n!}\left(x-\sqrt{3}\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^n \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)^n
\end{aligned}$$

(c) Wir nutzen 1.14.7 für die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^n \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)^n$$

Sei daher $a_n := \frac{1}{n}\left((-1)^n \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\right)$, dann gilt:

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n} \cdot \left(1 + (-1)^n \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n\right),$$

insbesondere gelten wegen

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$$

$0 \leqq \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n \leqq \frac{1}{4}$, $\underbrace{1-\frac{1}{4}}_{=\frac{3}{4}} \leqq \left(1 + (-1)^n \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n\right) \leqq \underbrace{1+\frac{1}{4}}_{=\frac{5}{4}}$ und $a_n = |a_n|$. Wir erhalten wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}} &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt[n]{\frac{3}{4}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt[n]{\frac{5}{4}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}}
\end{aligned}$$

mittels dem Sandwichargument

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}} \leqq \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}}$$

den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2-\sqrt{3}},$$

woraus sich der Konvergenzradius $\rho = 2-\sqrt{3}$ ergibt.
Alternativer Lösungsweg: Wir hätten auch den Limes superior nutzen können: Es gilt

$$\begin{aligned}
0 \leqq |a_n| &= \frac{1}{n}\left|(-1)^n \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\right| \\
&\leqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\right) \quad \text{für alle } n, \qquad (5)
\end{aligned}$$

wobei für alle geraden n sogar $|a_n| = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\right)$ gilt. In diesem Falle erhalten wir wegen $2+\sqrt{3} > 2-\sqrt{3} > 0$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n} \leqq |a_n| \leqq \frac{2}{n} \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}$$

und somit wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}}$ für die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} .$$

Folglich ist $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ein Häufungspunkt von $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist nun a^* ein beliebiger Häufungspunkt der selben Folge, so existiert eine Teilfolge $\left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} a^* &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \\ &\overset{(5)}{\leqq} \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{\frac{1}{n_k}\left(\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{n_k}} + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^{n_k}}\right)} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

somit ist $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ auch der größte Häufungspunkt, wir erhalten aus

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

den Konvergenzradius $2-\sqrt{3}$.

Aufgabe H 99. *Ableitung und Integral*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und f_α die Funktion $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \sin\left(\pi\sqrt{(t-\alpha)^2}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $f_\alpha'(t)$ für $t \neq \alpha$.

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\alpha-0} \frac{f_\alpha(t)-f_\alpha(\alpha)}{t-\alpha}$ und $\lim\limits_{t\to\alpha-0} f_\alpha'(t)$.

(c) Sei nun $\alpha := 2$. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{1/2}^{2} f_2'(t)\,\mathrm{d}t$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir machen eine Fallunterscheidung:

$t < \alpha$: In diesem Falle gilt $\sqrt{(t-\alpha)^2} = |t-\alpha| = \alpha - t$, mithin

$$f_\alpha'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin\left(\pi(\alpha - t)\right) = -\pi\cos(\pi(\alpha - t))$$

$t > \alpha$: In diesem Falle gilt $\sqrt{(t-\alpha)^2} = |t-\alpha| = t - \alpha$, mithin

$$f_\alpha'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin\left(\pi(t-\alpha)\right) = \pi\cos(\pi(t-\alpha))$$

(b) Wir berechnen zuerst mit der Stetigkeit von $\cos$

$$\lim_{t\to\alpha-0} f'_\alpha(t) = \lim_{t\to\alpha-0} -\pi\cos(\pi(\alpha-t)) = -\pi\cos\left(\lim_{t\to\alpha-0}\pi(\alpha-t)\right) = -\pi\cos(0) = -\pi$$

Dies können wir nun für den Grenzwert des Differenzenquotienten nutzen, es gelten $\lim\limits_{t\to\alpha-0} t-\alpha = 0$ und

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\alpha-0}\sin\left(\pi\sqrt{(t-\alpha)^2}\right) &= \lim_{t\to\alpha-0}\sin\left(\pi(\alpha-t)\right) = \sin\left(\lim_{t\to\alpha-0}\pi(\alpha-t)\right)\\ &= \sin(0) = 0\end{aligned}$$

Mit l'Hospital erhalten wir daher wegen $f_\alpha(\alpha) = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\alpha-0}\frac{f_\alpha(t)-f_\alpha(\alpha)}{t-\alpha} &= \lim_{t\to\alpha-0}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{(t-\alpha)^2}\right)}{t-\alpha}\\ &\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{t\to\alpha-0}\frac{-\pi\cos(\pi(\alpha-t))}{1} = -\pi\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Alternativ hätten wir auch 2.5.11 nutzen können: $f_\alpha(t) = \sin(\pi\sqrt{(t-\alpha)^2}) = \sin(\pi|t-\alpha|)$ ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig auf jedem Intervall $(\beta,\alpha]$ mit beliebigem, aber festem $\beta<\alpha$. Ferner ist infolge der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{t\to\alpha-0}\sin\left(\pi\sqrt{(t-\alpha)^2}\right) = \ldots = 0$$

die Funktion $f'_\alpha\colon(\beta,\alpha)\to\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar in die stelle α mit $f'_\alpha(\alpha) = -\pi$, womit wir für den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{t\to\alpha-0}\frac{f_\alpha(t)-f_\alpha(\alpha)}{t-\alpha} = f'(\alpha) = -\pi$$

Ein Blick in den Beweis offenbart jedoch, dass wir dadurch ebenfalls auf l'Hospital zurückgegriffen hätten ...

(c) Nach 3.1.5 gilt:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{2} f'_2(t)\,\mathrm{d}t &= f_2(2) - f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{(2-2)^2}\right) - \sin\left(\pi\sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}\right)\\ &= 0 - \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1\end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 100. *Quadriken*

Bestimmen Sie die Typen folgender Quadriken in $\mathbb{R}^3$:

(a) $\mathcal{Q} := \left\{x\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; -3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_2-1=0\right\}$

(b) $\mathcal{A} := \left\{x\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+4x_2+2x_3-2=0\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben die Quadriken zuerst jeweils in der Form

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0 \right\}$$

und stellen die erweiterte Matrix auf.

(a) Hier ist $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -1$, die erweiterte Matrix lautet

$$A_{\mathsf{erw}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Entwickeln wir die Determinante nach der letzten Zeile, so erhalten wir

$$\det(A_{\mathsf{erw}}) = (-1)^{4+4} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (6 - (-3)) = 18$$

Die Matrix ist invertierbar, woraus $\operatorname{Rg} A_{\mathsf{erw}} = 4$ folgt. Analog folgt aus $\det(A) = -6$, dass $\operatorname{Rg} A = 3$ gilt, somit ist $\mathcal{Q}$ eine Mittelpunktsquadrik.

(b) Hier ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = -2$, die erweiterte Matrix lautet

$$A_{\mathsf{erw}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da die zweite Zeile eine Nullzeile ist und die erste Zeile ein Vielfaches der dritten, folgt sofort $\operatorname{Rg} A_{\mathsf{erw}} \leqq 2$. Da ferner die letzen beiden Spalten von A, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, linear unahbängig sind – das System $-2c_1 - c_2 = 0, -c_1 + c_2 = 0$ hat nur die Lösungen $c_1 = c_2 = 0$ – folgt

$$2 \leqq \operatorname{Rg} A \leqq \operatorname{Rg} A_{\mathsf{erw}} \leqq 2$$

also $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A_{\mathsf{erw}}$, es liegt eine kegelige Quadrik vor.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

M. Künzer

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 101. *Integration mit Partialbruchzerlegung*

(a) Schreiben Sie $p(x) = x^3 + 1$ als Produkt von Faktoren vom Grad 1 und Grad 2 ohne reelle Nullstellen.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nachdem wir durch Raten die Nullstelle $x = 1$ gefunden haben, erhalten wir durch Polynomdivision die Darstellung

$$p(x) = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Wegen $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ hat $x^2 - x + 1$ keine reellen Nullstellen, somit entspricht dies der gewünschten Darstellung.

(b) Durch Polynomdivision $(x^4) \colon (x^3 + 1)$ erhalten wir zunächst die Darstellung

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x - \frac{x}{x^3+1}$$

Der Ansatz

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

liefert nach Multiplikation von $(x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

$$x = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C,$$

was mittels Koeffizientenvergleich auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt. Wir berechnen

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ Z_2 + 2Z_3 : \\ -Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 \leftrightarrow Z_3: \\ Z_3 \leftrightarrow Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

und erhalten somit $C = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}, A = -\frac{1}{3}$ und somit die Darstellung

$$\frac{x}{x^3+1} = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1},$$

womit wir mit 3.4.9 und $\Delta = 1^2 - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln\left(|x+1|\right) - \frac{1}{6}\ln\left(\left|x^2-x+1\right|\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\Delta}}\right)\right] \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln\left(|x+1|\right) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]
\end{aligned}$$

erhalten.

Bemerkung: In diesem Falle ist das Weglassen der Betragsstriche beim 3. Summanden zulässig: Da $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 - x + 1$ stetig ist, gilt entweder $h(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $h(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder es existiert wenigstens ein $x \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = 0$ (Konsequenz des Nullstellensatzes von Bolzano). Wie bereits festgestellt, kann $h(x) = 0$ für kein reelles x gelten, und wir können aus $h(1) = 1 > 0$ somit $h(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgern, insbesondere ist $\left|x^2 - x + 1\right| = x^2 - x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H 102. *Partielle Integration und Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Substitution $t(x) = 1 - \sin(x)$ (und somit $t'(x) = -\cos(x)$) erhalten wir

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-t'(x)}{\sqrt{t(x)}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-2\sqrt{t}\right] = \left[-2\sqrt{1-\sin(x)}\right].$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhalten wir:

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,\mathrm{d}x = \left[-2\sqrt{1-\sin(x)}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\sqrt{1-\sin(\pi)} - \left(-2\sqrt{1-\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)}\right) \\
&= -2\sqrt{1-0} - \left(-2\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(4-2\sqrt{2}\right)} - 2 = \sqrt{4-2\sqrt{2}} - 2
\end{aligned}
$$

Alternativer Lösungsweg:
Wir berechnen mittels der Substitution $t(x) = 1 - \sin(x)$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} -\frac{t'(x)}{\sqrt{t(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{t\left(\frac{3}{4}\pi\right)}^{t(\pi)} -\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-2\sqrt{t}\right]_{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -2\sqrt{1} - \left(-2\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \sqrt{4-2\sqrt{2}} - 2
\end{aligned}
$$

(b) Zuerst schreiben wir $\cos^3(x)$ als $(\cos(x))^2\cos(x)$, woraus wir mit Hilfe der Identität $(\cos(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2$ und der Substitution $u(x) := \sin(x)$

$$
\begin{aligned}
\int (\cos(x))^3\,\mathrm{d}x &= \int (\cos(x))^2\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x) - (\sin(x))^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - \int (u(x))^2 \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [\sin(x)] - \int u^2\,\mathrm{d}u \\
&= [\sin(x)] - \left[\frac{1}{3}u\right] = \left[\sin(x) - \frac{1}{3}(\sin(x))^3\right]
\end{aligned}
$$

erhalten. Einsetzen der Grenzen liefert daher

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3\,\mathrm{d}x &= \left[\sin(x) - \frac{1}{3}(\sin(x))^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(1-\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

(c) Mit der Substitution $t(x) = \sqrt{x}$ -(und somit $t'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$) im ersten Schritt und partieller Integration im zweiten Schritt erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2} \sin\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x &= 2\cdot\int_0^{\pi^2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\pi^2} t'(x)t(x)\sin(t(x))\,\mathrm{d}x = 2\int_{t(0)}^{t\left(\pi^2\right)} t\sin(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[-t\cos(t)\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi -\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi + 2\left[\sin(t)\right]_0^\pi = 2\pi
\end{aligned}
$$

(d) Durch partielle Integration (3.2.2 mit $f(x) = x$ und $g(x) = \arcsin(x)$) und anschließender Substitution ($\varphi(x) = 1 - x^2$)) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [x\arcsin(x)] + \int \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= [x\arcsin(x)] + \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = [x\arcsin(x)] + [\sqrt{\varphi}] \\
&= \left[x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right] .
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 103. *Integration durch Substitution*

(a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{2\sinh(x)}{1+(\sinh(x))^2}\,\mathrm{d}x$ mittels Substitution.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_1^{3} \frac{2\sinh(\ln(x))}{x+x(\sinh(\ln(x)))^2}\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von (a).

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt nach 3.3.1 und 2.2.12

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2\sinh(x)}{1+(\sinh(x))^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sinh(x)}{(\cosh(x))^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad u(x) := \cosh(x),\ u'(x) = \sinh(x) \\
&= \int \frac{2u'(x)}{(u(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{u^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{2}{u}\right],
\end{aligned}
$$

woraus wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\ln(3)} \frac{2\sinh(x)}{1+(\sinh(x))^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{u}\right]_{\cosh(0)}^{\cosh(\ln(3))} &= -\frac{2}{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\ln(3)} + \mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)} + \frac{2}{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\right)} \\
&= -\frac{4}{3+\frac{1}{3}} + 2 = -\frac{12}{10} + 2 = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

erhalten.

(b) Für die Substitution $u(x) := \ln(x)$ gilt $u'(x) = \frac{1}{x}$, womit wir nach 3.3.3 und unseren Rechnungen in (a)

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{2\sinh(\ln(x))}{x+x(\sinh(\ln(x)))^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 \frac{2\sinh(u(x))}{1+(\sinh(u(x)))^2}\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{u(1)}^{u(3)} \frac{2\sinh(u)}{1+(\sinh(u))^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\ln(3)} \frac{2\sinh(u)}{1+(\sinh(u))^2}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

erhalten.

(c) Es gilt:

$$\sinh(\ln(x)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\ln(x)} - \mathrm{e}^{-\ln(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{2\sinh(\ln(x))}{x + x(\sinh(\ln(x)))^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x + x\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{\frac{1}{x}\left(x^2-1\right)}{x + x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 \frac{x^2-1}{x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{4\left(x^2-1\right)}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\cdot\int_1^3 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

woraus wir

$$\int_1^3 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{2\sinh(\ln(x))}{x + x(\sinh(\ln(x)))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$$

erhalten.

Aufgabe H 104. *Unbestimmte Integrale*
Bestimmen Sie

(a) $\int \sqrt{\frac{t^4}{1+t^6}}\,\mathrm{d}t$ **(b)** $\int (\sin(x))^2\,\mathrm{d}x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt wegen $t^4 = (t^2)^2$ und $t^2 \geqq 0$ für $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\tfrac{t^4}{1+t^6}}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^6}}\,\mathrm{d}t \\ & x(t) = t^3, \to x'(t) = 3t^2 \\ &= \int \frac{\frac{1}{3}x'(t)}{\sqrt{1+(x(t))^2}}\,\mathrm{d}t \overset{3.3.1}{=} \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(x(t))\right] = \left[\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}\left(t^3\right)\right]\end{aligned}$$

(b) Es gilt mit dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}\int (\sin(x))^2\,\mathrm{d}x &\overset{3.2.2}{=} [\sin(x)\,(-\cos(x))] - \int \cos(x)\,(-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= [\sin(x)\,(-\cos(x))] + \int (\cos(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &= [\sin(x)\,(-\cos(x))] + \int 1 - (\sin(x))^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

woraus wir

$$2\int(\sin(x))^2\,\mathrm{d}x = [\sin(x)\,(-\cos(x))] + \int 1\,\mathrm{d}x,$$

mithin

$$\int(\sin(x))^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\right]$$

erhalten.

Frischhaltebox

Aufgabe H 105.

Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2(1+(-1)^n)}$ auf Konvergenz.

Lösungshinweise hierzu: Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{4n+2(1+(-1)^n)}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genügt folgenden Kriterien:

- Sie ist alternierend: Für gerades n gilt $a_n = \frac{(-1)^n}{4n+2(1+(-1)^n)} = \frac{1}{4n+2(1+1)} = \frac{1}{4(n+1)} > 0$, für ungerades n hingegen gilt $a_n = \frac{(-1)}{4n+2(1-1)} = -\frac{1}{4n} < 0$.
- Die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton: Für $n \geqq 0$ gilt wegen $0 \leqq 1+(-1)^k \leqq 2$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}|a_{n+1}| &= \frac{1}{4(n+1)+2(1+(-1)^{n+1})} \leqq \frac{1}{4n+4}\\ &= \frac{1}{4n+2\cdot 2} \leqq \frac{1}{4n+2\,(1+(-1)^n)} = |a_n|\end{aligned}$$

- Sie ist eine Nullfolge: Für $n > 0$ gilt $0 \leqq |a_n| = \frac{1}{4n+2(1+(-1)^n)} \leqq \frac{1}{4n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, somit folgt die Behauptung aus einem Sandwich-Argument.

Die Reihe konvergiert daher nach dem Leibnizkriterium.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 106. *Majoranten- und Grenzwertkriterium*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)+2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Lösungshinweise hierzu: Über die Konvergenz für (a),(b),(c) können wir mit Hilfe von Satz 3.7.5, für (d) mit Hilfe von Satz 3.7.11, entscheiden.

(a) Für $x \geqq 0$ gilt $1+x^2 \geqq 1$ und daher $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ für $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ferner gilt

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^y g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} [\arctan(x)]_0^y = \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Da somit $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, konvergiert auch $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.

(b) Wir betrachten $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dann gilt wegen $-1 \leqq \cos(x) \leqq 1$ die Ungleichung $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$. In Beispiel 3.7.8 Wir haben gesehen, dass $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ divergiert, und wegen $f(x) \geqq g(x)$ divergiert $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)+2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ebenfalls.

(c) Wir betrachten $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\,x}$, dann gilt für $x \geqq 1$ wegen $x \leqq x^2$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \leqq f(x)$$

Gemäß Beispiel 3.7.8 divergiert $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$, daher auch $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(d) Für $g(x) = \frac{1}{x}$ gilt:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{\cos(x)}{x}}{\frac{1}{x}} \lim_{x\to 0+0} \cos(x) = 1 > 0$$

Da $\displaystyle\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$ divergiert (es gilt $\lim\limits_{\alpha\to 0+0} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+0} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln(\alpha) = \infty$) divergiert nach 3.7.11 auch $\displaystyle\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe H 107. *Uneigentliche Integrale I*

Bestimmen Sie $\displaystyle\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$ und $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen zunächst eine Stammfunktion von $\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}$ mittels der Substitution $x(t) := \frac{1}{\sin(t)}$, für welche $x'(t) = \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}$ gilt:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t &= \int \mathrm{e}^{x(t)} \cdot (-x'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{x}] = \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}}\right]\end{aligned}$$

Für $x \in (\pi, 2\pi)$ gilt $\sin(x) \neq 0$, womit die Funktion $(\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}$ nach Satz 1.12.4 (3,4) stetig ist. Insbesondere existiert auf jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subsetneq (\pi, 2\pi)$ das Integral $\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$. Wegen $\lim\limits_{\alpha\to\pi+0} \sin(\alpha) = 0$ sowie $\sin(\alpha) < 0$ gilt $\lim\limits_{\alpha\to\pi+0} \frac{1}{\sin(\alpha)} = -\infty$ für $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ und somit:

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\pi+0} \int_\alpha^{\frac{3}{2}\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\alpha\to\pi+0} \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}}\right]_\alpha^{\frac{3}{2}\pi} = \lim_{\alpha\to\pi+0} -\mathrm{e}^{\frac{1}{-1}} + \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(\alpha)}} \\ &= \lim_{u\to-\infty} -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{u} = -\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Insbesondere existiert der Grenzwert und nach Definition 3.7.1 gilt

$$\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1}$$

Analog erhalten wir mit $\lim\limits_{\beta\to2\pi-0} \frac{1}{\sin(\beta)} = -\infty$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\beta\to2\pi-0} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\beta} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{\beta\to2\pi-0} \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\beta} \\ &= \lim_{\beta\to2\pi-0} -\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(\beta)}} + \mathrm{e}^{-1} = \lim_{u\to-\infty} -\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t &= \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1} = 0\end{aligned}$$

Aufgabe H 108. *Integration und Potenzreihen*

Gegeben seien die Funktionen $f, g, h\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(s) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}, \qquad g(s) = \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad h(s) = \int_0^s g(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Bestimmen Sie $g(s)$ als Potenzreihe.

(b) Bestimmen Sie $h(s)$ als Potenzreihe.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $h(s)$.

(d) Finden Sie geschlossene Darstellungen für $g(s)$ und $f(s)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen Satz 3.8.4 und berechnen

$$g(s) = \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k-1}(s-0)^{k-2+1} = \sum_{k=3}^{\infty} k s^{k-1}$$

(b) Wir nutzen erneut Satz 3.8.4:

$$\begin{aligned} h(s) &= \int_0^s g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k} s^k \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} s^k \end{aligned}$$

(c) Wegen $|s| < 1$ können wir die Formel für die geometrische Reihe nutzen, es ist:

$$h(s) = \sum_{k=3}^{\infty} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k - s^2 - s^1 - 1 = \frac{1}{1-s} - s^2 - s - 1$$

(d) Gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung müssen wir nur ableiten:

$$\begin{aligned} g(s) = h'(s) &= \frac{1}{(1-s)^2} - 2s - 1 \\ f(s) = g'(s) &= \frac{2}{(1-s)^3} - 2 \end{aligned}$$

Aufgabe H 109. *Uneigentliche Integrale II*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (\ln(3x))^2\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{32}{(x^2-4)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen mehrmals Integration, $\int g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)] - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$, mit $g(x) = x$:

$$\begin{aligned} \int (\ln(3x))^2\,\mathrm{d}x &= \left[x\cdot(\ln(3x))^2\right] - \int x \cdot 2\ln(3x)\cdot\frac{3}{3x}\,\mathrm{d}x = \left[x\cdot(\ln(3x))^2\right] - \int 2\ln(3x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x\cdot(\ln(3x))^2\right] - \left([2x\ln(3x)] - \int 2x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left[x\cdot(\ln(3x))^2 - 2x\ln(3x) + 2x\right], \end{aligned}$$

wobei wir die Betragsstriche im Logarithmus nicht benötigen, da wir uns für die Stammfunktion im Intervall $(0,2)$ interessieren, insbesondere also $|3x| = 3x$ gilt. Entsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^2 (\ln(3x))^2 \,\mathrm{d}x &= \lim_{\alpha\to 0+0} \int_\alpha^2 (\ln(3x))^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0+0} \left[x\cdot(\ln(3x))^2 - 2x\ln(3x) + 2x\right]_\alpha^2 \\ &= \lim_{\alpha\to 0+0} 2\cdot(\ln(6))^2 - 4\ln(6) + 4 - \underbrace{\alpha\cdot(\ln(3\alpha))^2}_{\to 0} - \underbrace{2\alpha\ln(3\alpha)}_{\to 0} + \underbrace{2\alpha}_{\to 0} \\ &= 4 + 2(\ln(6))^2 - 4\ln(6),\end{aligned}$$

wobei wir den Grenzwert $\lim\limits_{\alpha\to 0+0} 2\alpha\ln(3\alpha) \overset{\beta:=3\alpha}{=} \lim\limits_{\beta\to 0+0} \frac{2}{3}\beta\ln(\beta) = 0$ aus Beispiel 2.5.8 erhalten. Den Grenzwert $\lim\limits_{\alpha\to 0+0} \alpha\cdot(\ln(3\alpha))^2$ erhalten wir hierbei auf analoge Weise, in dem wir Beispiel 2.6.8 erweiteren: Für $p > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0} x^p\ln(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(x)}{x^{-p}} &\overset{„\frac{-\infty}{\infty}“}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{x^{-1}}{-px^{-p-1}} \\ &= \lim_{x\to 0+0} -\frac{1}{p}x^p = 0\end{aligned}$$

Durch Wahl von $p = \frac{1}{2}$ und $\beta := 3\alpha$ folgt:

$$\lim_{\alpha\to 0+0} \sqrt{\alpha}\ln(3\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\beta}\ln(\beta) = 0$$

und entsprechend

$$\lim_{\alpha\to 0+0} \alpha\cdot(\ln(3\alpha))^2 = \lim_{\alpha\to 0+0} \left(\sqrt{\alpha}\cdot\ln(3\alpha)\right)^2 = 0$$

(b) Wir faktorisieren zunächst den Nenner in lineare und quadratische Terme ohne reelle Nullstellen:

$$(x^2-4)^2 = ((x-2)(x+2))^2 = (x-2)^2\,(x+2)^2$$

Nun machen wir eine Partialbruchzerlegung:
Der Ansatz $\dfrac{32}{(x-2)^2(x+2)^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{x-2} + \dfrac{D}{(x-2)^2}$ führt auf

$$\begin{aligned}32 &= A(x+2)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x-2)(x+2)^2 + D(x+2)^2 \\ &= (Ax+2A+B)(x^2-4x+4) + (Cx-2C+D)(x^2+4x+4) \\ &= (A+C)x^3 + (-2A+B+2C+D)x^2 - 4(A+B+C-D)x + 4(2A+B-2C+D)\end{aligned}$$

was auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

führt. Wir nutzen Gauß:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2+2Z_1: \\ Z_3-Z_1: \\ Z_4-2Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3-Z_2: \\ Z_4-Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+1/8Z_4: \\ Z_2+1/2Z_3+1/4Z_4: \\ Z_3-1/2Z_4: \\ -1/8Z_4: \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 \leftrightarrow -Z_4: \\ Z_4 \leftrightarrow -1/2Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Berücksichtigen wir erneut, dass im betrachteten Intervall $(4,\infty)$ die Identitäten $|x-2| = x-2$ und $|x+2| = x+2$ gelten, erhalten wir hieraus:

$$\begin{aligned} \int \frac{32}{\left(x^2-4\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(x+2) - \frac{2}{x+2} - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2}\right] \\ &= \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2}\right] \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \int_4^\infty \frac{32}{\left(x^2-4\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2}\right]_4^r \\ &= \lim_{r\to\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{r+2}{r-2}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{r+2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{r-2}}_{\to 0} - \left(\ln(3) - \frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{4}{3} - \ln(3) \end{aligned}$$

wobei wir für den ersten Summanden $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{r+2}{r-2} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1+\frac{2}{r}}{1-\frac{2}{r}} = 1$ und die Stetigkeit des Logarithmus ausgenutzt haben.

Frischhaltebox

Aufgabe H 110.

Sei $E \subsetneqq \mathbb{R}^3$ die Spiegelebene der Spiegelung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} x$.

Schreiben Sie E

(a) als Aufspann.

(b) in Hessescher Normalform.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ebene besteht aus den Fixpunkten der Spiegelung, wir bestimmen also den Lösungsraum der Fixpunktgleichung $(A - \mathrm{E}_3)v = 0$ über das äquivalente System $(9A - 9\mathrm{E}_3)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & -16 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -Z_1: \\ Z_2 + Z_1: \\ Z_3 - 4Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Woraus wir

$$E = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(b) Einen orthogonal zur Spiegelebene stehenden Vektor v erhalten wir über das Kreuzprodukt der aufspannenden Vektoren:

$$v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Normierung ergibt:

$$n = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{16 + 16 + 256}} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{1 + 1 + 16}} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da wegen $0 \in E$ der Abstand der Ebene zum Ursprung ebenfalls 0 und die Orientierung des Normalenvektors $n = \frac{v}{|v|}$ in diesem Falle damit irrelevant ist, erhalten wir schließlich

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{3\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{3\sqrt{2}} x_2 + \frac{4}{3\sqrt{2}} x_3 = 0 \right\}.$$

Alternativer Lösungsweg:
Wir nutzen aus, dass die senkrecht zur Spiegelebene stehenden Vektoren genau die Eigenvektoren der Matrix $A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert -1 (oder der Nullvektor) sind: Da A eine Spiegelung beschreibt sind die Eigenwerte 1 (doppelt) und -1, da A symmetrisch ist, ist A ferner orthogonal diagonalisierbar. Somit sind die Vektoren des Eigenraumes $V(-1)$ orthogonal zu denen des Eigenraumes $V(-1)$. Wir berechnen letzteren, indem wir eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems $Av = -v$ bzw. des äquivalenten Systems $(9A + 9\mathrm{E}_3)v = 0$ bestimmen:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 17 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ 17Z_2 - Z_1: \\ 17Z_3 + 4Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 17 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 288 & 72 & 0 \\ 0 & 72 & 18 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{72}Z_2: \\ Z_3 - \frac{1}{4}Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 17 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{4}{17}Z_1 - \frac{1}{17}Z_2: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

womit wir als einen Eigenvektor zum Eigenwert 1

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

erhalten. Da $0 \in E$, ist der Abstand der Ebene zum Ursprung ebenfalls 0 und die Orientierung des Normalenvektors $n = \frac{w}{|w|}$ damit irrelevant, wir erhalten mit $|w| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{3\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{3\sqrt{2}}x_2 + \frac{4}{3\sqrt{2}}x_3 = 0 \right\}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 111. *Topologie*

Wir betrachten die Menge

$$M \;=\; \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqq x \leqq 1,\; -f(x) < y \leqq f(x) \right\},$$

wobei $f(x) = (1+x)(1-x)$.

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

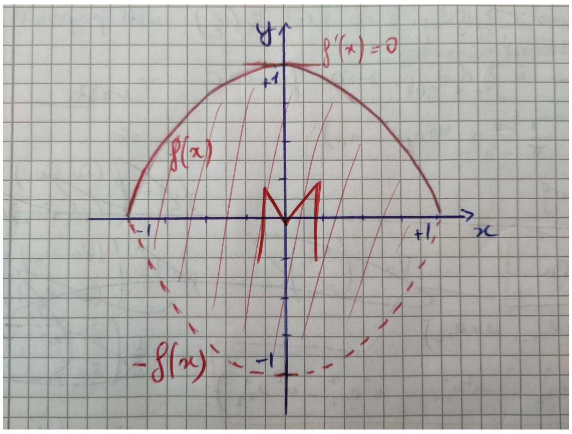
(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$ und M° und ∂M.

(c) Untersuchen Sie, ob M beschränkt ist.

(d) Untersuchen Sie, ob M kompakt ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)



(b) Wir haben

$$\overline{M} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqq x \leqq 1,\; -f(x) \leqq y \leqq f(x) \right\}.$$

Desweiteren ist

$$M^\circ = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\; -f(x) < y < f(x) \right\}.$$

(c) Für alle $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in M$ gilt $|y| \leqq f(x) \leqq 1$ und $|x| \leqq 1$, und wir haben also $|x|^2 + |y|^2 \leqq 2$. Also, $M \subseteqq U_{\sqrt{2}}(0)$ und folglich ist M beschränkt.

(d) Da M in $\overline{M}$ echt enthalten ist, ist M nicht abgeschlossen. Also ist M nicht kompakt.

Aufgabe H 112. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie das Integral-Vergleichskriterium anwenden:

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

(b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [3, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Diese Funktion ist positiv, und ist monoton fallend weil

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} < 0.$$

Also können wir das Integral-Vergleichskriterium anwenden. Wir berechnen

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\beta \to +\infty} \left[-\frac{\ln(x) + 1}{x} \right]_3^{\beta} < \infty,$$

also konvergiert das Integral und damit auch die Reihe.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [5, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}.$$

Diese Funktion ist positiv, und ist monoton fallend weil $x \mapsto x \ln(x) \ln(\ln(x))$ monoton steigend ist. Also können wir das Integral-Vergleichskriterium anwenden. Wir berechnen, mit $u = \ln(\ln(x))$ und $\mathrm{d}\, u = \mathrm{d}\, x/(x \ln(x))$,

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} \,\mathrm{d}\, x = \int_{\ln(\ln(5))}^{+\infty} \frac{1}{u} \,\mathrm{d}\, u,$$

also divergiert das Integral und damit auch die Reihe.

Aufgabe H 113. *Funktion in mehreren Variablen I*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t von f für $t = 0$ und $t = 1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$

(c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -\frac{1}{5}$

(d) Kann f in $\binom{0}{0}$ stetig fortgesetzt werden?

Lösungshinweise hierzu:

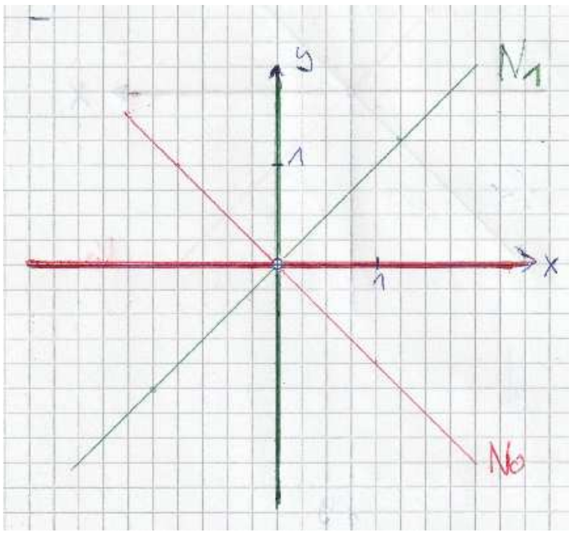
(a) Wir bestimmen zunächst die Niveaulinien, indem wir die Funktion mit dem entsprechenden Niveau gleichstzen. Für das Niveau $t = 0$ erhalten wir

$$\frac{xy+y^2}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow xy + y^2 = y(x+y) = 0$$

und somit $N_0 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \,\middle|\, y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -x \right\}$. Für das Niveau $t = 1$ erhalten wir ähnlich

$$\frac{xy+y^2}{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow xy + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow xy - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(y-x) = 0$$

und somit $N_1 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \,\middle|\, x = 0 \quad \text{oder} \quad y = x \right\}$.



(b) Wir machen uns Aufgabenteil **(a)** zunutze, indem wir eine Folge finden, für welche jedes Folgenglied auf der Niveaulinie N_1 liegt. Dies ist zum Beispiel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \binom{0}{1/n}$ erfüllt.

(c) Wir nähern uns dem Ursprung entlang einer Ursprungsgeraden, d.h. wir machen den Ansatz $b_n = \binom{1/n}{\lambda/n}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in f ein, so erhalten wir

$$f(b_n) = \frac{\lambda\frac{1}{n^2} + \lambda^2\frac{1}{n^2}}{+\frac{1}{n^2} + \lambda^2\frac{1}{n^2}} = \frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda^2} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{5}.$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner liefert

$$\lambda + \lambda^2 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda^2 \Leftrightarrow 6\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$$

was zu den Lösungen $\lambda = -\frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{3}$ führt. Somit ist durch $b_n = \binom{1/n}{-1/2n}$ eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften gegeben.

(d) Mit **(b)** und **(c)** kann f nicht stetig in $\binom{0}{0}$ fortgesetzt werden, da ansonsten jede gegen $\binom{0}{0}$ konvergente Folge den gleichen Grenzwert liefern müsste, wenn f auf dieser ausgewertet wird.

Aufgabe H 114. *Funktion in mehreren Variablen II*

Gegeben ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{x^2+2x}{y-1}$.

Dabei sei D die Menge aller Elemente von $\mathbb{R}^2$, für welche der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinie zum Niveau $t = 1$ für $\binom{x}{y}$ im Bereich $[-3, 1] \times [0, 2]$.

(c) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(d) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 1$.

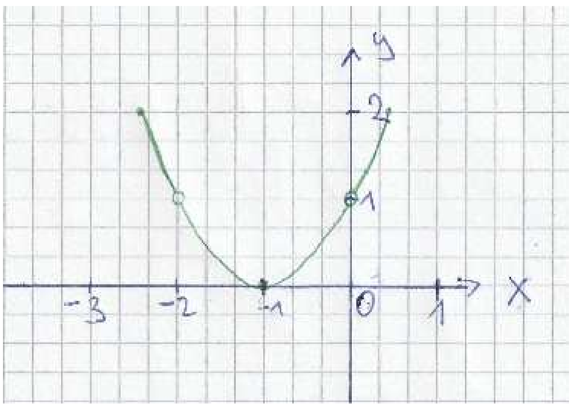
Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \neq 1 \right\}$.

(b) Gleichsetzen des Funktionsausdrucks mit dem Niveau $t = 1$ liefert

$$\frac{x^2+2x}{y-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = y - 1 \Leftrightarrow y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Es handelt sich also um eine Parabel mit Scheitelpunkt $\binom{-1}{0}$:



(c) Da der Zähler nur von x abhängt können wir eine Folge wählen, für welche dieser stets 0 ist und welche gegen $\binom{0}{1}$ konvergiert. Dies ist zum Beispiel für $a_n = \binom{0}{1+1/n}$ erfüllt, denn

$$f(a_n) = \frac{0^2 + 2\cdot 0}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und folglich auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(d) Wir benutzen **(b)** und nähern uns dem Punkt $\binom{0}{1}$ auf der Niveaulinie zum Niveau $t = 1$. Als Folge wählen wir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \binom{1/n}{(1+1/n)^2}$. Diese liegt auf der Niveaulinie und somit gilt $f(b_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit insbesondere auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 115.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{n^2}{1+n^2}$ und Grenzwert a. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, für welche $|a_n - a| < 10^{-4}$ ist für $n \geqq n_0$.

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$a_n = \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$$

und somit $a = 1$, da der Nenner gegen 1 strebt für $n \to \infty$. Wir betrachten nun die Differenz

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2}{1+n^2} - 1\right| = \frac{1}{1+n^2}.$$

Da $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, reicht es das n_0 zu bestimmen, für welches erstmals gilt:

$$\frac{1}{1+n_0^2} < 10^{-4}.$$

Auflösen nach n_0 führt zu

$$n_0^2 > 10^4 - 1.$$

Die erste natürliche Zahl, welche diese Ungleichung erfüllt ist somit $n_0 = 100 = 10^2$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 116. *Gradient und Hessematrix*
Gegeben sind die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{e}^{\sin(2x_1 + x_2 x_3)},$$

der Punkt $P = (\pi, \pi, -\frac{1}{2})^\mathsf{T}$ und der Vektor $v = (\pi, 0, -\pi)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie:
(a) $\operatorname{grad} f(x_1, x_2, x_3)$ **(b)** $\partial_v f(P)$ **(c)** $\mathrm{H}f(x_1, x_2, x_3)$ **(d)** $\mathrm{H}f(P)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2, x_3) = \cos(2x_1 + x_2 x_3)\mathrm{e}^{\sin(2x_1 + x_2 x_3)} \begin{pmatrix} 2 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit **(a)** und Satz 4.3.12. erhalten wir

$$\partial_v f(P) = \operatorname{grad} f(P) \bullet v = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \mathrm{e}^{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ \pi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -\pi \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Es ist

$$\mathrm{H}f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{e}^{\sin(2x_1 + x_2 x_3)} \left(\cos(2x_1 + x_2 x_3)^2 - \sin(2x_1 + x_2 x_3)\right) \begin{pmatrix} 4 & 2x_3 & 2x_2 \\ 2x_3 & x_3^2 & x_2 x_3 \\ 2x_2 & x_2 x_3 & x_2^2 \end{pmatrix}$$
$$+ \mathrm{e}^{\sin(2x_1 + x_2 x_3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2x_1 + x_2 x_3) \\ 0 & \cos(2x_1 + x_2 x_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Mit **(c)** folgt

$$\mathrm{H}f(P) = \mathrm{e}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2\pi \\ -1 & \frac{1}{4} & -\frac{\pi}{2} \\ 2\pi & -\frac{\pi}{2} & \pi^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 117. *Niveaumengen*
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\binom{x}{y} \mapsto \mathrm{e}^{x^2 - y^2}(4x^2 + y^2 - 9)$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f\binom{x}{y}$.

(b) Bestimmen Sie ein $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ so, dass $\partial_v f\binom{2}{1} = 0$.

(c) Skizzieren Sie die Niveaumenge $\mathcal{N}_0$ der Funktion f zum Niveau $c = 0$.

(d) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \binom{x}{y} \,\middle|\, \operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{0}{0} \right\}$ und bestimmen Sie $\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{M}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\begin{pmatrix} 2x(4x^2+y^2-5) \\ -2y(4x^2+y^2-10) \end{pmatrix}$$

(b) Nach Satz 4.3.12 gilt

$$\partial_v f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet v.$$

Wir bestimmen zunächst

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^3\begin{pmatrix} 48 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

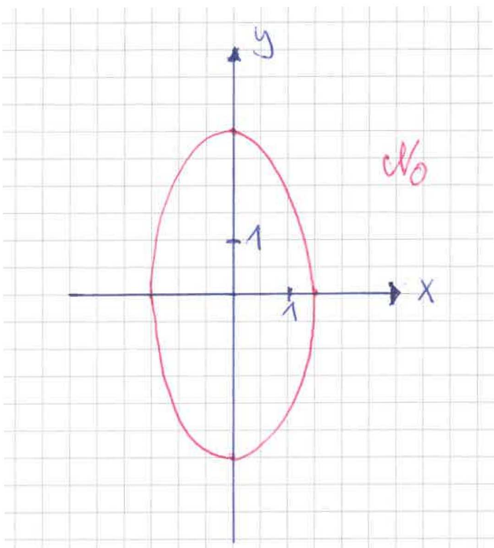
Eine mögliche Wahl für v ist somit gegeben durch

$$v = \frac{1}{e^3\sqrt{48^2+14^2}}e^3\begin{pmatrix} 14 \\ 48 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 14 \\ 48 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus der Bedingung $f\binom{x}{y} = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$4x^2+y^2-9=0,$$

da $\mathrm{e}^{x^2-y^2} > 0$ für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Somit ist $\mathcal{N}_0$ ein Ellipse mit Halbachsenlängen $h_x = \frac{3}{2}$ und $h_y = 3$:



(d) Aus der Bedingung $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ erhalten wir ähnlich zu **(b)** das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$2x(4x^2+y^2-5)=0 \qquad \text{(I)}$$
$$-2y(4x^2+y^2-10)=0. \qquad \text{(II)}$$

Aus Gleichung (I) erhalten wir zwei Fälle.
Fall 1 $(x = 0)$: Einsetzen in (II) führt auf die Gleichung

$$-2y(y^2 - 10) = 0$$

und wir erhalten somit drei Punkte:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Fall 2 $(4x^2 = 5 - y^2)$: Einsetzen in (II) führt auf die Gleichung

$$-2y(5 - y^2 - y^2 - 10) = 10y = 0.$$

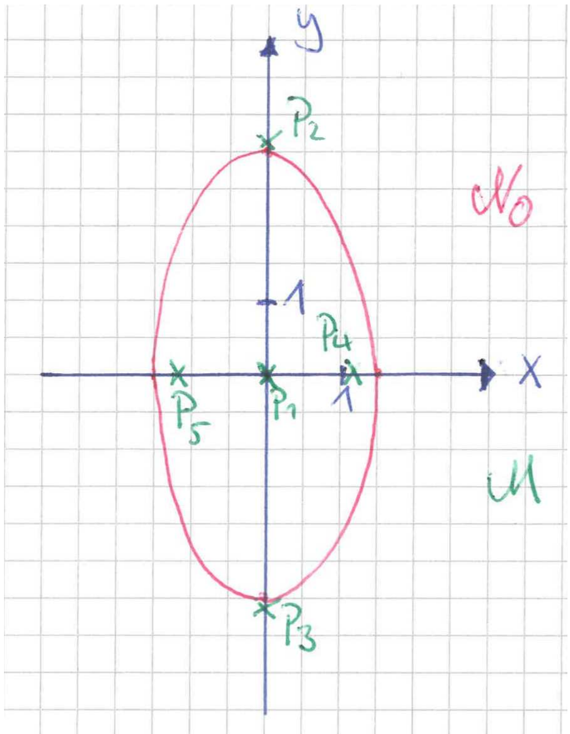
Foglich ist $y = 0$ und aus $4x^2 = 5 - y^2 = 5$ erhalten wir somit zwei weitere Punkte

$$P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_5 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der insgesamt 5 Punkte in f liefert

$$\begin{aligned} f(P_1) &= -9 \neq 0 \\ f(P_2) = f(P_3) &= \mathrm{e}^{-1} \neq 0 \\ f(P_4) = f(P_5) &= -4\mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \neq 0 \end{aligned}$$

und folglich ist $\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{M} = \emptyset$.



Aufgabe H 118. *Hessematrizen von Polynome*
Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen als Hessematrix eines Polynoms $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto p(x, y)$ vom Grad $\leqq 3$ vorkommen können und geben Sie im positiven Fall ein solches Polynom an:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise hierzu: Jedes Polynom $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto p(x,y)$ vom Grad $\leqq 3$ lässt sich schreiben als

$$p(x,y) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 y + \alpha_3 x y^2 + \alpha_4 y^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \delta.$$

mit Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_4, \beta_1, \ldots, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \delta \in \mathbb{R}$. Berechnen wir für diesen allgemeinen Ansatz die Hessematrix, so erhalten wir

$$\mathrm{H}\, p(x,y) = \begin{pmatrix} 6\alpha_1 x + 2\alpha_2 y + 2\beta_1 & 2\alpha_2 x + 2\alpha_3 y + \beta_2 \\ 2\alpha_2 x + 2\alpha_3 y + \beta_2 & 2\alpha_3 x + 6\alpha_4 y + 2\beta_3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(a) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ kann nicht als Hessematrix auftreten, da sie nicht symmetrisch ist.

(b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ kann als Hessematrix eines Polynoms auftreten. Unter Verwendung $(*)$ ist ein mögliches Polynom gegeben durch

$$p(x,y) = -2xy + \frac{1}{2}y^2.$$

(c) Die Matrix $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ kann als Hessematrix eines Polynoms auftreten. Wir verwenden erneut $(*)$ und erhalten als eine Möglichkeit

$$p(x,y) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xy^2.$$

Aufgabe H 119. *Richtungsableitung*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 2xy - y^2 + 1$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen $\Gamma(f)$ auf dem Rand des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$.

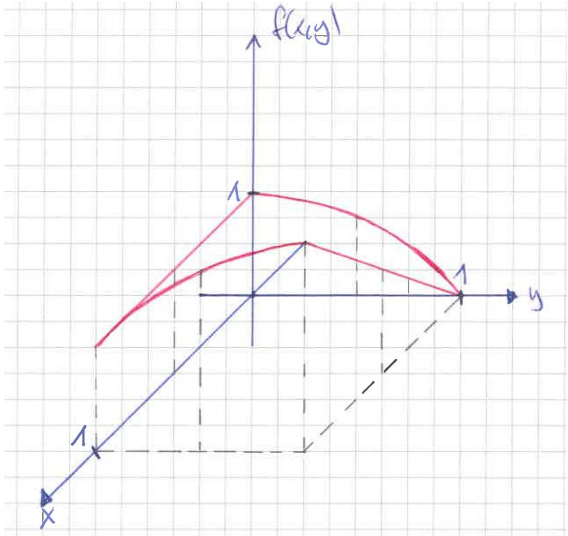
(b) Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E\colon x - y = 0$ für $\binom{x}{y} \in [0,1] \times [0,1]$.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f\binom{1/2}{1/2}$ in die Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$

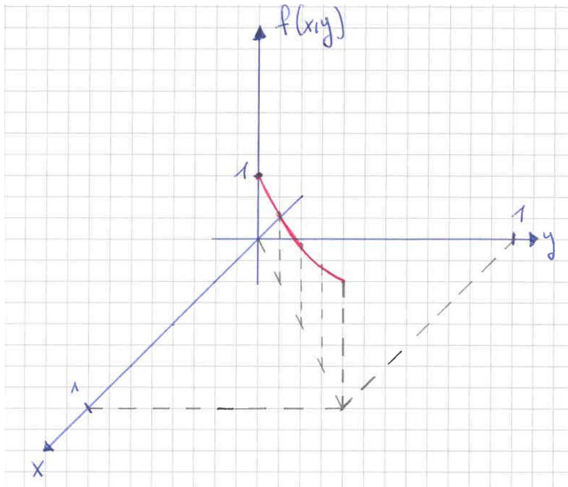
(d) Ergänzen Sie Ihre Skizze aus **(b)** um die Tangente in Richtung v am Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))^\mathsf{T}$ und ermitteln Sie ihre Steigung graphisch unter Verwendung eines Steigungsdreiecks.

Lösungshinweise hierzu:

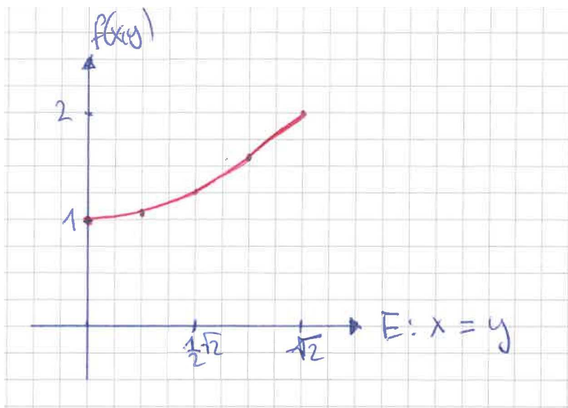
(a) Eingeschränkt auf den Rand des Quadrats reduziert sich $f\binom{x}{y}$ auf Parabelstücke in y für $x \in \{0,1\}$ oder auf Geradenstücke für $y \in \{0,1\}$:



(b) Wir skizzieren den Schnitt zunächst dreidimensional



und anschließend eine zweidimensionale Projektion auf die Ebene E. Diese Darstellung ist im Hinblick auf Aufgabenteil **(d)** hilfreich. Es muss aber darauf geachtet werden, dass wir uns nun in der Ebene $E : x = y$ befinden und die Skalierung der Achsen entsprechend angepasst werden muss. Die untere Achse entspricht dabei der Geraden parametrisiert durch $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \binom{t}{t}$.



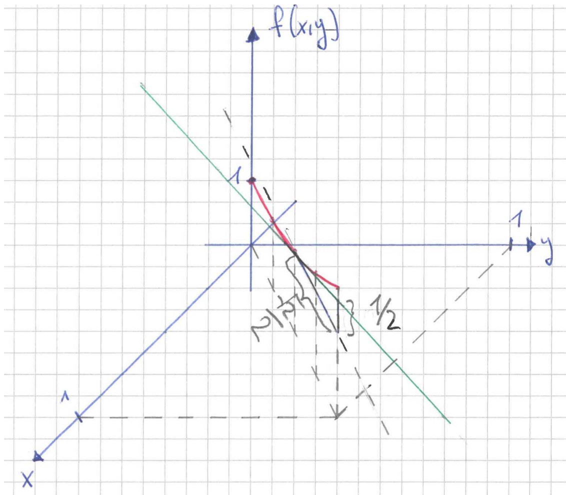
(c) Wir wollen Satz 4.3.12 anwenden und berechnen zunächst den Gradienten

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x-2y \end{pmatrix}.$$

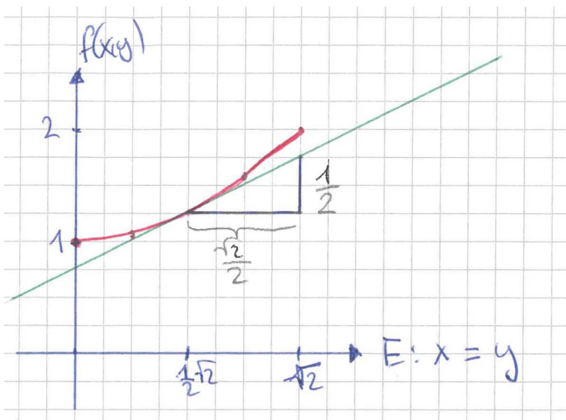
Für die Richtungsableitung erhalten wir demnach

$$\partial_v f\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \bullet v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(d) Auch hier erweitern wir zuerst ein die dreidimensionale Skizze. Die Tangente ist in grün ergänzt. Wir entnehmen unserer Skizze eine Steigung von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in Richtung v und somit erhalten somit auch zeichnerisch $\partial_v f\binom{1/2}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Projiziert auf die Ebene E ist das Steigungsdreieck leichter einzuzeichnen und wir entnehmen auch hier eine Steigung $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und folglich die Richtungsableitung $\partial_v f\binom{1/2}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Frischhaltebox

Aufgabe H 120.

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto xe^x$.

(a) Bestimmen Sie die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ für alle $n \geqq 0$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ von f um den Entwicklungspunkt 0.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen zunächst ein paar Ableitungen, um eine Gespür für eine allgemeinere Darstellung zu entwickeln:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) = x\mathrm{e}^x && \text{(IA)} \\ f^{(1)}(x) &= f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x \\ f^{(2)}(x) &= f''(x) = (x+2)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass $f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$ und beweisen dies nun mittels volständiger Induktion. Den Induktionsanfang für $n = 0$ haben wir oben bereits getätigt. Wir führen also unseren Induktionsschritt durch:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f^{(n)}(x) \overset{\text{IH}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x+n)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + (x+n)\mathrm{e}^x = (x+(n+1))\mathrm{e}^x.$$

(b) Unter Verwendung von Teilaufgabe **(a)** ergibt sich für die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt 0:

$$T(f,x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 121. *Extremalstellen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x_1 + 1 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\mathrm{H}f\,(x)$.

(b) Skizzieren Sie $\mathcal{N} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$ sowie die Vorzeichenverteilung von f.

(c) Betrachten Sie die kritische Stelle $P := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Entscheiden Sie mit (b), ob bei P ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.
Ließe sich dies auch mit der Hesse-Matrix entscheiden?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \partial_{x_2} f(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 - x_1^2 - x_2^2) + (x_1 + 1 + x_2^2) \cdot (-2x_1) \\ 2x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + (x_1 + 1 + x_2^2) \cdot (-2x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 3x_1^2 - 2x_1 - 2x_1x_2^2 - x_2^2 \\ -2x_2\,(x_1 + x_1^2 + 2x_2^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 3x_1^2 - 2x_1 - 2x_1x_2^2 - x_2^2 \\ -2x_1x_2 - 2x_1^2x_2 - 4x_2^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und entsprechend

$$
\mathrm{H}f\,(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1x_1} f(x) & \partial_{x_1x_2} f(x) \\ \partial_{x_2x_1} f(x) & \partial_{x_2x_2} f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_1 - 2x_2^2 - 2 & -4x_1x_2 - 2x_2 \\ -4x_1x_2 - 2x_2 & -2x_1 - 2x_1^2 - 12x_2^2 \end{pmatrix}
$$

(b) $f(x)$ wird genau dann null, wenn einer der Faktoren 0 wird. Entsprechend besteht $\mathcal{N}$ aus den Teilmengen

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 1 + x_2^2 = 0\} \\
\mathcal{N}_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}
\end{aligned}
$$

Die zweite Teilmenge ist der Einheitskreis. Für die erste multiplizieren schreiben wir zunächst $z_1 := x_2$ und $z_2 := -(x_1 + 1)$ und multiplizieren anschließend die Gleichung mit -2, was auf die äquivalente Bedingung

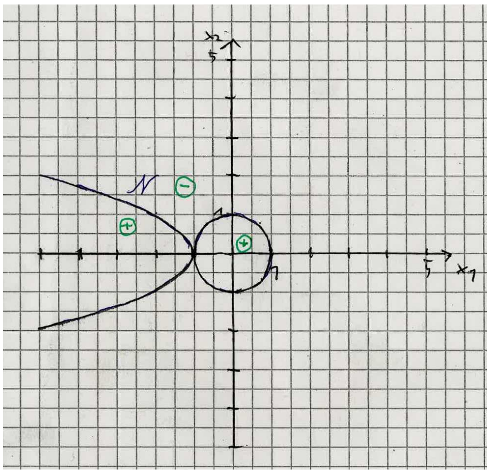
$$
-2z_1^2 + 2z_2 = 0
$$

führt. Mit unseren Kenntnissen aus der HM1 (insbesondere dem Kapitel zur Hauptachsentransformation) sehen wir, dass es sich hierbei um eine parabolische Quadrik (genauer: Die Normalparabel) im Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ handelt, welches sich aus dem Standardkoordinatensystem durch eine 90-Grad-Drehung sowie einer Verschiebung ergibt. Die Vorzeichenverteilung erhalten wir durch Einsetzen von

Testpunkten beziehungweise „-stellen“ (in $\mathbb{R}^2$!), beispielsweise $P_1 = \binom{0}{0}$, $P_2 = \binom{2}{0}$, $P_3 = \binom{-2}{0}$:

$$\begin{aligned} f(P_1) &= 1 > 1 \\ f(P_2) &= 3 \cdot (-3) = -9 < 0 \\ f(P_3) &= (-1) \cdot (-3) = 3 > 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Skizze:



Alternativer Lösungsweg: Die Vorzeichen hätte man auch anhand einer Tabelle bestimmen können:

	$x_1{+}1{+}x_2^2{>}0$ $1{-}x_1^1{-}x_2^2{>}0$	$x_1{+}1{+}x_2^2{<}0$ $1{-}x_1^1{-}x_2^2{>}0$	$x_1{+}1{+}x_2^2{>}0$ $1{-}x_1^1{-}x_2^2{<}0$	$x_1{+}1{+}x_2^2{<}0$ $1{-}x_1^1{-}x_2^2{<}0$
$x_1 + 1 + x_2^2$	$+$	$-$	$+$	$-$
$1 - x_1^2 - x_2^2$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

(Hierbei kann der 2. Fall jedoch nicht eintreten: Aus $x_1 + 1 + x_2^2 < 0$ folgt $0 \leqq x_2^2 < -1 - x_1$ und somit $x_2^4 < 1 + 2x_1 + x_1^2 < 2 + 2x_1 - x_2^2$, woraus insbesondere $0 \leqq x_2^4 + x_2^2 < 2x_1 + 2$ und somit $x_1 + 1 > 0$ folgt, was ein Widerspruch zur ersten Gleichung ist. In der Skizze drückt sich dies dadurch aus, dass die Mengen $\mathcal{N}_1$ und $\mathcal{N}_2$ einen Berühr-, aber keinen Schnittpunkt haben.)

(c) Anhand der Vorzeichenverteilung aus (b) sehen wir, dass in P ein Sattelpunkt vorliegen muss: In jeder noch so kleinen Umgebung werden sowohl positive als auch negative Werte angenommen. Die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ist

$$\mathrm{H}f\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hat also die Eigenwerte 4 und 0. Da sie damit weder positiv definit, negativ definit noch indefinit ist, lässt sich mit der Hesse-Matrix keine Aussage über die Art der kritischen Stelle treffen.

Aufgabe H 122. *Extrema unter Nebenbedingung*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto xy$.

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 4x^2 + y^2 - 4$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x}{y}$ und $\nabla g\binom{x}{y}$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange auf, mit welchem die kritischen Stellen von $f\binom{x}{y}$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ bestimmt werden.

(c) Bestimmen Sie mittels (b) die globalen Minimal- und Maximalstellen von $f\binom{x}{y}$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$.

(d) Für welchen Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $x,\, y \geqq 0$ und mit $4x^2 + y^2 = 4$ hat das Rechteck mit den Ecken $\binom{0}{0}$, $\binom{x}{0}$, $\binom{0}{y}$, $\binom{x}{y}$ den maximalen Flächeninhalt? Skizzieren Sie die Kurve $E := \{\, \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x,\, y \geqq 0,\ 4x^2 + y^2 = 4 \,\}$ und dieses Rechteck.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es wird $\nabla f\binom{x}{y} = \binom{y}{x}$ und $\nabla g\binom{x}{y} = \binom{8x}{2y}$.

(b) Das Gleichungssystem nach Lagrange besteht aus der vektoriellen Gleichung $\nabla f\binom{x}{y} + \lambda \nabla g\binom{x}{y} = 0$ und der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$. Dank (a) gibt dies folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} y + \lambda \cdot 8x &= 0 \\ x + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Wir bestimmen die kritischen Stellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$, indem wir die Lösungen des Gleichungssystems aus (b) ermitteln.

Fall $x = 0$. Dank erster Gleichung ist dann auch $y = 0$. Die dritte Gleichung kann dann nicht erfüllt werden. Dieser Fall tritt nicht ein.

Fall $x \neq 0$. Dank zweiter Gleichung sind dann auch $y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$.
Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $x = -2\lambda y$. Eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir $y + \lambda \cdot 8(-2\lambda y) = 0$. Da $y \neq 0$, folgt hieraus $1 - 16\lambda^2 = 0$, also $\lambda = \frac{1}{4}$ oder $\lambda = -\frac{1}{4}$.

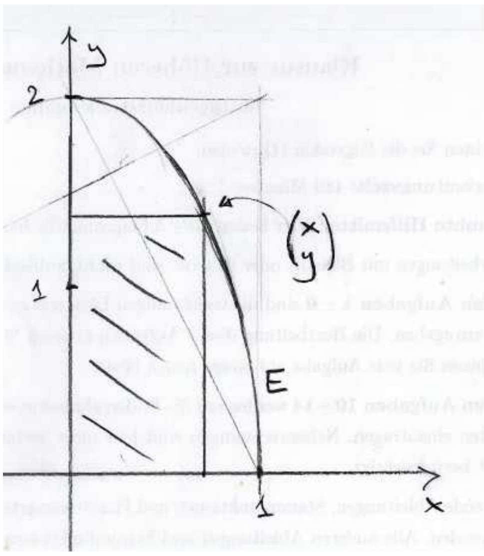
Subfall $\lambda = \frac{1}{4}$. Dank erster Gleichung ist $y = -2x$. Eingesetzt in die dritte Gleichung erhalten wir $4 = 4x^2 + 4x^2$ und also $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da $y = -2x$, liefert dies die kritischen Stellen $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-2}$ und $P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{2}$.

Subfall $\lambda = -\frac{1}{4}$. Dank erster Gleichung ist $y = 2x$. Eingesetzt in die dritte Gleichung erhalten wir $4 = 4x^2 + 4x^2$ und also $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da $y = 2x$, liefert dies die kritischen Stellen $P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{2}$ und $P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{-2}$.

Da $f\binom{x}{y} = xy$, erhalten wir $f(P_1) = -1,\ f(P_2) = -1,\ f(P_3) = 1,\ f(P_4) = 1$.
Da die Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$ eine Ellipse beschreibt und da diese Ellipse kompakt ist, nimmt f auf dieser Ellipse ein globales Maximum und ein globales Minumum an. Die zugehörigen Maximal- und Minimalstellen tauchen in der Liste der kritischen Stellen $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ auf.

Wir erkennen unter Verwendung der dortigen Funktionswerte: Es sind $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-2}$ und $P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{2}$ die globalen Minimalstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$. Es sind $P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{2}$ und $P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{-2}$ die globalen Maximalstellen von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

(d) Es hat das beschriebene Rechteck den Flächeninhalt xy. Somit liefert (c) den maximalen Flächeninhalt bei $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$. Skizze:



Aufgabe H 123. *Extremwerte*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{2}{3}y^3 - y^2\mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^{-3x}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x}{y}$ und $\mathrm{H}f\binom{x}{y}$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

(c) Entscheiden Sie für die kritischen Stellen jeweils, ob an dieser ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechen:

$$\begin{aligned}\nabla f\binom{x}{y} &= \begin{pmatrix}\partial_x f\binom{x}{y}\\ \partial_y f\binom{x}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y^2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-3x} - 6x\mathrm{e}^{-3x}\\ 2y^2 - 2y\mathrm{e}^{-x}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}y^2\mathrm{e}^{-x} + (2-6x)\mathrm{e}^{-3x}\\ 2y\,(y - \mathrm{e}^{-x})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{H}f\binom{x}{y} &= \begin{pmatrix}\partial_{xx} f\binom{x}{y} & \partial_{xy} f\binom{x}{y}\\ \partial_{yx} f\binom{x}{y} & \partial_{yy} f\binom{x}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y^2\mathrm{e}^{-x} - 6\mathrm{e}^{-3x} + 18x\mathrm{e}^{-3x} - 6\mathrm{e}^{-3x} & 2y\mathrm{e}^{-x}\\ 2y\mathrm{e}^{-x} & 4y - 2\mathrm{e}^{-x}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-y^2\mathrm{e}^{-x} + (18x-12)\mathrm{e}^{-3x} & 2y\mathrm{e}^{-x}\\ 2y\mathrm{e}^{-x} & 4y - 2\mathrm{e}^{-x}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Sei $\nabla f\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$. Dann gilt insbesondere $\partial_y f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2y(y - \mathrm{e}^{-x}) = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn (mindestens) einer der Faktoren 0 wird. Wir machen eine Fallunterscheidung:

$y = 0$: In diesem Falle vereinfacht sich die erste Zeile dieses Gleichungssystems zu

$$0 = y^2\mathrm{e}^{-x} + (2 - 6x)\mathrm{e}^{-3x} = (2 - 6x)\mathrm{e}^{-3x},$$

woraus wir $2 = 6x$ beziehungsweise $x = \frac{1}{3}$ erhalten. (Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen!)

$y \neq 0$: In diesem Falle dürfen wir die Gleichung $2y(y - \mathrm{e}^{-x}) = 0$ durch $2y$ dividieren und erhalten $y = \mathrm{e}^{-x}$. Eingesetzt in die erste Komponente ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= y^2\mathrm{e}^{-x} + (2 - 6x)\mathrm{e}^{-3x} = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \mathrm{e}^{-x} + (2 - 6x)\mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x} + (2 - 6x)\mathrm{e}^{-3x} \\ &= (3 - 6x)\,\mathrm{e}^{-3x} \end{aligned}$$

hieraus erhalten wir folglich $3 = 6x$ beziehungsweise $x = \frac{1}{2}$ und somit $y = \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, weitere Lösungen existieren wegen $\exp(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht.

Da mit obiger Fallunterscheidung alle Möglichkeiten, in denen $\partial_y f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ gilt, abgedeckt sind, sind die einzigen kritischen Stellen

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \end{pmatrix}.$$

(c) Wir setzen K_1 und K_2 in die Hesse-Matrix ein und erhalten:

$$K_1\colon\ \mathrm{H}f\,(K_1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{6}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte $-\dfrac{6}{\mathrm{e}}$ und $-\dfrac{2}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} < 0$ lassen sich direkt ablesen.

Da beide kleiner 0 sind, ist die Hesse-Matrix negativ definit, womit in K_1 ein lokales Maximum vorliegt.

$$K_2\colon\ \mathrm{H}f\,(K_2) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 3\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} & \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} & \dfrac{4}{2\sqrt{\mathrm{e}}} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{(\sqrt{\mathrm{e}})^3} & \dfrac{2}{\mathrm{e}} \\ \dfrac{2}{\mathrm{e}} & \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{(\sqrt{\mathrm{e}})^3} & \dfrac{2}{\mathrm{e}} \\ \dfrac{2}{\mathrm{e}} & \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \end{pmatrix} = -\frac{8}{\mathrm{e}^2} - \frac{4}{\mathrm{e}^2} = -\frac{12}{\mathrm{e}^2} < 0$$

müssen die beiden Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen haben, d. h. es gibt einen positiven und einen negativen. Die Hesse-Matrix ist somit indefinit, womit in K_2 ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe H 124. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{x_0}{y_0}\right)$ für

(a) $f\colon \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-y}}, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2 + 2xy + y^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zuerst müssen wir die partielle Ableitungen von f berechnen: Wir erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{3}{2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{3}{4}(x-y)^{-\frac{5}{2}} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = -\frac{3}{4}(x-y)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{3}{4}(x-y)^{-\frac{5}{2}}$$

Wir sehen ferner, dass diese Ableitungen auf dem gesamten Definitionsbereich von f existieren. Wenn wir f nun mittels eines Polynoms zweiten Grades in der Nähe von $\binom{x_0}{y_0} = \binom{2}{1}$ approximieren wollen, erhalten wir Folgendes:

$$\begin{aligned}
T_2\left(f, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = T_2\left(f, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) + \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (y - y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\Bigg(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \\
&\qquad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (y - y_0)^2\Bigg) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{3}{8}(x-2)^2 - \frac{3}{4}(x-2)(y-1) + \frac{3}{8}(y-1)^2
\end{aligned}$$

(b) Wie in der vorherigen Aufgaben berechnen wir zunächst die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = 2x + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 2x + 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y} = 2$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} = 2$
Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
T_2\left(f, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = T_2\left(f, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) + \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (y - y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\Bigg(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \\
&\qquad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (y - y_0)^2\Bigg) \\
&= 4 + 4(x-1) + 4(y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2
\end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. *Darstellungsmatrizen*

Wir betrachten den von der Basis $B\colon b_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \cos(t)\,,\ b_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \sin(t)$ aufgespannten Funktionenraum $V = \{\alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subsetneqq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B\rho_B$ der linearen Abbildung $\rho\colon V \to V\colon f \mapsto \rho(f)$, wobei die Abbildung $\rho(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(\rho(f))(t) = f\left(t - \frac{3}{2}\pi\right)$ gegeben ist.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\cos\left(t-\frac{3}{2}\pi\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)\right) = \sin(2\pi-t) = \sin(-t) = -\sin(t)\\ \sin\left(t-\frac{3}{2}\pi\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-(2\pi-t)\right) = \cos(2\pi-t) = \cos(-t) = \cos(t),\end{aligned}$$

woraus wir $\rho(b_1) = -b_2$ und $\rho(b_2) = b_1$ erhalten. Somit gilt:

$$_B\rho_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 126. *Ein Teil des Trust-Region-Verfahrens*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}x^\mathsf{T} Ax - b^\mathsf{T} x$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)$, mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange die lokalen Extremstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst bestimmen wir die Gradienten von f und g. Wir erhalten

$$\nabla f(x) = Ax - b \quad \text{und} \quad \nabla g(x) = x.$$

Da $\nabla g(x) = 0$ nur für $x = 0$ gilt und dieser Punkt offensichtich nicht die Nebenbedingung $g(x) = 0$ erfüllt, können wir die Methode von Lagrange benutzen. Das heißt, zu jedem relativen Extremum gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = (A - \lambda E_2)x - b.$$

Um alle zulässigen Kandidaten für relative Extrema zu finden, suchen wir also Lösungen (x, λ) der Gleichungen

$$(A - \lambda E_2)x = b \quad \text{und} \quad |x|^2 = 1.$$

Die gegebene Matrix A hat die Eigenwerte 1 und 3. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- 1. Fall: $\lambda = 1$: In diesem Fall lautet die erste Gleichung $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dieses LGS besitzt keine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$.
- 2. Fall: $\lambda = 3$: In diesem Fall lautet die erste Gleichung $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dieses LGS besitzt ebenfalls keine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$.
- 3. Fall: $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1, 3\}$. In diesem Fall ist die Matrix $A - \lambda E_2$ invertierbar und die eindeutige Lösung der ersten Gleichung ist gegeben durch

$$x = (A - \lambda E_2)^{-1} b = \frac{1}{(2-\lambda)^2 - 1} \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2-\lambda)^2 - 1} \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dies setzen wir ein in die zweite Gleichung und erhalten

$$1 = \frac{(2-\lambda)^2 + 1}{((2-\lambda)^2 - 1)^2}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= ((2-\lambda)^2 - 1)^2 - (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= (2-\lambda)^4 - 2(2-\lambda)^2 + 1 - (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= (2-\lambda)^2[(2-\lambda)^2 - 3]. \end{aligned}$$

Wir bekommen also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$ und $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$ als mögliche Werte für λ und die zugehörigen Vektoren x erhalten wir durch Einsetzen in die oben hergeleitete Gleichung:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in f liefert $f(x_1) = 1$,

$$f(x_2) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}-1 \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{8}(6+\sqrt{3}+\sqrt{3}+2) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

und analog $f(x_3) = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{3}$. Da wir nun endlich viele Kandidaten gefunden haben und die Menge $x \in \mathbb{R}^2 \colon g(x) = 0$ kompakt ist, ist $(x_3, f(x_3))$ das gesuchte Minimum und $(x_2, f(x_2))$ das gesuchte Maximum.

Aufgabe H 127. *Extrema auf berandetem Bereich*

Wir betrachten das Dreieck $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqq x_1 \leqq x_2 + 1 \leqq 2\}$, sowie die Funktion $f \colon D \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x_1^2 + x_2^2$.

Gehen Sie wie folgt vor, um globale Extrema von f auf D zu bestimmen:

(a) Skizzieren Sie D.

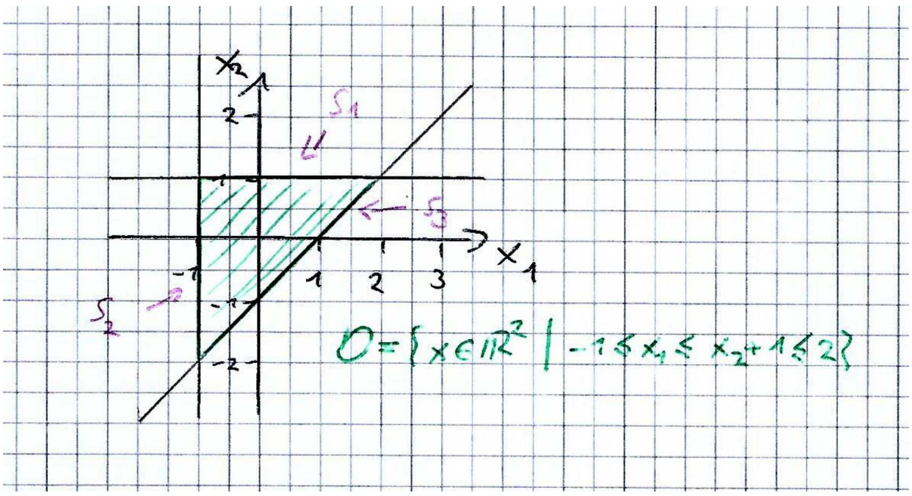
(b) Bestimmen Sie Parametrisierungen h_1, h_2 und h_3 für die Seiten von D.

(c) Bestimmen Sie ein $x \in D$ so, dass $f(x) = \min\{f(y) \mid y \in D\}$ ist.

(d) Bestimmen Sie ein $x \in D$ so, dass $f(x) = \max\{f(y) \mid y \in D\}$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Skizze der Menge D ist wie folgt gegeben, wobei der Rand zur Menge dazu gehört:



(b) Geeignete Parametrisierungen der Seiten S_1, S_2, S_3 sind beispielsweise gegeben durch

$$h_1 \colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_2 \colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$$h_3 \colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}.$$

(c) und **(d)** Die Idee ist es, das Dreieck D in sein Inneres D° und seinen Rand zu unterteilen und beides getrennt auf Extremalstellen zu untersuchen. Den Rand unterteilen wir ebenfalls in die drei Seiten S_1, S_2, S_3 für die wir in **(b)** Parametrisierungen angegeben haben.

- S_1: Die Funktion $f \circ h_1 \colon [-1,2] \to \mathbb{R} \colon t \mapsto t^2+1$ hat das Minimum $(0,1)$ und das Maximum $(2,5)$. Damit hat f auf S_1 das Minimum $\left(\binom{0}{1}, 1\right)$ und das Maximum $\left(\binom{2}{1}, 5\right)$.
- S_2: Die Funktion $f \circ h_2 \colon [-1,2] \to \mathbb{R} \colon t \mapsto 1 + (t-1)^2$ hat das Minimum $(1,1)$ und das Maximum $(-1,5)$. Damit hat f auf S_2 das Minimum $\left(\binom{-1}{0}, 1\right)$ und das Maximum $\left(\binom{-1}{-2}, 5\right)$.
- S_3: Die Funktion $f \circ h_3 \colon [-1,2] \to \mathbb{R} \colon t \mapsto t^2 + (t-1)^2 = 2t^2 - 2t + 1$ hat eine einzige kritische Stelle bei $t = \frac{1}{2}$ bei der es sich um ein lokales Minimum handelt mit Wert $\frac{1}{2}$. Am Rand haben wir $f(-1) = f(2) = 5$. Damit ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein Minimum und $(-1,5)$, sowie $(2,5)$ sind Maxima von $f \circ h_3$. Insbesondere hat f auf S_3 das Minimum $\left(\binom{1/2}{-1/2}, \frac{1}{2}\right)$ und die Maxima $\left(\binom{-1}{-2}, 5\right)$, $\left(\binom{2}{1}, 5\right)$.
- D° bzw. $\mathbb{R}^2$: Auf $\mathbb{R}^2$ hat f das Minimum $\left(\binom{0}{0}, 0\right)$ und keine Maxima. Der Punkt $\binom{0}{0}$ liegt auch in D°.

Alle gefundenen Stellen sind Kandidaten für Extrema von f auf D. Da D kompakt ist, da f stetig ist und weil nur endlich viele Kandidaten vorliegen, genügt es, die Funktionswerte zu vergleichen.

Damit hat f auf D das Minimum $\left(\binom{0}{0}, 0\right)$ und die Maxima $\left(\binom{-1}{-2}, 5\right)$, $\left(\binom{2}{1}, 5\right)$.

Aufgabe H 128. *Jacobi-Matrix und Kettenregel*

Seien $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon (x,y,z)^\intercal \mapsto x^2 + y^2 - z$ und $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)^\intercal$

(a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$, ohne die Kettenregel zu verwenden.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f$ und $\mathrm{J}g$. Bestimmen Sie mit der Kettenregel $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \cos(t)^2 + \sin(t)^2 - t = 1 - t,$$

und

$$g \circ f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x^2+y^2-z) \\ \sin(x^2+y^2-z) \\ x^2+y^2-z \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt, mit direkten Berechnungen,

$$\mathrm{J}(f \circ g)(t) = (-1) \in \mathbb{R}^{1\times 1},$$

und

$$\mathrm{J}(g \circ f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x\sin(x^2+y^2-z) & -2y\sin(x^2+y^2-z) & \sin(x^2+y^2-z) \\ 2x\cos(x^2+y^2-z) & 2y\cos(x^2+y^2-z) & -\cos(x^2+y^2-z) \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(c) Es gilt

$$\mathrm{J}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3},$$

und

$$\mathrm{J}g(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Mit der Kettenregel, erhalten wir

$$\mathrm{J}(f\circ g)(t) = \Big(\mathrm{J}f(g(t))\Big)\Big(\mathrm{J}g(t)\Big) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) & 2\sin(t) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(g\circ f)(x,y,z) = (\mathrm{J}g(f(x,y,z)))\,(\mathrm{J}f(x,y,z)) &= \begin{pmatrix} -\sin(x^2+y^2-z) \\ \cos(x^2+y^2-z) \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x\sin(x^2+y^2-z) & -2y\sin(x^2+y^2-z) & \sin(x^2+y^2-z) \\ 2x\cos(x^2+y^2-z) & 2y\cos(x^2+y^2-z) & -\cos(x^2+y^2-z) \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe H 129. *Tangente und Tangentialebene*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2y^3 - x$. Sei $N \subseteqq \mathbb{R}^2$ die Nullstellenmenge von f.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ im Punkt $P = (1,1,f\binom{1}{1})^\intercal$ und die Niveaumenge der Tangentialebene zum Niveau 0.

(b) Berechnen Sie die Tangente im Punkt $(1,1)^\intercal$ an N mittels Gradienten wie in **4.9.4**. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Schnitt der Tangentialebene aus **(a)** mit der x-y-Ebene.

(c) Lösen Sie $x^2y^3 - x = 0$ nach y auf und verwenden Sie die resultierende Funktion, die y in Abhängigkeit von x darstellt, um die Tangente im Punkt $(1,1)^\intercal$ an N zu berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus **(b)**.

(d) Skizzieren Sie N im Bereich $0 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 4$, sowie die Tangente im Punkt $(1,1)^\intercal$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ im Punkt $P = (1,1,f(1,1))$ ist nach **4.4.14**

$$\begin{aligned} z &= T_1(f,(1,1),f(1,1)) = f(1,1) + (x-1,y-1)^\intercal \bullet \nabla f(1,1) \\ &= 0 + (x-1,y-1)^\intercal \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x + 3y - 4. \end{aligned}$$

Die Niveaumenge der Tangentialebene zum Niveau 0 ist nach **4.1.3**

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+3y-4=0\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right\}.$$

(b) Mit $f(1,1) = 0$ ist die Tangente im Punkt $(1,1)$ an die Niveaulinie von f zum Niveau 0 mittels **4.9.4** gegeben durch

$$\nabla f(1,1) \bullet (x-1, y-1)^{\intercal} = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Dies ist das gleiche Ergebnis wie in **(a)**.

(c) Die Niveaulinie von f zum Niveau 0 ist

$$L := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2y^3 - x = 0\right\}.$$

Da $x = 0, y \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2y^3 - x = 0$ ist, kann L geschrieben werden als

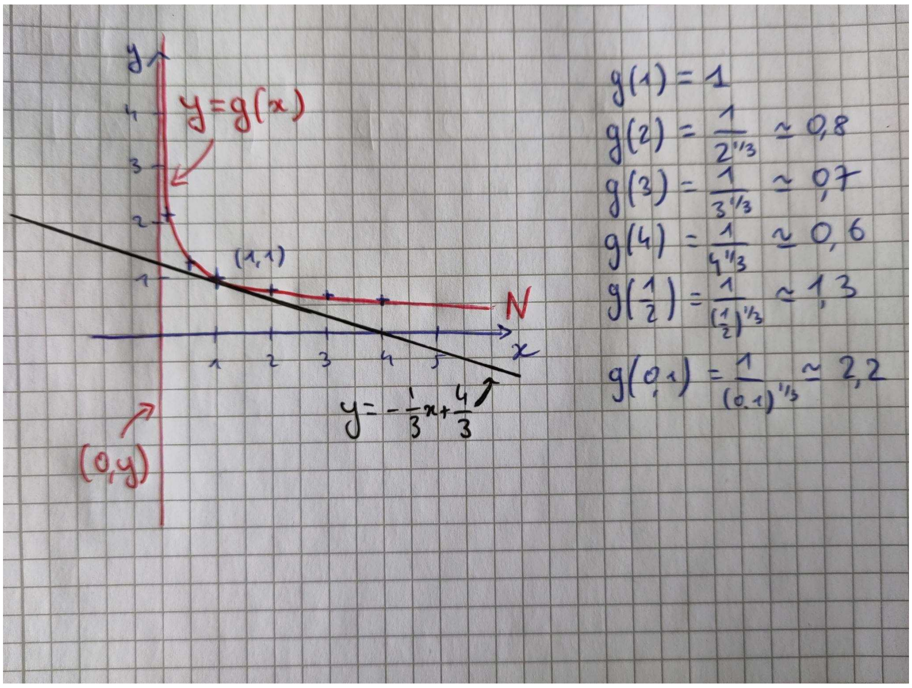
$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,y) \,\middle|\, y = \frac{1}{x^{1/3}}\right\} \bigcup \left\{(0,y) \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Für $x \neq 0,$, die Niveaulinie ist gegeben durch den Graphen der Funktion $y = g(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$. Die Tangente im Punkt $(1,1)$ ist

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) = -\frac{1}{3}(x-1) + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Dies ist das gleiche Ergebnis wie in **(a)**.

(d) Eine Skizze der Niveaulinie und der Tangente aus **(c)** ist:



Frischhaltebox

Aufgabe H 130. *Integrale*

Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{x^3+4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$$

Lösungshinweise hierzu: Zuerst einmal gilt

$$\frac{x^3+4}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)x+4x+4}{x^2-4} = x + \frac{4x+4}{x^2-4}.$$

Für den zweiten Summanden wollen wir eine Partialbruchzerlegung durchführen und wählen den Ansatz

$$\frac{4x+4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Dann soll also gelten

$$4x+4 = A(x+2)+B(x-2) = (A+B)x+(A-B)2, \quad \text{also} \quad 4 = A+B \text{ und } 2 = A-B$$

per Koeffizientenvergleich. Dies geht nur für $A = 3$ und $B = 1$.
Damit bekommen wir

$$\int \frac{x^3+4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + 3\ln(|x-2|) + \ln(|x+2|) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 131. *Rotation und Potentiale*

Berechnen Sie jeweils die Rotation der folgenden Vektorfelder. Welche besitzen ein Potential?

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 + 2x^3 + x(1-2y) \\ y - x^2 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{y\cos(x)}\sin(x) \\ \mathrm{e}^{y\cos(x)}y\cos(x) \end{pmatrix}$

(c) $h\colon E \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{xy^2z^3}\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{2}{y} \\ \frac{3}{z} \end{pmatrix}$ für $E = \{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \big(-2x\big) - \big(-2x\big) = 0.$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, besitzt f ein Potential.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot} g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\\ &= \big(-\cos(x)\mathrm{e}^{y\cos(x)}\sin(x)\big) - \big(-\mathrm{e}^{y\cos(x)}y\sin(x) - y^2\cos(x)\mathrm{e}^{y\cos(x)}\sin(x)\big)\\ &= -\mathrm{e}^{y\cos(x)}\sin(x)\big(\cos(x) - y^2\cos(x) - y\big).\end{aligned}$$

Da dieses Vektorfeld nicht null ist, besit g kein Potential.

(c) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} h\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2\sqrt{xy^2z^3}}\begin{pmatrix} \left(\frac{6xyz^3}{z}\right) - \left(\frac{6xy^2z^2}{y}\right) \\ \left(\frac{3xy^2z^2}{x}\right) - \left(\frac{3y^2z^3}{z}\right) \\ \left(\frac{2y^2z^3}{y}\right) - \left(\frac{2xyz^3}{x}\right) \end{pmatrix} = 0.$$

Da E einfach zusammenhängend ist, besitzt h ein Potential.

Aufgabe H 132. *Kurvenintegrale*

(a) Sei $K = \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1,\ x_1 \geqq 0,\ |x_2| \leqq 2\}$. Bestimmen Sie eine Parametrisierung $P\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2$ der Kurve K mit $P(-2) = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{5} \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} 1 + x_2^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ mit der in **(a)** bestimmten Parametrisierung P von K.

(c) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}$ und $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (1+\cos(t))\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
Skizzieren Sie die von C parametrisierte Kurve L. Berechnen Sie $\int_L g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $x_1 \geqq 0$, können wir die Menge K äquivalent darstellen als

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = \sqrt{1+x_2^2},\ |x_2| \leqq 2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{1+x_2^2} \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; -2 \leqq x_2 \leqq 2 \right\},$$

also als Graph der Funktion $x_2 \mapsto \sqrt{1+x_2^2}$. Eine geeignete Parametrisierung ist daher

$$P\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2\colon P(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ t \end{pmatrix}.$$

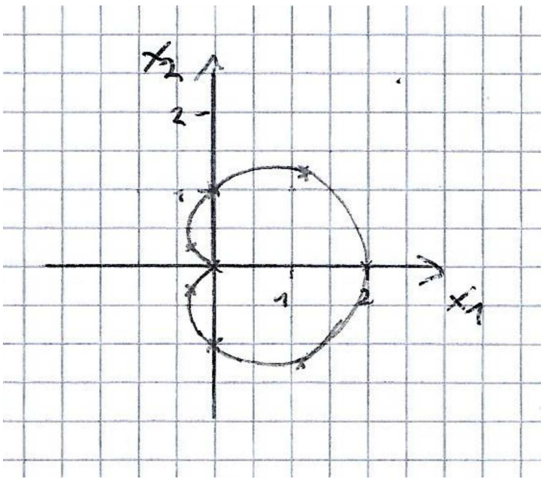
(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_{-2}^{2} f(P(t)) \bullet P'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ t\sqrt{1+t^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} t/\sqrt{1+t^2} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-2}^{2} 2t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{2}{3}\big[(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\big]_{-2}^{2} = 0. \end{aligned}$$

(c) Für die Skizze bestimmen wir ein paar Funktionswerte von C: $C(0) = \binom{2}{0}$,

$$C(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C(\tfrac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Symmetrie und die übrigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, kann man die folgende Kurve erahnen:



Nun kommen wir zur Berechnung des Integrals. Dazu verwenden wir aus Platzgründen im folgenden die Abkürzungen $c := \cos(t)$ und $s := \sin(t)$. Es ist

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -sc - (s+c)s \\ -s^2 + (1+c)c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - 2sc \\ c - 1 + 2c^2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_L g(x) \bullet \mathrm{d}\, x &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(1+c)s \\ (1+c)c-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -s-2sc \\ c-1+2c^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -s-cs \\ c-s^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -s-2sc \\ c-1+2c^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^{2\pi} s^2+2s^2c+cs^2+2s^2c^2+c^2-c+2c^3-s^2c+s^2-2c^2s^2 \,\mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^{2\pi} 2s^2+c^2+2s^2c-c+2c^3 \,\mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^{2\pi} 1+\sin(t)^2+\cos(t) \,\mathrm{d}\, t.
\end{aligned}$$

Nun rechnen wir weiter und erhalten z.B. mit **H104**

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} 1+\sin(t)^2+\cos(t)\,\mathrm{d}\, t &= 2\pi + \frac{1}{2}\big[t-\sin(t)\cos(t)\big]_0^{2\pi} + 0 \\
&= 2\pi+\pi = 3\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 133. *Potential*

Gegeben Sei das Gradientenfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz}+1 \\ (x\cos(xy)+z\sin(xy))\,\mathrm{e}^{yz}+z \\ y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz}+y \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie ein Potential $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ von f, welches $U((0,0,0)^\intercal) = 17$ erfüllt.

(b) Sei nun $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (\pi t, t^2, 2)^\intercal$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs der Kurve $K = \{C(t) \mid t \in [0,2]\}$ bezüglich C.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen das Potential. Es ist

$$U(x,y,z) = \int y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz}+1\,\mathrm{d}\, x = \sin(xy)\mathrm{e}^{yz}+x+c_1(y,z)$$

für eine Funktion $c_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wegen $f_2(x,y,z) = \frac{\mathrm{d}\, U}{\mathrm{d}\, y}$ muss gelten

$$(x\cos(xy)+z\sin(xy))\,\mathrm{e}^{yz}+z = \frac{\mathrm{d}\, U}{\mathrm{d}\, y} = x\cos(xy)\mathrm{e}^{yz}+z\sin(xy)\mathrm{e}^{yz}+\frac{\mathrm{d}\, c_1}{\mathrm{d}\, y}(y,z)$$

Daraus folgt

$$c_1(y,z) = \int z\,\mathrm{d}\, y = yz + c_2(z)$$

für eine Funktion $c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen $f_3(x,y,z) = \frac{\mathrm{d}\, U}{\mathrm{d}\, z}$ muss weiter gelten

$$y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz}+y = \frac{\mathrm{d}\, U}{\mathrm{d}\, z} = y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz}+y+\frac{\mathrm{d}\, c_2}{\mathrm{d}\, z}(z).$$

Daraus folgt

$$c_2(z) = \int 0 \,\mathrm{d}\, z = c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Nun berechnen wir

$$17 = U(0,0,0) = \sin(0)\mathrm{e}^0 + 0 + 0 + c = c.$$

Das gesuchte Potential U ist somit

$$U \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \sin(xy)\mathrm{e}^{yz} + x + yz + 17.$$

(b) Da wir ein Potential von f zur verfügung haben, ist das gesuchte Integral gegeben durch

$$\Big[U(C(t))\Big]_0^2 = \Big[\sin(\pi t^3)\mathrm{e}^{2t^2} + \pi t + 2t^2 + 17\Big]_0^2 = \big(2\pi + 8 + 17\big) - \big(17\big) = 2\pi + 8.$$

Aufgabe H 134. *Partikelbewegung in einen Vektorfeld*

Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto \binom{x_2}{x_1}$.

(a) Bestimmen Sie ein Potential U von f.

(b) Sei $C : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $C'(t) = f(C(t))$ für alle $t \in [a,b]$. Überprüfen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(U \circ C)(t) = |C'(t)|^2$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

(c) Sei nun $C : [0, \ln(2)] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \binom{\cosh(t)}{\sinh(t)}$. Bestätigen Sie die Formel aus **(b)** für C. Für die von C parametrisierte Kurve K berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\operatorname{rot} f(x) = 0 - 0 = 0$ und weil $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, besitzt f ein Potential. Um ein solches zu bestimmen, berechnen wir

$$U(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \int x_2 \,\mathrm{d}\, x_1 = x_1 x_2 + c(x_2)$$

für eine Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Letzteren Ausdruck leiten wir nach x_2 ab und erhalten

$$x_1 + c'(x_2).$$

Da diese Ableitung mit $f_2(x) = x_1$ übereinstimmen muss, muss gelten $c'(x_2) = 0$, also $c(x_2) = k$ mit $k \in \mathbb{R}$. Wir wählen $k = 0$ und erhalten das Potential

$$U \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x_1 x_2.$$

(b) Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(U \circ C)(t) = JU(C(t))C'(t) = \operatorname{grad} U(C(t)) \bullet C'(t) = f(C(t)) \bullet C'(t) \\ = C'(t) \bullet C'(t) = |C'(t)|^2 \end{aligned}$$

für alle $t \in [a,b]$.

(c) Zuerst einmal gilt in der Tat

$$C'(t) = \begin{pmatrix}\sinh(t)\\ \cosh(t)\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}\cosh(t)\\ \sinh(t)\end{pmatrix}\right) = f(C(t)) \quad \text{für alle} \quad t \in [0, \ln(2)].$$

Weiter gelten $|C'(t)|^2 = \cosh(t)^2 + \sinh(t)^2$ und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(U \circ C)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\cosh(t)\sinh(t)) = \sinh(t)^2 + \cosh(t)^2.$$

Diese Identitäten bestätigen die Formel aus **(b)**.

Schließlich berechnen wir das gesuchte Kurvenintegral indem wir das gefundene Potential ausnutzen. Damit gilt

$$\int_C f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_0^{\ln(2)} f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \big[U(C(t))\big]_0^{\ln(2)}$$
$$= \big[\cosh(t)\sinh(t)\big]_0^{\ln(2)} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(2)}}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(2)}}}{2} = \frac{1}{4}\big(2 + \frac{1}{2}\big)\big(2 - \frac{1}{2}\big) = \frac{15}{16}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 135. *Taylorpolynom*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f, x, 1)$, das Restglied $R_3(f, x, 1)$ und den Approximationsfehler $\sup\{\, |f(x) - T_3(f, x, 1)| \mid x \in \mathbb{R}\,\}$.

Lösungshinweise hierzu: Das gesuchte Taylorpolynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_3(f, x, 1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3 \\ = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3. \end{aligned}$$

Per Definition ist das gesuchte Restglied gegeben durch

$$R_3(f, x, 1) = \frac{f^{(4)}(1 + t(x-1))}{4!}(x-1)^4$$

für eine Zahl $t \in (0, 1)$. Wegen $f^{(4)}(x) = 0$ für alle x, ist dieses Restglied ebenfalls null. Nach dem Satz von Taylor is $f(x) - T_3(f, x, 1) = R_3(f, x, 1) = 0$ und damit ist der Approximationsfehler ebenfalls null.