Im Wintersemester 2012/13 wurde in der Vorlesung „Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge“ die Behandlung der Determinante neu gefasst:

3.11 Volumen und Determinanten

3.11.1 Berechnung von Flächeninhalten. Der *Flächeninhalt* des von $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ und $\tilde{y} = (y_1, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms ergibt sich als

$$|x_1\, y_2 - x_2\, y_1|\,.$$

[Man interpretiert $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ durch Anhängen einer Null als Elemente $x = (x_1, x_2, 0)$, $y = (y_1, y_2, 0)$ von $\mathbb{R}^3$ und benutzt das Vektorprodukt:

$$|x \times y| = \left|(x_1, x_2, 0) \times (y_1, y_2, 0)\right| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \end{pmatrix}\right\| = \left|x_1\, y_2 - x_2\, y_1\right|\,.$$

Der Betrag des Vektorprodukts ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms, vgl. 2.10.3.]

3.11.2 Berechnung von dreidimensionalen Volumina. Je drei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $z = (z_1, z_2, z_3)$ in $\mathbb{R}^3$ spannen ein *Parallelepiped* (*Spat*) auf. Das *Volumen* des von x, y, z aufgespannten Spats erhält man als Betrag des *Spatprodukts*

$$\begin{aligned} z \bullet (x \times y) \quad &:= \quad \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_2\, y_3 - x_3\, y_2 \\ x_3\, y_1 - x_1\, y_3 \\ x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \quad z_1\, x_2\, y_3 - z_1\, x_3\, y_2 + z_2\, x_3\, y_1 - z_2\, x_1\, y_3 + z_3\, x_1\, y_2 - z_3\, x_2\, y_1\,. \end{aligned}$$

Das Spatprodukt selbst können wir als *orientiertes Volumen* betrachten: Vertauscht man zwei der drei Vektoren x, y, z miteinander, so ändert sich das Vorzeichen von $z \bullet (x \times y)$.

3.11.3 Definitionen.

1. Die *Determinante einer* 2×2-*Matrix* wird definiert als die orientierte Fläche des Parallelogramms, das von ihren Zeilenvektoren aufgespannt wird:

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} := x_1\, y_2 - x_2\, y_1\,.$$

2. Die *Determinante einer* 3×3-*Matrix* wird definiert als das orientierte Volumen des Spats, das von ihren Zeilenvektoren aufgespannt wird:

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \quad z_1\, x_2\, y_3 - z_1\, x_3\, y_2 \\ + z_2\, x_3\, y_1 - z_2\, x_1\, y_3 \\ + z_3\, x_1\, y_2 - z_3\, x_2\, y_1 \,. \end{array}$$

3. Man schreibt oft auch $|A| := \det A$ — Vorsicht, hier droht die Gefahr der Verwechslung mit Beträgen und Längen!

3.11.4 Bemerkungen.

1. Sind die Zeilen linear abhängig, so wird die Determinante 0.
Umgekehrt folgt aus $\det A = 0$, dass die Zeilen linear abhängig sind.
Analoges gilt natürlich für die Spalten
$\big[$man gehe zur Transponierten über — es gilt $\det A = \det A^{\mathsf{T}}\big]$.
2. Insbesondere ist die Determinante *stets Null*, wenn die Matrix eine *Nullzeile* oder eine *Nullspalte* enthält!
3. Die Determinante ist *linear in jeder Zeile*, das heißt (zum Beispiel):

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 + X \\ Z_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ X \\ Z_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ sZ_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = s\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$$

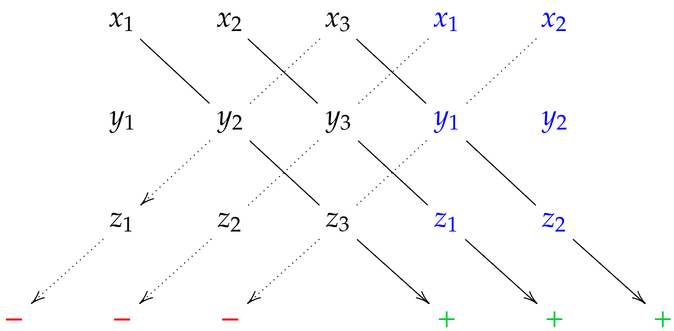
Zusammen mit Eigenschaft 1 ergibt sich, dass die Operation (aZ) die Determinante nicht verändert; zum Beispiel gilt:

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 + sZ_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$$

4. Die Determinante ist *alternierend*: Wenn man zwei Zeilen vertauscht, ändert sich das Vorzeichen. Zum Beispiel gilt

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ Z_1 \end{pmatrix}.$$

3.11.5 Regel von Sarrus. Um die Determinante einer 3×3-Matrix mit Spalten $S_1 = (x_1, y_1, z_1)^\top$, $S_2 = (x_2, y_2, z_2)^\top$, $S_3 = (x_3, y_3, z_3)^\top$ zu berechnen, fügen wir die Spalten S_1 und S_2 rechts noch einmal an und ordnen den entstehenden Diagonalen Vorzeichen zu:



Die Determinante $\det(S_1, S_2, S_3)$ erhält man, indem man die mit $+$ markierten Diagonalen aufmultipliziert, die Produkte addiert und davon die Produkte der mit $-$ markierten Diagonalen abzieht [nachrechnen].

3.11.6 Beispiele.

1. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2, \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1\,.$

2. $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot 0 = x_1\, y_2\,.$

3. $\det\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline 0 & 0 & z_3 \end{array}\right) \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \end{array} \quad = x_1\, y_2\, z_3 - x_2\, y_1\, z_3 = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\cdot z_3\,.$

Die Beobachtung in 3.11.6.3 lässt sich verallgemeinern auf Determinanten von Matrizen in so genannter *Block-Dreiecksgestalt*, siehe 3.13.8.

3.11.7 Die Leibniz-Formel für Determinanten. *Sei* $A = (a_{jk})_{1\leqq j,k\leqq n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Mit Hilfe von Permutationen und deren Signum lässt sich eine geschlossene Formel für die Determinante* $\det A$ *angeben:*

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma(j)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\cdot a_{1\,\sigma(1)}\cdot a_{2\,\sigma(2)}\cdots a_{n\,\sigma(n)}\,.$$

Hier ist $\mathrm{S}_n := \mathrm{Sym}(\{1,\ldots,n\})$ die symmetrische Gruppe auf der Menge der benutzten Indizes. Wir müssen noch erklären, was das *Signum* $\mathrm{sig}(\sigma)$ einer Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ ist. Dazu bestimmt man die Zahl f_σ der *Fehlstände* von σ: Das ist die Anzahl f_σ der Ziffernpaare (j,k) mit $j,k \leqq n$, für die $j < k$, aber $\sigma(j) > \sigma(k)$ ist. Das Signum ist dann $\mathrm{sig}(\sigma) := (-1)^{f_\sigma}$.
Eine ausführlichere Diskussion des Signums und seiner wechselseitigen Beziehung zur Determinante findet man im Abschnitt 4.4.

Diese geschlossene Formel für die Determinante taugt im Allgemeinen nicht für die konkrete Berechnung einer Determinante: Für $n = 4$ haben wir $4! = 24$ Summanden! Wir geben im Abschnitt 3.12 wesentlich bessere Verfahren an.

3.11.8 Beispiele. Wir werten die Leibniz-Formel aus für kleine Dimensionen:

1. Für $n = 2$ gilt $\mathrm{S}_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$, wobei τ beschrieben wird durch die Wertetabelle $\begin{array}{c|c|c} j & 1 & 2 \\ \hline \tau(j) & 2 & 1 \end{array}$. Wir erhalten $\mathrm{sig}(\mathrm{id}) = 1$ und $\mathrm{sig}(\tau) = -1$ und damit

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_2} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{j=1}^{2} a_{j\,\sigma(j)} &= a_{11}a_{22} + \mathrm{sig}(\tau) a_{1\,\tau(1)} a_{2\,\tau(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Für $n = 3$ erhalten wir $\mathrm{S}_3 = \{\mathrm{id}, \delta_1, \delta_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ mit den folgenden Wertetabellen:

$$\begin{array}{c|c|c|c|} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathrm{id}(j) & 1 & 2 & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c|c|} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline \delta_1(j) & 2 & 3 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c|c|} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline \delta_2(j) & 3 & 1 & 2 \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline \tau_1(j) & 1 & 3 & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c|c|} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline \tau_2(j) & 3 & 2 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c|c|} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline \tau_3(j) & 2 & 1 & 3 \end{array}.$$

Es gilt $\operatorname{sig}(\mathrm{id}) = 1 = \operatorname{sig}(\delta_1) = \operatorname{sig}(\delta_2)$ und $\operatorname{sig}(\tau_1) = -1 = \operatorname{sig}(\tau_2) = \operatorname{sig}(\tau_3)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sig}(\sigma)\prod_{j=1}^{3} a_{j\,\sigma(j)} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{1\,\delta_1(1)}a_{2\,\delta_1(2)}a_{3\,\delta_1(3)} + a_{1\,\delta_2(1)}a_{2\,\delta_2(2)}a_{3\,\delta_2(3)} \\
&\quad - a_{1\,\tau_1(1)}a_{2\,\tau_1(2)}a_{3\,\tau_1(3)} - a_{1\,\tau_2(1)}a_{2\,\tau_2(2)}a_{3\,\tau_2(3)} - a_{1\,\tau_3(1)}a_{2\,\tau_3(2)}a_{3\,\tau_3(3)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.12 Rechenregeln für Determinanten

Die Leibniz-Formel 3.11.7 ist ziemlich schlecht geeignet, um Determinanten schnell und sicher auszurechnen. Zum Glück gibt es andere Wege.

Determinanten vertragen sich sehr gut mit elementaren Zeilenumformungen[1]:

3.12.1 Lemma. *Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, mit Zeilen $Z_1, \ldots, Z_n$.*

(mZ) *Multipliziert man eine Zeile von A mit μ, so multipliziert sich auch die Determinante mit diesem Faktor:*

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \mu Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \mu \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

(VZ) *Vertauscht man in A zwei Zeilen, so ändert* $\det A$ *das Vorzeichen.*

(aZ) *Addiert man in A ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.*

[1]Wir verzichten hier auf die Beweise (die man direkt mit der Leibniz-Formel führen kann) und verweisen nur darauf, dass wir die entsprechenden Aussagen für kleines n in 3.11.4 bereits bemerkt haben.

Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu *derselben* Zeile, so ändert sich die Determinante sehr wohl: Addition des λ-fachen der Zeile zu sich selbst multipliziert diese Zeile (und nach (mZ) also die Determinante) mit dem Faktor $1+\lambda$.

3.12.2 Lemma. *Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:*

1. $\det A = 0 \iff \operatorname{Rg} A < n \iff$ *A ist nicht invertierbar*
2. $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$
   [später: mit Hilfe des Entwicklungssatzes 3.13.4, siehe 3.13.7].
   Damit stehen Aussagen über das Verhalten von Determinanten bei elementaren Spaltenoperationen (mS), (VS), (aS) *zur Verfügung.*

3.12.3 Multiplikativität der Determinante.

1. *Für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt* $\det(A\,B) = \det A \cdot \det B$.
   [Den Beweis überlassen wir den Mathematikern.]
2. *Es gilt* $\det E_n = 1$.
3. *Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$.
   In diesem Fall gilt $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
   $\left[\text{Aus } A^{-1}\cdot A = E_n \text{ folgt } \det(A^{-1})\cdot \det A = \det E_n = 1.\right]$

Die Determinante ist *nicht additiv*:
Im Allgemeinen gilt $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.
$\left[\text{Zum Beispiel ist ja } 1 = \det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \neq \det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \det\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right).\right]$

3.12.4 Lemma (Dreiecksmatrizen)**.** *Es sei T eine quadratische obere Dreiecksmatrix, also eine Matrix der Form*

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \clubsuit & \cdots & \clubsuit \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \clubsuit \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich die Determinante von T als Produkt der Hauptdiagonalelemente: D. h. es gilt $\det T = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.
Analoges gilt für untere Dreiecksmatrizen.

[Dies sind ja Transponierte von oberen Dreiecksmatrizen.]

3.12.5 Strategie zur Berechnung von Determinanten.
Bringe A durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf Dreiecksgestalt T, berechne $\det T$ (nach 3.12.4) und führe die notwendigen Korrekturen durch (Vorzeichen wg. (VZ), Skalare wg. (mZ), siehe 3.12.1).

Beweis der Determinantenformel für Dreiecksmatrizen.
Wegen der Homogenität können wir λ_1 „herausziehen“:

$$\det T = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \clubsuit & \cdots & \clubsuit \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \clubsuit \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & \clubsuit & \cdots & \clubsuit \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \clubsuit \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Durch Addition (naja, eher Subtraktion) geeigneter Vielfacher der ersten Spalte zu den anderen erreichen wir

$$\det T = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \clubsuit & \clubsuit \\ \vdots & \ddots & \ddots & \clubsuit \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \clubsuit & \clubsuit \\ \vdots & \ddots & \ddots & \clubsuit \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Sukzessive Spaltenoperationen führen schließlich auf

$$\det T = \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \det E_n = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \,,$$

wie behauptet. □

3.12.6 Beispiel. Durch wenige Umformungen kann man die Berechnung nach Sarrus erheblich vereinfachen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{(aS)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -8 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \\ 3 & -4 \end{matrix}$$
$$\overset{\text{Sarrus}}{=} 1 \cdot (-3) \cdot (-8) - (1 \cdot (-8) \cdot (-4)) = 24 - 32 = -8\,.$$

3.12.7 Beispiel. Man kann bereits erzielte Ergebnisse weiter verwenden:

$$\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&4\\3&2&1\end{vmatrix} \overset{(\mathrm{mZ})}{=} 2\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&4\\3&2&1\end{vmatrix} = 2\,(-8) = -16\,.$$

3.12.8 Beispiel. Wiederholte Anwendung von (mZ) liefert:

$$\det(\mu\,A) = \mu^n\,\det A\,.$$

3.12.9 Beispiel.

$$\begin{vmatrix}1&1&2&1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&2&0&0\end{vmatrix} = \begin{array}{r}\\ Z_2-Z_1:\\ Z_3-Z_1:\\ Z_4-Z_1:\end{array}\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&0&-1&0\\0&-2&-1&-2\\0&1&-2&-1\end{vmatrix}$$

$$= \overset{(\mathrm{VZ})}{-}\begin{array}{r}\\ \\ \\ Z_2\leftrightarrow Z_4:\end{array}\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&1&-2&-1\\0&-2&-1&-2\\0&0&-1&0\end{vmatrix} = -\begin{array}{r}\\ \\ Z_3+2\,Z_2:\\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&1&-2&-1\\0&0&-5&-4\\0&0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$= \overset{(\mathrm{VZ})}{+}\begin{array}{r}\\ \\ \\ Z_3\leftrightarrow Z_4:\end{array}\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&1&-2&-1\\0&0&-1&0\\0&0&-5&-4\end{vmatrix} = \begin{array}{r}\\ \\ \\ Z_4-5\,Z_3:\end{array}\begin{vmatrix}1&1&2&1\\0&1&-2&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-4\end{vmatrix} = 4\,.$$

3.12.10 Beispiel. Aus den in 3.12.1 genannten Eigenschaften folgt, dass det auch *additiv in jeder Zeile* ist. Zum Beispiel gilt:

$$\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&4\\3&2&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&4&6\\0+4&5+0&2+2\\3&2&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&4&6\\0&5&2\\3&2&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&4&6\\4&0&2\\3&2&1\end{vmatrix}$$

Solche Zerlegungen können helfen, die Berechnung einer Determinante auf bereits bekannte Ergebnisse oder auf Matrizen mit vielen Nullen zurückzuführen.

Beweis. Wir führen den Beweis der Additivität in der ersten Zeile für $n = 2$, zuerst unter der Annahme, dass die Zeilen Z_1, Z_2 in $\mathbb{K}^2$ linear unabhängig sind. Dann kann man jede Zeile $X \in \mathbb{K}^2$ darstellen als Linearkombination $X = x_1 Z_1 + x_2 Z_2$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2+X \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2+x_1Z_1+x_2Z_2 \end{pmatrix} \overset{\text{(aZ)}}{=} \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2+x_2Z_2 \end{pmatrix} \overset{\text{(mZ)}}{=} (1+x_2)\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + x_2 \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \overset{\text{(mZ)}}{=} \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ x_2Z_2 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{(aZ)}}{=} \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ x_1Z_1+x_2Z_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ X \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wenn Z_1, Z_2 linear abhängig sind, unterscheiden wir noch zwei Fälle:
Für $Z_1 = 0$ ergibt sich $\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2+X \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 \\ Z_2+X \end{pmatrix} = 0 = \det\begin{pmatrix} 0 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ X \end{pmatrix}$.
Es bleibt der Fall $Z_1 \neq 0$: Die lineare Abhängigkeit impliziert dann $Z_2 = sZ_1$ für einen Skalar $s \in \mathbb{K}$, und es folgt $\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2+X \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ sZ_1+X \end{pmatrix} \overset{\text{(aZ)}}{=} \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ X \end{pmatrix} = 0 + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ X \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ X \end{pmatrix}$.
Den Beweis für allgemeines n führt man ganz analog (allerdings mit wesentlich höherem Bezeichnungsaufwand). □

3.12.11 Bemerkung. Alle Rechenregeln für Determinanten gelten für Matrizen über beliebigen Körpern. Für uns sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die interessantesten, weil man in diesen Körpern sinnvoll Analysis betreiben kann. In der Informatik (insbesondere Codierungstheorie) werden endliche Körper wichtig.

3.13 Cofaktoren, Adjunkte und Entwicklungssatz

3.13.1 Definition. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.
Mit $\widetilde{A}_{jk}$ bezeichnen wir die $\big((n-1)\times(n-1)\big)$-Matrix, die aus A entsteht, indem man die j-te Zeile und die k-te Spalte streicht. Der (j,k)-*Cofaktor* von A (oder die (j,k)-*Adjunkte*) ist die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante

$$\tilde{a}_{jk} := (-1)^{j+k} \det \widetilde{A}_{jk}\,.$$

Die *Cofaktor-Matrix* von A ist $\widetilde{A} := \big(\tilde{a}_{jk}\big)_{1\leqq j,k\leqq n}$, deren Transponierte $\widetilde{A}^{\mathsf{T}}$ heißt *Adjunkte* von A.

3.13.2 Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}: \qquad \begin{aligned} \tilde{A}_{12} &= \begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{2} \\ -1 & \cancel{0} & 3 \\ 1 & \cancel{1} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_{22} &= \begin{pmatrix} 4 & \cancel{5} & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 1 & \cancel{1} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten z. B. die (j,k)-Cofaktoren

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2-3) = 5\,, \\ \tilde{a}_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(8-2) = 6\,. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -8 & 6 & 1 \\ 15 & -14 & 5 \end{pmatrix}$ und $\widetilde{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 15 \\ 5 & 6 & -14 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3.13.3 Bemerkung. Anstatt für jeden Cofaktor das Vorzeichen $(-1)^{j+k}$ zu berechnen, kann man auch das über die Matrix verteilte *Vorzeichenmuster* (Schachbrettmuster) benutzen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \cdots & \mp \\ + & - & + & \cdots & \pm \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm & \mp & \pm & \cdots & + \end{pmatrix}$$

3.13.4 Entwicklungssatz. *Es sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt für alle j,k:*

1. $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}\, \tilde{a}_{j\ell}$ *(Entwicklung nach der j-ten Zeile)*
2. $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell k}\, \tilde{a}_{\ell k}$ *(Entwicklung nach der k-ten Spalte)*

Außerdem gilt:

3. $A\,\widetilde{A}^{\mathsf{T}} = (\det A)\, E_n = \widetilde{A}^{\mathsf{T}} A\,.$

3.13.5 Beispiel.
Wir entwickeln die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} |A| \quad = \quad & (+1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ & +(+1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt kann man die (3×3)-Determinanten weiter entwickeln, oder auch die Regel von Sarrus anwenden.

Es ist besonders günstig, nach einer Zeile oder Spalte zu entwickeln, die viele Nullen enthält.

3.13.6 Beispiel. Die folgende Determinante entwickelt man am besten nach der dritten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2+3) = 20\,.$$

3.13.7 Lemma. *Für jede quadratische Matrix A gilt* $\det A = \det A^\top$.

Beweis. Wir gehen per Induktion nach der Anzahl n der Zeilen vor:

IA Für $n = 1$ stimmen Matrix und Transponierte überein.

IS Jetzt nehmen wir an, dass für jede $(n \times n)$-Matrix die Determinante mit der der Transponierten übereinstimmt.

Es sei A eine quadratische Matrix mit $n+1$ Zeilen. Um die Determinante der Transponierten $A^\top = (b_{kj})$ (mit $b_{kj} = a_{jk}$) zu bestimmen, entwickeln wir nach der ersten Zeile: Das Schachbrettmuster der Vorzeichenverteilung ändert sich beim Transponieren nicht. Für die Cofaktoren $\tilde{b}_{kj}$ der Transponierten gilt $\tilde{b}_{kj} = \tilde{a}_{jk}$ [Ind.-Ann.], wir erhalten also $\det A^\top = \sum_{\ell=1}^{n+1} b_{1\ell}\, \tilde{b}_{1\ell} = \sum_{\ell=1}^{n+1} a_{\ell 1}\, \tilde{a}_{\ell 1} = \det A$ [nach der ersten Spalte entwickelt]. □

3.13.8 Determinanten von Block-Dreiecksmatrizen. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine Unterteilung $t_0 = 1 < t_2 < \cdots < t_d \leqq t_{d+1} = n$ der Menge der Zeilennummern. Dazu ergibt sich eine Unterteilung jeder $n \times n$ Matrix $A = (a_{jk})_{1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq k \leqq n}$ in insgesamt d^2 *Blöcke*: Dies sind die Untermatrizen $A_{zs} := (a_{jk})_{t_z \leqq j < t_{z+1}, t_s \leqq k < t_{s+1}}$ für $1 \leqq z \leqq d$ und $1 \leqq s \leqq d$.

Die Matrix A heißt *Block-Dreiecksmatrix*, wenn es eine solche Unterteilung so gibt, dass jeder Block, der ganz unterhalb der Hauptdiagonalen liegt, eine Nullmatrix ist.

Zum Beispiel ist die in 3.11.6.3 betrachtete Matrix $\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline 0 & 0 & z_3 \end{array}\right)$ eine Block-Dreiecksmatrix zur Unterteilung $t_1 = 1 < t_2 = 3 = t_3$ mit $d = 2$: Die Blöcke sind $A_{11} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} z_3 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes beweist man:

Ist A eine Block-Dreiecksmatrix mit d^2 Blöcken, also

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1d} \\ \hline 0 & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2d} \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{dd} \end{array}\right),$$

so gilt $\det A = (\det A_{11}) \cdots (\det A_{dd})$. (Vgl. 3.11.6.3).

Ein etwas größeres Beispiel: $\det \left(\begin{array}{rr|rrrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 17 & 29 & -2 & 110 & 92 & -11 \\ 1 & 1 & 17 & 4 & 2 & -29 & 92 & 110 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 7 & 92 & 361 & 410 & 829 & -41 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 29 & 53 & 999 & 287 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & -10 & 492 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 410 & 77 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 92 & 361 \\ 0 & 17 & 29 & 53 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= 1 \cdot (2 \cdot 17 \cdot 1 \cdot 3) \cdot (-9) = -918.$