2. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer, bau, immo, tpbau**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1-4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **5-6** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen können Sie ohne weitere Begründung verwenden. Alle weiteren Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	b^x	$\sin x$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$a\cdot x^{a-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln b\cdot b^x$	$\cos x$	$(\sin x)^2$
$f(x)$	$\tan x$	$\arctan x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\cos x$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$-\sin x$	$(\cos x)^2$

$a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^+$

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Vorlesungsbeginn vor dem Büro von Prof. Stroppel (Raum V57.7.323) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 26. 10. 2006 bei Frau Stein (Raum V57.8.130, nur vormittags) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte und die zugehörigen komplexen Eigenräume von A. Geben Sie für $\mathbb{C}^2$ eine Basis $B\colon b_1, b_2$ aus Eigenvektoren von A an.

(b) Es sei $\alpha\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\alpha_B$, die die Abbildung α bezüglich der Basis B aus Eigenvektoren beschreibt.

Aufgabe 2 (*19 Punkte*)

Gegeben sei die folgende Quadrik Q im $\mathbb{R}^2$:

$$Q : 5x_1^2 - 6\sqrt{3}x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 - 4\sqrt{3}x_2 + 4 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie auch die Koordinatentransformation an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform den Typ der Quadrik.

Aufgabe 3 (*20 Punkte*)

Untersuchen Sie jeweils, ob Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\arctan(k)}$$

(d)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Aufgabe 4 (*23 Punkte*)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorenmethode von Lagrange alle kritischen Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x^4 - 2x^2 + y$$

unter der Nebenbedingung $y^2 = -x^2y$ Extrema besitzen könnte.

Hinweise:

Eine Typbestimmung der Extrema ist nicht verlangt.

Punkte können nur bei Verwendung der angegebenen Methode erworben werden.

Name:		**Matrikelnr:**		**Fach:**	

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 e^x$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\boxed{} , \boxed{} \right)^\top$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom der Stufe 2 von f um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ lautet

$$T_2\big(f, (x, y), (0, 0)\big) = \boxed{}.$$

Geben Sie die Gleichung der Schmiegquadrik an den Graphen von f im Punkt $(0, 0)$ an.

$$\boxed{}$$

Die Schmiegquadrik ist damit von folgendem Typ.

☐ Ebene	☐ Hyperbolisches Paraboloid	☐ zweischaliges Hyperboloid
☐ Elliptisches Paraboloid	☐ Ellipsoid	☐ parabolischer Zylinder

Aufgabe 6 (*14 Punkte*)

Berechnen Sie folgende Reihen und Integrale.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^k}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\pi^k}$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} \,\mathrm{d}\,x$	$\int_1^{e} x \ln(x) \,\mathrm{d}\,x$