Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte und die zugehörigen komplexen Eigenräume von A. Geben Sie für $\mathbb{C}^2$ eine Basis $B\colon b_1, b_2$ aus Eigenvektoren von A an.

(b) Es sei $\alpha\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\alpha_B$, die die Abbildung α bezüglich der Basis B aus Eigenvektoren beschreibt.

(a) Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1 + i \qquad\qquad \lambda_2 = 1 - i$$

Eigenräume:

$$V(\lambda_1) = \left\{ v \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; v = \mu \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} ; \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ v \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; v = \mu \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} ; \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

Eine Basis aus Eigenvektoren ist zum Beispiel:

$$B\colon \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

(Für Kontrollzwecke das charakteristische Polynom: $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$.)

(b) Man weiß (eine Rechnung ist deswegen nicht zwingend erforderlich):

$${}_B\alpha_B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (*19 Punkte*)

Gegeben sei die folgende Quadrik Q im $\mathbb{R}^2$:

$$Q : 5x_1^2 - 6\sqrt{3}x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 - 4\sqrt{3}x_2 + 4 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie auch die Koordinatentransformation an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform den Typ der Quadrik.

Charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 32 = (\lambda - 8)(\lambda + 4)$$

Die normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = -4$ sind also:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Das ergibt dann als Transformationsmatrix $x = Ty$:

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = T^T$$

Damit ergibt sich als Gleichung der Quadrik nach der Hauptachsentransformation:

$$8y_1^2 - 4y_2^2 - 8y_2 + 4 = 0$$

Durch quadratisches Ergänzen erhalten wir die Gleichung

$$8y_1^2 - 4(y_2 + 1)^2 + 4 + 4 = 0$$

Damit ergibt sich als Normalform (Konstante auf 1 normiert):

$$z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 1 = 0 \quad \text{Eine Hyperbel}$$

Die Koordinatentransformation läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

oder alternativ

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (*20 Punkte*)

Untersuchen Sie jeweils, ob Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2}$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\arctan(k)}$$

(d)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

(a) Mit der Potenzreihe der Exponentialfunktion erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}\mp\cdots\right)}{x^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Alternativ: Mit l'Hospital erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1+e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

(b) Mit den Definitionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

erhält man

$$\lim_{x\to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1\,.$$

(c) Da für $k\in\mathbb{N}$

$$0 < \arctan(k) < \pi/2$$

gilt, folgt

$$\frac{1}{k\arctan(k)} > \frac{2}{\pi k}\,.$$

Da aber die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\arctan(k)}$.

(d) Mit der Substitution $u = 2x$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2$ erhält man

$$\lim_{t\to +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{2}\int_0^{2t} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{2}\left[\arctan(u)\right]_0^{2t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{2}\arctan(2t) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Aufgabe 4 (*23 Punkte*)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorenmethode von Lagrange alle kritischen Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x^4 - 2x^2 + y$$

unter der Nebenbedingung $y^2 = -x^2 y$ Extrema besitzen könnte.

Hinweise:

Eine Typbestimmung der Extrema ist nicht verlangt.

Punkte können nur bei Verwendung der angegebenen Methode erworben werden.

Die Multiplikatorenmethode ist nur anwendbar für Punkte (x, y) mit $\operatorname{grad} g(x, y) \neq (0, 0)$: Dies schließt den Punkt $(0, 0)^\mathsf{T}$ aus.

Zusätzlich zur Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 y + y^2 = 0$ ist

$$0 = \operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} (4x^3 - 4x) \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2xy \\ 2y + x^2 \end{pmatrix}$$

zu lösen, es ergibt sich also das Gleichungssystem

$$y(y + x^2) = 0 \tag{1}$$

$$2x(2x^2 - 2 + \lambda y) = 0 \tag{2}$$

$$1 + \lambda(2y + x^2) = 0\,. \tag{3}$$

Aus (1) ergeben sich somit zwei Fälle.

$y = 0$: Eingesetzt in (2) folgt somit $2x(2x^2 - 2) = 0$, also $x = 0$ oder $x = \pm 1$.
Dabei lässt sich aber feststellen, dass $x = y = 0$ im Widerspruch zu $\operatorname{grad} g \neq (0, 0)^\mathsf{T}$ steht.

$y = -x^2$: Eingesetzt in (3) folgt somit $1 = \lambda x^2 = -\lambda y$.
Dies in (2) eingesetzt führt auf $2x(2x^2 - 3) = 0$, also $x = \pm\sqrt{3/2}$, da $x = y = 0$ wie oben einen Widerspruch ergibt.

Als kritische Punkte ergeben sich demnach

$$(1, 0)\ ,\ (-1, 0)\ ,\ \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\right) \text{ und } \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\right).$$

Über den Punkt $(0, 0)^\mathsf{T}$ kann mit der verlangten Methode keine Auskunft gegeben werden. Bei einer weiteren (hier nicht verlangten) Diskussion der kritischen Stellen im Blick auf die Frage, ob tatsächlich Extrema vorliegen, müsste dieser Punkt noch mit betrachtet werden.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 e^x$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\boxed{2x + y^2 e^x} , \boxed{2ye^x} \right)^\top$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{2 + y^2 e^x} & \boxed{2ye^x} \\ \boxed{2ye^x} & \boxed{2e^x} \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom der Stufe 2 von f um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ lautet

$$T_2\big(f, (x, y), (0, 0)\big) = \boxed{x^2 + y^2}.$$

Geben Sie die Gleichung der Schmiegquadrik an den Graphen von f im Punkt $(0, 0)$ an.

$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

Die Schmiegquadrik ist damit von folgendem Typ.

	Ebene		Hyperbolisches Paraboloid		zweischaliges Hyperboloid
X	Elliptisches Paraboloid		Ellipsoid		parabolischer Zylinder

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Berechnen Sie folgende Reihen und Integrale.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^k}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\pi^k}$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}\,\mathrm{d}\,x$	$\int_1^e x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$
$\frac{\pi}{\pi-1}$	$\sqrt[\pi]{e}$	$2\sqrt{2}-2$	$\frac{1}{4}(e^2+1)$