**Aufgabe 1** (*6 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom der Stufe 2 der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt $x_0$.

**(a)** $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ um $x_0 = 0$.

**(b)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^{x-1}$ um $x_0 = 1$.

---

**(a)** Mit

$$\begin{array}{rcl c rcl} & & & & f(0) & = & 0 \\ f'(x) & = & \dfrac{(x-1)-x}{(x-1)^2} & \Longrightarrow & f'(0) & = & -1 \\ f''(x) & = & \dfrac{2}{(x-1)^3} & \Longrightarrow & f''(0) & = & -2 \end{array}$$

folgt

$$T_2(f, x, 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = -x - x^2 .$$

**(b)** Mit

$$\begin{array}{rcl c rcl} & & & & f(1) & = & 1 \\ f'(x) & = & \ln(2)2^{x-1} & \Longrightarrow & f'(1) & = & \ln(2) \\ f''(x) & = & \big(\ln(2)\big)^2 2^{x-1} & \Longrightarrow & f''(1) & = & \big(\ln(2)\big)^2 \end{array}$$

folgt

$$T_2(g, x, 1) = f(1) + f'(1)x + \frac{1}{2}f''(1)x^2 = 1 + \ln(2)(x-1) + \frac{1}{2}(\ln(2))^2(x-1)^2 .$$

**Aufgabe 2** (*7 Punkte*) Begründen Sie, ob die folgenden Reihen und Integrale konvergieren oder divergieren.

**(a)** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$

**(b)** $\int_2^{\infty}\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}\,x$

**(c)** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$

---

**(a)** Die Reihe konvergiert nach dem Kriterium von Leibnitz. Dieses ist anwendbar, weil die Folgenglieder alternieren und ihr Absolutbetrag $\frac{1}{k}$ streng monoton gegen 0 geht.

**(b)** Das Integral konvergiert, denn $\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ ist eine konvergente Majorante. Das Integral dieser Majorante beträgt $\frac{1}{8}$.

**(c)** Diese Reihe divergiert, denn die harmonische Reihe ist eine divergente Minorante. Dies folgt aus der Tatsache, dass für $k \geqq 1$ die Ungleichung $\sqrt{k} \leqq k$ gilt.

**Aufgabe 3** (*9 Punkte*)

Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (3x - 2y + 1,\ 2x + y - 1)$ bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ gegeben. Der Punkt $P = (-1, 3)$ und die Vektoren $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$.

**(a)** Bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ lautet die Abbildung

$$_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}\,.$$

**(b)** Die Koordinatentransformationen von $\mathbb{F}$ nach $\mathbb{E}$ und umgekehrt lauten

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}}\,.$$

**(c)** Geben Sie eine Beschreibung von $\alpha$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$$_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}\,.$$

**Aufgabe 4** (*8 Punkte*) Gegeben ist die Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}$

wobei $\rho$ den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}$ bezeichnet.

Geben Sie den Wert von $\rho$ an: $\rho = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Ableitung $f'$ an: $f'(x) = \boxed{\frac{2}{1-2x}}$.

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f$ an: $f(x) = \boxed{-\ln|1-2x|}$.