1. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer, bau, immo, tpbau**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1–4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **5–7** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen können Sie ohne weitere Begründung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	b^x	$\sin x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a \cdot x^{a-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln b \cdot b^x$	$\cos x$
$f(x)$	$\tan x$	$\arctan x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\cos x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$-\sin x$

$a \in \mathbb{R}$,
$b \in \mathbb{R}^+$

- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab **12. 10. 2007** über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich vom **15. 10.** bis **18. 10. 2007** bei Frau Stein (Raum V57.8.130, nur vormittags) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*12* Punkte) Berechnen Sie die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^3 - x^2}\ \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}\ \mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\ \mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\ \mathrm{d}\,x$

Aufgabe 2 (*8* Punkte) Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5-\alpha & 3-\alpha \\ -3+\alpha & -1+\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α. Sind diese von α abhängig?

(b) Berechnen Sie die Eigenräume von A_α.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α reell diagonalisierbar?

Aufgabe 3 (*5* Punkte) Skizzieren Sie die folgende Menge M in der komplexen Zahlenebene und begründen Sie ihre Skizze:

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leqq 2 \ \wedge\ \mathrm{Re}(z) \geqq \mathrm{Im}(z)\}.$$

Aufgabe 4 (*5* Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + 2y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$|f(x,y)| \leqq x^2 + y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Begründen Sie, warum die Funktion f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ stetig ist.

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 5 (*8* Punkte) Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$P = (1, -1) \qquad \text{und} \qquad Q = (-2, 0)$$

sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in solche bezüglich $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt.

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(\boxed{} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\boxed{} \right)$$

Bestimmen Sie die Umkehrung dieser Transformation.

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(\boxed{} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\boxed{} \right)$$

Geben Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an.

$$\mathrm{J}\left({}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\boxed{} \right)$$

bitte wenden

Aufgabe 6 (*4* Punkte) Geben Sie die Grenzwerte für die folgenden Reihen und Integrale an:

(a) $\int\limits_0^\infty \cos(x)e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{5^k}{8^k} = \boxed{}$

(b) $\sum\limits_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\ln(5)^k}{k!} = \boxed{}$

Aufgabe 7 (*6* Punkte) Mit dem reellen Parameter α sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy\cos(y^2) - ze^x \\ x^2\cos(y^2) - 2x^2y^2\sin(y^2) \\ \alpha e^x \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie

$$\operatorname{rot} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld f ein Potential?

$\alpha = \boxed{}$

(c) Berechnen Sie für das α aus Teil **(b)** ein Potential U zum Vektorfeld f.

$U(x, y, z) = \boxed{}$