1. Klausur der Diplomvorprüfung - Musterlösung

für **aer, bau, immo, tpbau**

Aufgabe 1 (*12* Punkte) Berechnen Sie die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale.

(a) $\int_1^2 \sqrt{x^3 - x^2}\ \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}\ \mathrm{d}\,x$

(c) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\ \mathrm{d}\,x$ **(d)** $\int \frac{1}{x\ln(x)}\ \mathrm{d}\,x$

(a) Wir formen zunächst den Integranden um, indem wir x vor die Wurzel ziehen. Anschliessend substituieren wir $u = x - 1$ (woraus $\mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x$ folgt):

$$\int_1^2 \sqrt{x^3 - x^2}\ \mathrm{d}\,x = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ \mathrm{d}\,x = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}\,u = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{15}$$

Eine andere Lösungsmöglichkeit ist die Integration durch partielle Integration:

$$\int_1^2 \sqrt{x^3 - x^2}\ \mathrm{d}\,x = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ \mathrm{d}\,x = \left[\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}\,x$$
$$= \left[\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{16}{15}$$

(b) Durch Substitution mittels $\sqrt{3}x = \sinh(u)$, wodurch $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,u} = \frac{\cosh(u)}{\sqrt{3}}$ wird, erhalten wir:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}\ \mathrm{d}\,x = \int_0^{\mathrm{Arsinh}(3)} \frac{\cosh(u)}{\sqrt{3}\,\sqrt{1+\sinh^2(u)}}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\mathrm{Arsinh}(3)} \frac{\cosh(u)}{\cosh(u)}\,\mathrm{d}\,u$$
$$= \left[\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_0^{\mathrm{Arsinh}(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arsinh}(3)$$

(c) Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

Damit ergibt sich für das Integral:

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\ \mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{1}{x} - \arctan(x)\right]$$

(d) Durch Substitution $u = \ln(x)$ und daher $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{x}$ erhalten wir:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\ \mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u = \Big[\ln|u|\Big] = \Big[\ln|\ln(x)|\Big]$$

Natürlich kann hier auch die Regel für Integranden der Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ angewandt werden, mit dem selben Ergebnis.

Aufgabe 2 (*8* Punkte) Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5-\alpha & 3-\alpha \\ -3+\alpha & -1+\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α. Sind diese von α abhängig?

(b) Berechnen Sie die Eigenräume von A_α.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α reell diagonalisierbar?

(a) Das charakteristische Polynom lautet

$$(5-\alpha-\lambda)(-1+\alpha-\lambda) - (\alpha-3)(-\alpha+3) = (\lambda-2)^2,$$

somit ergibt sich der Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $e_\lambda = 2$.

(b) Aus $(A - \lambda E)b = 0$ folgt

$$\left(\begin{array}{cc||c} 3-\alpha & 3-\alpha & 0 \\ -3+\alpha & -3+\alpha & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc||c} 3-\alpha & 3-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Für $\alpha = 3$ ergeben sich zwei Nullzeilen und somit

$$V(\lambda) = \mathbb{R}^2 \qquad \Rightarrow \qquad d_{\lambda_2} = 2.$$

Für $\alpha \neq 3$ gilt das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc||c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

also

$$V(\lambda) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; v = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\} \qquad \Rightarrow \qquad d_\lambda = 1.$$

(c) Für $\alpha = 3$ entspricht die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts seiner geometrischen Vielfachheit, A ist dann also diagonalisierbar.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Skizzieren Sie die folgende Menge M in der komplexen Zahlenebene und begründen Sie ihre Skizze:

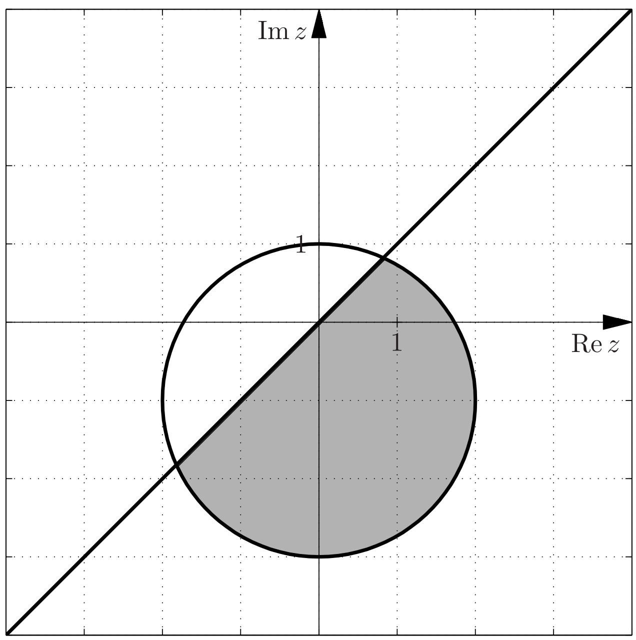
$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leqq 2 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z) \geqq \mathrm{Im}(z)\}.$$

Die Menge wird durch zwei Ungleichungen beschrieben. Jede dieser Ungleichungen beschreibt eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die Menge M ist der Schnitt dieser beiden Mengen.

Die erste Ungleichung $|z+i| \leqq 2$ beschreibt das Innere einschließlich Rand eines Kreises mit Radius 2 um den Mittelpunkt $(0, -i)$.

Die Ungleichung $\mathrm{Re}(z) \geqq \mathrm{Im}(z)$ beschreibt alle Punkte, die auf oder unterhalb der ersten Winkelhalbierenden $(y = x)$ liegen.

Die Schnittmenge M sieht man in der Skizze unten:



Aufgabe 4 (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + 2y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$|f(x,y)| \leqq x^2 + y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Begründen Sie, warum die Funktion f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ stetig ist.

(a) Für $x = y = 0$ ist

$$|f(x,y)| = 0 \leqq 0 = x^2 + y^2$$

erfüllt. In allen anderen Punkten ergeben die Binomische Formel und eine Abschätzung des Nenners

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^4 - y^4}{x^2 + 2y^2} \right| \leqq \frac{|(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)|}{|x^2 + y^2|} = |x^2 - y^2| \,,$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|f(x,y)| \leqq |x^2 + (-y^2)| \leqq x^2 + y^2 \,.$$

(b) Sei ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Aus $|(x,y) - (0,0)| < \delta$ ergibt sich zunächst

$$|(x,y) - (0,0)| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

und somit mit Hilfe der Abschätzung aus **(a)**

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,z) - 0| \leqq x^2 + y^2 < \delta^2 \,.$$

Wird also $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ gewählt, so sind die Voraussetzungen des ε–δ–Kriteriums erfüllt, die Funktion f ist also in $(0,0)$ stetig.

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 5 (8 Punkte) Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$P = (1, -1) \qquad \text{und} \qquad Q = (-2, 0)$$

sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in solche bezüglich $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt.

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Umkehrung dieser Transformation.

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an.

$$\mathrm{J}\left({}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

bitte wenden

Aufgabe 6 (*4* Punkte) Geben Sie die Grenzwerte für die folgenden Reihen und Integrale an:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x)e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(5)^k}{k!} = \boxed{\frac{1}{5}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{8^k} = \boxed{\frac{5}{3}}$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Mit dem reellen Parameter α sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy\cos(y^2) - ze^x \\ x^2\cos(y^2) - 2x^2y^2\sin(y^2) \\ \alpha e^x \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie

$$\operatorname{rot} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{-(1+\alpha)e^x} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld f ein Potential?

$$\alpha = \boxed{-1}$$

(c) Berechnen Sie für das α aus Teil **(b)** ein Potential U zum Vektorfeld f.

$$U(x, y, z) = \boxed{x^2y\cos(y^2) - ze^x}$$