Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer, autip, bau, fmt, immo, mach, tema, tpbau, tpmach, umw, verf, wewi**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1–4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **5–6** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen können Sie ohne weitere Begründung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	b^x	$\sin x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$a\cdot x^{a-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln b\cdot b^x$	$\cos x$
$f(x)$	$\tan x$	$\arctan x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\cos x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$-\sin x$

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$

- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab **12. 10. 2007** über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich vom **15. 10.** bis **18. 10. 2007** bei Frau Stein (Raum V57.8.130, nur vormittags) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*11* Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6z^2 - 12z = 0\right\}$$

und die Gestalt von Q (affine Klassifikation).

Aufgabe 2 (*10* Punkte) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto xy$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

ein globales Extremum besitzt. Entscheiden Sie auch, ob es sich bei den Extrema jeweils um Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 3 (*8* Punkte) Begründen Sie, ob die folgenden Reihen und Integrale konvergieren oder divergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2/3}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 4 (*7* Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\} \to \mathbb{R} \,:\, (x_1,x_2) \mapsto \frac{x_1}{(x_1-2)^2 + x_2^2}.$$

Weiter sei K_1 die obere Hälfte eines Kreises um $(2,0)$ mit Radius 2. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_1} f(s)\ \mathrm{d}\,s.$$

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \ln(x_2) \\ x_1^2\, x_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Weiter sei K_2 der Graph der Funktion $h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon t \mapsto e^t$, der von $(-1,\frac{1}{e})$ bis $(1,e)$ durchlaufen wird. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_2} g(x)\ \mathrm{d}\,x.$$

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 5 (*6* Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{2k+1},$$

wobei ρ den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{2k+1}$ bezeichnet.

Geben Sie den Wert von ρ an: $\rho = \boxed{}$.

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Ableitung f' an:

$$f'(x) = \boxed{}.$$

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für f an:

$$f(x) = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*6* Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(xy)$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix},$$

die Hessematrix

$$\mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix},$$

und geben Sie das Taylorpolynom der zweiten Stufe für den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$ an:

$$T_2\big(f, (x, y), (1, \pi/2)\big) = \boxed{}$$