Klausur der Diplomvorprüfung - Musterlösung

für **aer, autip, bau, fmt, immo, mach, tema, tpbau, tpmach, umw, verf, wewi**

Aufgabe 1 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonalisieren Sie die Matrix A und geben Sie die Transformationsmatrix und die Diagonalmatrix an.

(b) Bestimmen Sie A^{100}.

(a) Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4\,.$$

Damit erhält man die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ mit den zugehörigen normierten Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine mögliche Transformationsmatrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Diagonalmatrix

$$D = T^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$A^{100} = \left(TDT^{\mathsf{T}}\right)^{100} = TD^{100}T^{\mathsf{T}}\,,$$

und mit

$$D^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{100} \end{pmatrix}.$$

ist

$$A^{100} = TD^{100}T^{\mathsf{T}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 + 4^{101} & -2 + 2 \cdot 4^{100} \\ -2 + 2 \cdot 4^{100} & 4 + 4^{100} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

Man erhält mit der Formel ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$ aus der Vorlesung direkt

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

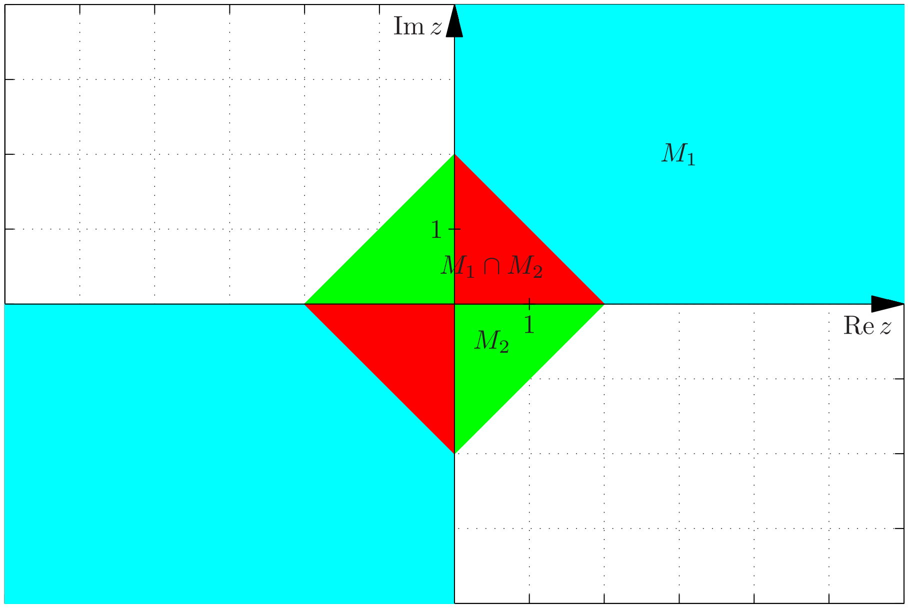
und mit der Formel ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v - P)$ für die Umkehrabbildung

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 3 (*3 Punkte*)

Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) \geqq 0\}$ und $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leqq 4\}$ in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$.



Aufgabe 4 (*7 Punkte*)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 - \frac{\alpha}{2}y + 3x^2 \\ 2x^2y - x \end{pmatrix}$$

und die Kurven

$$\mathcal{C}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t,t)^{\mathsf{T}},$$
$$\mathcal{C}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t,t^2)^{\mathsf{T}}.$$

Für welche Werte von α existiert zu f ein Potential? $\alpha \in \{2\}$

Geben Sie für diese Werte ein Potential an: $x^2y^2 - xy + x^3$

Berechnen Sie für $\alpha = 4$ das Wegintegral $\int_{\mathcal{C}_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,s =$ $\frac{1}{2}$

Berechnen Sie für $\alpha = 2$ das Wegintegral $\int_{\mathcal{C}_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,s =$ 1