2. Klausur der Diplomvorprüfung - Musterlösung

für **aer, autip, bau, fmt, immo, mach, tema, tpbau, tpmach, umw, verf, wewi**

Aufgabe 1 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonalisieren Sie die Matrix A und geben Sie die Transformationsmatrix und die Diagonalmatrix an.

(b) Bestimmen Sie A^{100}.

(a) Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4\,.$$

Damit erhält man die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ mit den zugehörigen normierten Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine mögliche Transformationsmatrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Diagonalmatrix

$$D = T^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$A^{100} = \left(TDT^{\mathsf{T}}\right)^{100} = TD^{100}T^{\mathsf{T}}\,,$$

und mit

$$D^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{100} \end{pmatrix}.$$

ist

$$A^{100} = TD^{100}T^{\mathsf{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 + 4^{101} & -2 + 2\cdot 4^{100} \\ -2 + 2\cdot 4^{100} & 4 + 4^{100} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Beschreibung der Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

Man erhält mit der Formel ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$ aus der Vorlesung direkt

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und mit der Formel ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v - P)$ für die Umkehrabbildung

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Nach Satz 4.7.12 wird die Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ durch

$$v \mapsto F^{-1}AFv + F^{-1}(AP - P + t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit $t = 0$ beschrieben.

Aufgabe 3 (*7 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_4^8 \frac{1}{9-4x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\,\mathrm{d}\,x$

(a)

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{1}{9-4x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_4^8 \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3+2x}+\frac{1}{3-2x}\right)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{12}\Big[\ln|3+2x|-\ln|3-2x|\Big]_4^8\\ &= \frac{1}{12}\Big(\ln(19)-\ln(11)-\ln(13)+\ln(5)\Big)\end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $t = e^{5x}$ ergibt sich $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = 5e^{5x}$ und damit:

$$\begin{aligned}\int \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= [\arctan(t)]\\ &= \big[\arctan(e^{5x})\big]\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*9 Punkte*)

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 4y,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto (x-y)^2 - 4(x-y),$$

sowie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f_1(x,y) f_2(x,y).$$

(a) Skizzieren Sie die Vorzeichenverteilung der Funktion f. Begründen Sie Ihre Skizze.

(b) Welche Sattelpunkte von f können Sie aus Ihrer Skizze ablesen? Begründen Sie, warum diese Punkte kritische Punkte bzw. Sattelpunkte sind.

(a) Für f_1 ergibt sich mittels quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 4y + 4) - 4 \\ &= (x-2)^2 + (y+2)^2 - 8. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

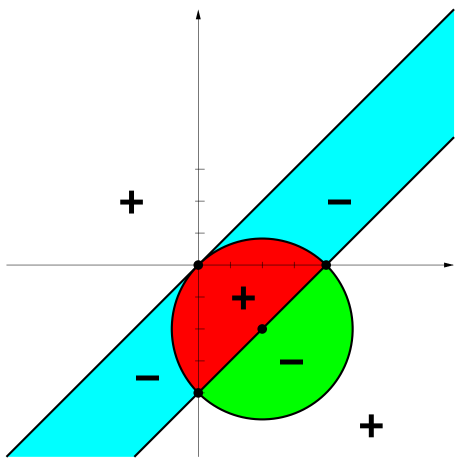
$$f_2(x,y) = (x-y-4)(x-y).$$

Die Nullstellenmenge von f_1 ist somit ein Kreis um $(2,-2)$ mit Radius $\sqrt{8}$, die Nullstellenmenge von f_2 sind zwei Geraden mit Normalenvektor $(1,-1)^\mathsf{T}$ durch die Punkte $(0,0)$ beziehungsweise $(4,0)$.

Als Nullstellenmenge von f ergibt sich somit die Vereinigung der beiden Nullstellenmengen von f_1 und f_2.

Betrachtet man die Vorzeichenverteilung der Funktion f_1, so erhält man durch Punktprobe $f_1(2,-2) = -8 < 0$ und $f_1(0,1) = 5 > 0$. Für f_2 ergibt sich $f_2(-1,0) = 5 > 0$, $f_2(1,0) = -4 < 0$ und $f_2(5,0) = 5 > 0$.

Man erhält somit folgende Vorzeichenverteilung von f:



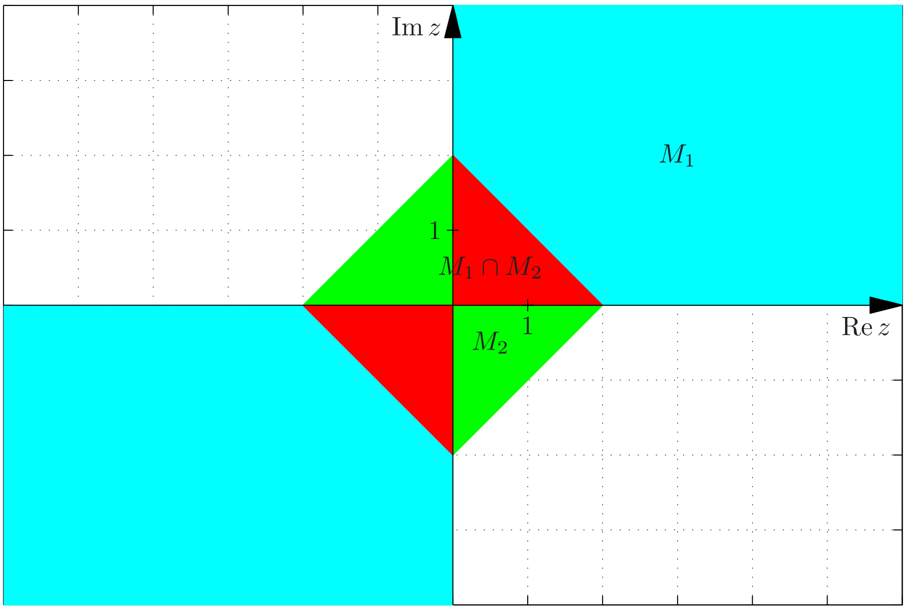
(b) In der Skizze liest man folgende Punkte als Verzweigungspunkte der Nullstellenmenge ab: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (4,0)$ und $P_3 = (0,-4)$.

Diese Punkte sind tatsächlich kritische Punkte. Denn für alle Punkte ist die Richtungsableitung in Richtung $(1,1)^\mathsf{T}$ gleich 0. Weiterhin sieht man aus der Vorzeichenverteilung, dass P_1 ein Tiefpunkt in Richtung $(1,-1)^\mathsf{T}$ ist und somit die Richtungsableitung in diese Richtung ebenfalls 0 ist. Für P_2 und P_3 ist die Richtungsableitung in Richtung $(1,-1)^\mathsf{T}$ gleich 0, da dies Tangenten an den Nullstellenkreis sind.

Somit handelt es sich bei allen drei Punkten um kritische Punkte, weiterhin existiert zu jedem der drei Punkte und zu jeder Umgebung ein Bereich, an dem $f > 0$ gilt und einer, an dem $f < 0$ gilt, somit handelt es sich um Sattelpunkte.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) \geqq 0\}$ und $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| \leqq 4\}$ in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$.



Aufgabe 6 (*7 Punkte*)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 - \frac{\alpha}{2}y + 3x^2 \\ 2x^2y - x \end{pmatrix}$$

und die Kurven

$$\mathcal{C}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t,t)^{\mathsf{T}},$$
$$\mathcal{C}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t,t^2)^{\mathsf{T}}.$$

Für welche Werte von α existiert zu f ein Potential? $\boxed{\alpha \in \{2\}}$

Geben Sie für diese Werte ein Potential an: $\boxed{x^2y^2 - xy + x^3}$

Berechnen Sie für $\alpha = 4$ das Wegintegral $\int_{\mathcal{C}_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,s = \boxed{\frac{1}{2}}$

Berechnen Sie für $\alpha = 2$ das Wegintegral $\int_{\mathcal{C}_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,s = \boxed{1}$
