Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Gegeben sind

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Inverse von A_4.

(b) Bestimmen Sie, für welche α das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

(a) $(A_4)^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Durch Zeilenoperationen kann das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ auf obere Dreiecksform gebracht werden:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} -4 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & 4 \end{array}\right)$$

Aus der letzen Zeile lässt sich ablesen, dass für $\alpha = 3$ ein Widerspruch auftritt, also keine Lösung existiert. Für alle anderen α gibt es genau eine Lösung.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*)

(a) Untersuchen Sie, ob Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert für

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \,\mathrm{d}\,x\,.$$

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \max\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x, 3^x\right\} \mathrm{d}\,x\,.$

(a) Mit der Substitution $u = \cos x$ folgt

$$\int_0^t \tan x \;\mathrm{d}\,x = -\int_0^t \frac{-\sin x}{\cos x}\;\mathrm{d}\,x = -\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{u}\;\mathrm{d}\,u = -\ln|\cos t|.$$

Für $t \to \frac{\pi}{2}$ ist aber $\cos t \to 0$ und somit divergiert das Integral.

(b) Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, & 0 \leqq x \leqq 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x, & -1 \leqq x < 0 \end{cases}$$

und somit

$$\int_{-1}^{1} \max\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x, 3^x\right)\;\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3^x}\;\mathrm{d}\,x + \int_0^1 3^x\;\mathrm{d}\,x = \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^1 = \frac{4}{\ln 3}\,.$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a) $(\sin x)^n > (\sin x)^{n+1}$ für alle $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) $\frac{1}{3} \leqq \int\limits_4^7 \frac{x-3}{x+5} \, \mathrm{d}\, x \leqq 1$.

(c) $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ für alle $x \in [1,2]$.

(a) Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $0 < \sin x < 1$ und somit $(\sin x)^n > (\sin x)^{n+1}$.

(b) Betrachten wir die Funktion $f\colon [4,7] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x-3}{x+5}$. Aus $f'(x) = \frac{8}{(x+5)^2} > 0$ folgt, dass f monoton steigend ist. Also gilt für $4 \leqq x \leqq 7$ die Ungleichung $f(4) \leqq f(x) \leqq f(7)$ und damit

$$\frac{1}{9} \leqq \frac{x-3}{x+5} \leqq \frac{1}{3}.$$

Mit der Monotonie des Integrals folgen dann die gewünschten Ungleichungen.

(c) Betrachten wir die Funktion

$$\varphi\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Es gilt $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$, also ist $\varphi'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Daraus folgt, dass φ eine monoton steigende Funktion ist und für $x > 0$ folgt $\varphi(x) > 0$. Das beweist die behauptete Ungleichung.

Eine weitere mögliche Lösung: Es gilt

$$\ln(1+x) \geqq \ln 2 \quad \text{für alle} \quad x \in [1,2],$$

wegen der Monotonie des Logarithmus. Andererseits ist $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ ebenfalls monoton steigend und es gilt

$$\frac{x}{1+x} \leqq \frac{2}{3} \quad \text{für alle} \quad x \in [1,2].$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass $\ln 2 > \frac{2}{3}$. Dies ist äquivalent zu $8 > e^2$, was offenbar immer erfüllt ist.

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben sind die Kurve K, die parametrisiert wird durch

$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (t,\ t^2,\ 1)^\intercal$, die Funktion $f\colon [0,+\infty)^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x^2+3y+z}$

sowie die Vektorfelder

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (2x + y\cos(xy),\ 2x\cos(xy) - e^y)^\intercal$$

und

$$h\colon \mathbb{R} \times (-1,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \left(3x^2\ln(y+1),\ \frac{x^3}{y+1} + z^2,\ 2yz + \sin(z)\right)^\intercal .$$

(a) Berechnen Sie die Rotation und Divergenz von g. Besitzt g ein Potential?

(b) Das Vektorfeld h besitzt ein Potential. Berechnen Sie dieses.

(c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s \qquad \text{und} \qquad \int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$$

(a) Nach der Definition gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} g &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} g_1(x,y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} g_2(x,y) = 2 - y^2\sin(xy) - 2x^2\sin(xy) - e^y \\ \operatorname{rot} g &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} g_2(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} g_1(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) \neq 0\,, \end{aligned}$$

also besitzt das Vektorfeld g kein Potential.

(b) Das Vektorfeld h ist laut Aufgabenstellung der Gradient seines Potentials U. Also müssen die partiellen Ableitungen von U mit den Komponenten von h übereinstimmen.

$$\begin{aligned} &U_x(x,y,z) \overset{!}{=} 3x^2\ln(y+1) && \Rightarrow\ U(x,y,z) = x^3\ln(y+1) + c_1(y,z) \\ &U_y(x,y,z) = \frac{x^3}{y+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}c_1(y,z) \overset{!}{=} \frac{x^3}{y+1} + z^2 && \Rightarrow\ U(x,y,z) = x^3\ln(y+1) + yz^2 + c_2(z) \\ &U_z(x,y,z) = 2yz + c_2'(z) \overset{!}{=} 2yz + \sin(z) && \Rightarrow\ U(x,y,z) = x^3\ln(y+1) + yz^2 - \cos z + c_3 \end{aligned}$$

(c) Für die Parametrisierung C der Kurve K gilt

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad |C'(t)| = \sqrt{1+4t^2}\,.$$

Somit ergibt das erste Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^1 f(C(t))|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \sqrt{t^2+3t^2+1}\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 1 + 4t^2\,\mathrm{d}\,t = \left[t + \frac{4}{3}t^3\right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}\,. \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral kann mit Hilfe des Potentials berechnet werden.

$$\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x = U(C(1)) - U(C(0)) = U(1,1,1) - U(0,0,1) = 1 + \ln(2)$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y)^\mathsf{T} \mapsto \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)} \,.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad}(f) = \frac{-\sinh\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)\right)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (1, 1, f(1, 1))$ an.

$$\sinh(1)x + \sinh(1)y + (\cosh(1))^2\, z = \cosh(1) + 2\sinh(1)$$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

$$P = (0, 0)$$

(d) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte.

P ist ein Maximum

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie zu $w = -3 + 3i$ die Polarkoordinatendarstellung $w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi$.

$r =$	$3\sqrt{2}$	$\varphi =$	$\frac{3}{4}\pi$

(b) Geben Sie alle Lösungen von $z^4 = 16\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$ in der Form $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$	$\sqrt{3} + i$	$z_2 =$	$-1 + \sqrt{3}i$
$z_3 =$	$-\sqrt{3} - i$	$z_4 =$	$1 - \sqrt{3}i$