Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die folgende Matrix nicht invertierbar?

Geben Sie diese α wahlweise in der Form $\alpha = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ oder in der Form $\alpha = r\,(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ an.

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & i \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & i \end{pmatrix} = -i + \alpha^3.$$

Die Gleichung $\alpha^3 = i$ hat die Lösungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,i \\ \alpha_2 &= \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,i \\ \alpha_3 &= \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -i. \end{aligned}$$

Die Matrix ist also nicht invertierbar für

$$\alpha \in \left\{\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right), \quad \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right), \quad \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\right\}.$$

Aufgabe 2 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 2\,z + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = 0$$

in der Form $z = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= 2 \\ |z - \bar{z}| + |z + \bar{z}| &= 4 \end{aligned}$$

(a) Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} z^2 - 2\,z + 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i &= 0 \\ (z-1)^2 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} (z-1)^2 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right) \\ z_1 - 1 &= \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 - 1 &= \cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 &= \tfrac{3}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(b) In Real- und Imaginärteil ausgedrückt lauten die beiden Gleichungen für $z = a + bi$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 2 \\ |2a| + |2b| &= 4. \end{aligned}$$

Falls $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt, ergibt sich aus der zweiten Gleichung $a = 2 - b$ und nach Einsetzen in die erste Gleichung $4 - 4b + 2b^2 = 2$, also $(b-1)^2 = 0$. Dies führt auf die erste Lösung $z_1 = 1 + i$. Falls $a > 0$, $b < 0$ gilt, lautet die zweite Gleichung $2a - 2b = 4$. Auflösen nach a und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $4 + 4b + 2b^2 = 2$, woraus sich $(b+1)^2 = 0$ ergibt. Die zweite Lösung des Gleichungssystems ist also $z_2 = 1 - i$. Analoges Behandeln der verbleibenden Fälle $a < 0$, $b > 0$ und $a \leqq 0$, $b \leqq 0$ ergibt $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$.

Aufgabe 3 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto e^{x\cos(y)}$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\cos(y)e^{x\cos(y)}} \\ \boxed{-x\sin(y)e^{x\cos(y)}} \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(\cos(y))^2\, e^{x\cos(y)}} & \boxed{-\sin(y)(1+x\cos(y))e^{x\cos(y)}} \\ \boxed{-\sin(y)(1+x\cos(y))e^{x\cos(y)}} & \boxed{-x(x\,(\cos(y))^2+\cos(y)-x)e^{x\cos(y)}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big)$ der zweiten Stufe für den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0)=(0,0)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big) = \boxed{1+x+\tfrac{1}{2}x^2}$$