Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die folgende Matrix nicht invertierbar?

Geben Sie diese α wahlweise in der Form $\alpha = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ oder in der Form $\alpha = r\,(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ an.

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & i \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & i \end{pmatrix} = -i + \alpha^3.$$

Die Gleichung $\alpha^3 = i$ hat die Lösungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,i \\ \alpha_2 &= \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,i \\ \alpha_3 &= \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -i. \end{aligned}$$

Die Matrix ist also nicht invertierbar für

$$\alpha \in \left\{ \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right), \quad \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right), \quad \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) \right\}.$$

Aufgabe 2 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 2\,z + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = 0$$

in der Form $z = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= 2 \\ |z - \bar{z}| + |z + \bar{z}| &= 4 \end{aligned}$$

(a) Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} z^2 - 2\,z + 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i &= 0 \\ (z-1)^2 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich
$$\begin{aligned} (z-1)^2 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right) \\ z_1 - 1 &= \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 - 1 &= \cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 &= \tfrac{3}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(b) In Real- und Imaginärteil ausgedrückt lauten die beiden Gleichungen für $z = a + bi$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 2 \\ |2a| + |2b| &= 4. \end{aligned}$$

Falls $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt, ergibt sich aus der zweiten Gleichung $a = 2 - b$ und nach Einsetzen in die erste Gleichung $4 - 4b + 2b^2 = 2$, also $(b-1)^2 = 0$. Dies führt auf die erste Lösung $z_1 = 1 + i$. Falls $a > 0$, $b < 0$ gilt, lautet die zweite Gleichung $2a - 2b = 4$. Auflösen nach a und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $4 + 4b + 2b^2 = 2$, woraus sich $(b+1)^2 = 0$ ergibt. Die zweite Lösung des Gleichungssystems ist also $z_2 = 1 - i$. Analoges Behandeln der verbleibenden Fälle $a < 0$, $b > 0$ und $a \leqq 0$, $b \leqq 0$ ergibt $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ und untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.

(b) Berechnen Sie f' und f''.

(c) Bestimmen Sie die Extremalstellen von f, sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(a) Aus

$$f(x) = (2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$$

folgt – da e^{-x^2} immer positiv ist –

$$(2x^2 - 1) = 0$$

und damit sind $x = -\sqrt{2}/2$ und $x = \sqrt{2}/2$ die Nullstellen von f.

Für $x \to \pm\infty$ erhält man

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 1}{e^{x^2}}$$

und da Zähler und Nenner gegen $+\infty$ streben mit der Regel von l´Hospital

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{e^{x^2}} = 0.$$

Schließlich gilt

$$f(-x) = (2(-x)^2 - 1)e^{-(-x)^2} = (2x^2 - 1)e^{-x^2} = f(x),$$

d. h. der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.

(b) Für die Ableitungen berechnet man

$$f'(x) = -2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$$
$$f''(x) = 2(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}.$$

(c) Aus $f'(x) = 0$ folgt

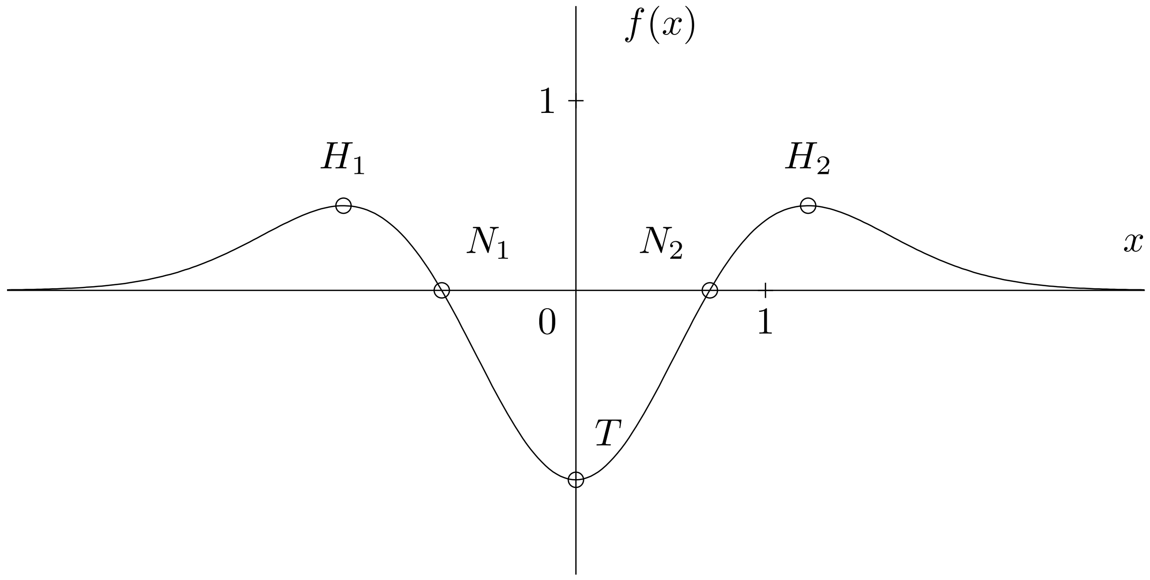
$$-2x(2x^2 - 3) = 0$$

und damit $x = 0$, $x = \sqrt{6}/2$ oder $x = -\sqrt{6}/2$. Des weiteren ist

$$f''(0) = 6$$
$$f''\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = f''\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right) = -12e^{-3/2}\,,$$

d. h. f besitzt ein lokales (nach obigem sogar ein globales) Minimum bei $T = (0, -1)$ und lokale (nach obigem sogar globale) Maxima bei $H_1 = \left(-\sqrt{6}/2, 2e^{-3/2}\right)$ und $H_2 = \left(\sqrt{6}/2, 2e^{-3/2}\right)$.

(d)



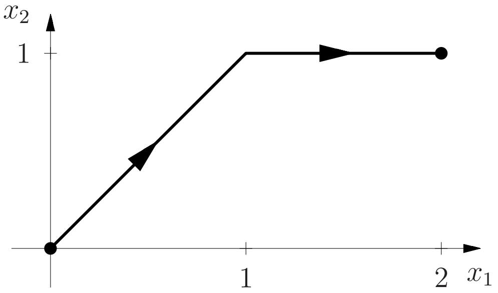
Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + x_2\, e^{x_1+x_2} \\ (1+x_2)e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}$$

und das Kurvenintegral

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$$

entlang des abgebildeten Weges K von $(0,0)$ nach $(2,1)$, der aus zwei Teilstrecken besteht.



Die Rotation ist

$$\operatorname{rot} g(x_1,x_2) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) = (1+x_2)e^{x_1+x_2} - e^{x_1+x_2} - x_2\, e^{x_1+x_2} = 0\,.$$

Somit hat das Vektorfeld auf dem einfach zusammenhängenden Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ ein Potential, welches sich aus den folgenden Überlegungen ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}U(x_1,x_2) \overset{!}{=} g_1(x_1,x_2) = 1 + x_2\, e^{x_1+x_2} \qquad \Rightarrow \quad U(x_1,x_2) = x_1 + x_2\, e^{x_1+x_2} + c(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2}U(x_1,x_2) = (1+x_2)e^{x_1+x_2} + c'(x_2) \overset{!}{=} (1+x_2)e^{x_1+x_2} \quad \Rightarrow \quad c'(x_2) = 0 \;\Rightarrow\; c(x_2) = d$$

Es gilt also

$$U(x_1,x_2) = x_1 + x_2\, e^{x_1+x_2} + d\,.$$

Wegen der Existenz eines Potentials ist das Kurvenintegral wegunabhängig und kann mit Hilfe des Potentials berechnet werden:

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\, x = U(2,1) - U(0,0) = 2 + e^3\,.$$

Alternative: Parametrisierung der Kurven

$$\begin{aligned} C_1\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \\ C_2\colon [1,2] &\to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad C_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ C_2'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}
\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 g(C_1(t)) \bullet C_1(t) \,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 g(C_2(t)) \bullet C_2(t) \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 + te^{2t} \\ (1+t)e^{2t} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_1^2 \begin{pmatrix} 1 + e^{t+1} \\ 2e^{t+1} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 1 + te^{2t} + (1+t)e^{2t} \,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 1 + e^{t+1} \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 1 + e^{2t} + 2te^{2t} \,\mathrm{d}\,t + \left[t + e^{t+1}\right]_1^2 \\
&= \left[t + e^{2t}\right]_0^1 + 2\int_0^1 te^{2t} \,\mathrm{d}\,t + (2 + e^3 - 1 - e^2) \\
&= 1 + e^2 - 1 + (2 + e^3 - 1 - e^2) + 2\left(\left[\frac{t}{2}e^{2t}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t} \,\mathrm{d}\,t\right) \\
&= 1 + e^3 + 2\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[e^{2t}\right]_0^1\right) = 1 + e^3 + e^2 - \left[e^2 - 1\right] = 2 + e^3\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto e^{x\cos(y)}$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\cos(y)e^{x\cos(y)}} \\ \boxed{-x\sin(y)e^{x\cos(y)}} \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(\cos(y))^2\, e^{x\cos(y)}} & \boxed{-\sin(y)(1+x\cos(y))e^{x\cos(y)}} \\ \boxed{-\sin(y)(1+x\cos(y))e^{x\cos(y)}} & \boxed{-x(x\,(\cos(y))^2+\cos(y)-x)e^{x\cos(y)}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big)$ der zweiten Stufe für den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0)=(0,0)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big) = \boxed{1+x+\tfrac{1}{2}x^2}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2-(n-3)^2}{n+1} = \boxed{10}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \boxed{0}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1} = \boxed{-2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{x^2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$