

Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für Ingenieurstudiengänge

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$$

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 19.10.2009 über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (<https://studius.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **19.10.** bis **28.10.2009** mit Frau Dr. Iryna Rybak (Raum V 57.7.163) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |(1+i)z| \leq 4\sqrt{2} \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}, z \neq 0 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1 , M_2 und $M_1 \cap M_2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - z + \frac{1}{4} - i = 0$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$f_1 = (-1, 0, 1)^\top, \quad f_2 = (3, c, 0)^\top, \quad f_3 = (-2, 1, c)^\top$$

eine Basis des \mathbb{R}^3 ?

Aufgabe 4 (5 Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2} \cos(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin(x)}{e^{2x} - 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x)}{\sin(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x \ln(x) - 10}$

Aufgabe 6 (7 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (y^2 - 1)(x - y - 1).$$

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge der Funktion f . Markieren Sie das Vorzeichen der Funktionswerte in allen Bereichen.
- (b) Berechnen Sie den Gradienten von f . Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und markieren Sie diese in Ihrer Skizze.
- (c) An welchen dieser kritischen Stellen liegen Extrema, wo Sattelpunkte vor?
-

Aufgabe 7 (3 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/v \\ -u/v^2 \end{pmatrix}$$

und die Kurve K , die parametrisiert wird durch

$$C: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K g(x) \bullet dx.$$

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe 8 (4 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A .

Sp $A =$ det $A =$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A .

 $\chi_A(\lambda) =$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

 $\lambda_1 =$

(d) Bestimmen Sie die Menge M aller Eigenwerte von A .

 $M =$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Welche Gestalt hat die Quadrik Q ?

Aufgabe 10 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen. Falls die untersuchte Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{4^n}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n (n+1)}$
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Bitte wenden!

