

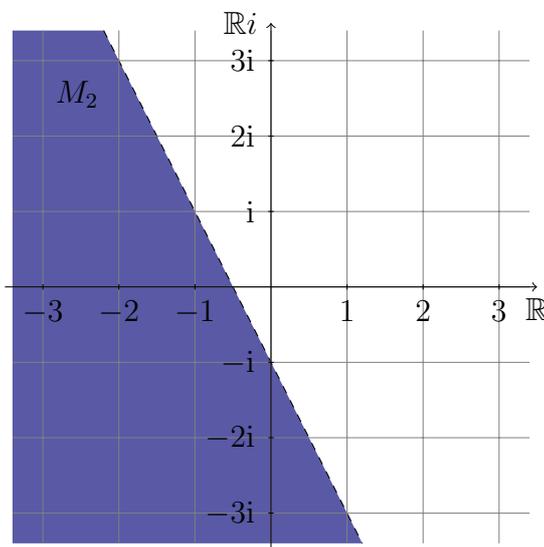
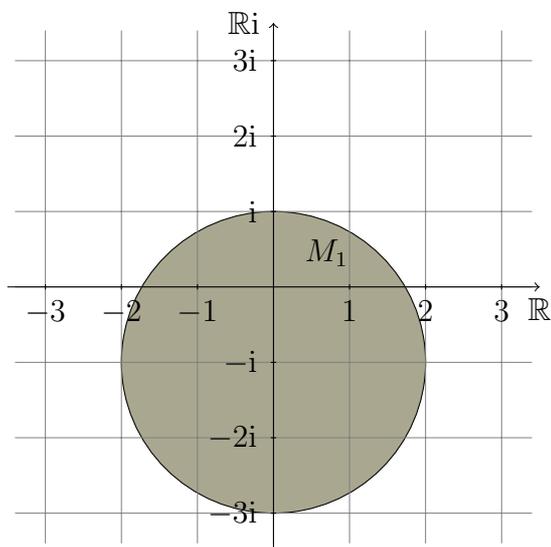
**Aufgabe 1** (3 Punkte) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z + i| + |iz - 1| \leq 4 \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 2 \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < -1 \right\}$$

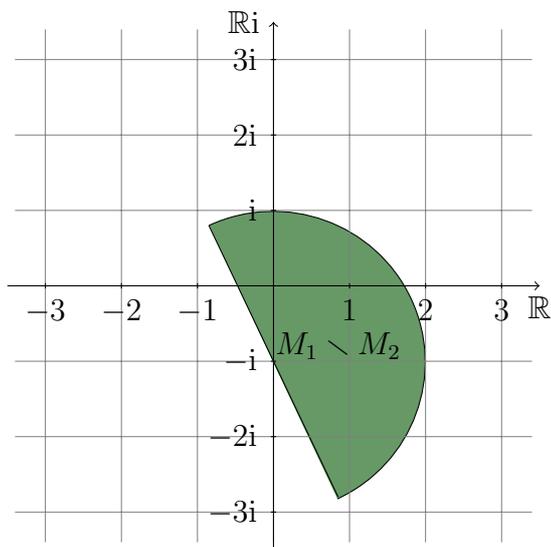
in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_1 \setminus M_2$ .

Es ist  $M_1 = \{x + yi \mid x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$  die Kreisscheibe mit Radius 2 und dem Mittelpunkt  $-i$ , wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.

Es ist  $M_2 = \{x + yi \mid 2x + y \leq -1\}$  die blaue Halbebene, wobei die Gerade  $y = -2x - 1$  nicht zu der Menge gehört.



Die Differenz  $M_1 \setminus M_2$  ist die folgende Menge:



**Aufgabe 2 (7 Punkte)** Es seien  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  mit  $v_1 = (1, c, 1)^\top$  und  $v_2 = (2, 1, 2)^\top$  für  $c \in \mathbb{R}$  gegeben. Durch  $v_1, v_2$  wird ein von  $c$  abhängiges Parallelogramm  $\Delta_c$  mit Fläche  $F_c$  aufgespannt. Bestimmen Sie  $c$  so, dass  $F_c < 1$  wird.

Die fragliche Fläche berechnet man aus

$$\begin{aligned} F_c = |v_1 \times v_2| &= |(1, c, 1)^\top \times (2, 1, 2)^\top| \\ &= |(2c - 1, 0, 1 - 2c)^\top| = \sqrt{(2c - 1)^2 + (1 - 2c)^2} = \sqrt{2}|2c - 1|. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$F_c < 1 \iff \sqrt{2}|2c - 1| < 1$$

Um den Betrag aufzulösen, müssen wir Fälle unterscheiden.

**Fall 1:**  $2c - 1 \geq 0$ .

Dies bedeutet gerade  $c \geq 1/2$ ; es ergibt sich

$$\sqrt{2}(2c - 1) < 1 \iff 2c - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff c < \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \implies c \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right).$$

**Fall 2:**  $2c - 1 < 0$ .

Dies bedeutet  $c < 1/2$ , und

$$\sqrt{2}(1 - 2c) < 1 \iff 1 - 2c < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff c > \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \implies c \in \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} \right).$$

Vereinigen wir die Lösungen beider Fälle, so erhalten wir

$$c \in \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right).$$

**Aufgabe 3** (8 Punkte) Es seien die Vektoren  $u = (1, 0, 1)^\top$  und  $v_k = (0, -1, k)^\top$  mit  $k \in \mathbb{R}$ , sowie die Punkte mit den Ortsvektoren  $P = (0, 5, 2)^\top$  und  $Q = (1, 2, 3)^\top$  im Raum  $\mathbb{R}^3$  gegeben.

(a) Bestimmen Sie  $k$  so, dass die Geraden

$$g := \left\{ P + tu \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \ell_k := \left\{ Q + sv_k \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

sich in genau einem Punkt  $Z$  schneiden. Geben Sie diesen Punkt  $Z$  an.

(b) Die Geraden  $g, \ell_0$  liegen auf einer Ebene  $E$ . Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene in Hesse-Normalform.

(a) Jeder Punkt  $Z$  im Schnitt der Ebenen  $g$  und  $\ell_k$  muss sich sowohl als  $Z = P + tu$  als auch als  $Z = Q + sv_k$  mit  $t, s \in \mathbb{R}$  darstellen lassen. Dies führt auf die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} t \\ s \\ t - sk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung sieht man:  $t = 1$  und  $s = -3$ . Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, so ergibt sich  $1 + 2k = 1$  und deswegen  $k = 0$ .

Nur für  $k = 0$  haben die Geraden also einen gemeinsamen Punkt, dieser ist dann eindeutig bestimmt: Man erhält  $Z = (1, 5, 3)^\top$ .

(b) Für die Gleichung  $\langle (x, y, z)^\top - P \mid n \rangle = 0$  der durch  $g$  und  $\ell_0$  aufgespannten Ebene  $E$  ermitteln wir den Normalenvektor  $n$  mit Hilfe des Vektorprodukts:

$$u \times v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Gleichung von  $E$  (in Hesse-Normalform):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 5 \\ z - 2 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad E: \frac{-x + z}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

**Aufgabe 4** (9 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1 + 12x_2 + 7 = 0 \right\}.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Die Gleichung der Quadrik lautet  $x^T Ax + 2a^T x + c = 0$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 7.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  lautet  $\chi_A = (-1 - \lambda)(5 - \lambda)(0 - \lambda)$  und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 0.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die drei Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation  $y = F^T x$  lautet also

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = F^T a = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$-y_1^2 + 5y_2^2 - 2\frac{15}{\sqrt{5}}y_2 + 7 = 0.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$-y_1^2 + 5 \left( y_2 - \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 - 2 = 0,$$

und wir finden die Transformation  $z = y - {}_{\mathbb{F}}P$ , wobei  ${}_{\mathbb{F}}P = \left( 0, \frac{3}{\sqrt{5}}, 0 \right)^{\top}$  die Koordinaten des neuen Ursprungs bezüglich  $\mathbb{F} := \left( 0; v_1, \frac{1}{\sqrt{5}}v_2, \frac{1}{\sqrt{5}}v_3 \right)$  angibt.

(Hier könnte statt  $P$  jeder Punkt mit  $\mathbb{F}$ -Koordinaten der Form  ${}_{\mathbb{F}}Q = \left( 0, \frac{3}{\sqrt{5}}, s \right)^{\top}$  mit  $s \in \mathbb{R}$  als Ursprung benutzt werden.)

Die euklidische Normalform von  $Q$  lautet

$$\frac{1}{2}z_1^2 - \frac{5}{2}z_2^2 + 1 = 0.$$

Die Gestalt von  $Q$  ist ein hyperbolischer Zylinder.

Es sind  $z_1, z_2, z_3$  Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems  $\mathbb{G} := \left( P; v_1, \frac{1}{\sqrt{5}}v_2, \frac{1}{\sqrt{5}}v_3 \right)$ .

Es sind  $x_1, x_2, x_3$  Koordinaten bezüglich des Standardkoordinatensystems  $\mathbb{E}$ .

Für die Koordinatentransformation erhält man

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = z = F^{\top} x - {}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Umkehrtransformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(z) = x = F(z + {}_{\mathbb{F}}P) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+3)^2}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{5n^2+1}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1+(-2)^k}{4^k}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

(a) Der Satz von l'Hospital liefert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x(x+3)} = 0.$$

(b) Diese Reihe kann in zwei geometrische Reihen aufgespalten werden.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1+(-2)^k}{4^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.$$

(c) Man findet den Grenzwert durch die folgende Umformung

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{5n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}(5n+1)}{\frac{1}{n}\sqrt{5n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{5+\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{5}.$$

(d) Der Ausdruck ist von der Form „ $\infty - \infty$ “. Durch Addition der beiden Quotienten wird dies auf die Situation „ $\frac{0}{0}$ “ transformiert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}.$$

Auch nach Übergang zum Quotienten der Ableitungen liegt noch die Situation „ $\frac{0}{0}$ “ vor. Die Regel von l'Hospital zweimal angewandt liefert dann

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

**Aufgabe 6** (5 Punkte) Wir betrachten  $f(x) = \cos(x)$  auf dem Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

- (a) Berechnen Sie das in  $x = 0$  entwickelte Taylorpolynom zweiter Stufe  $T_2(f, x, 0)$  und das zugehörige Restglied  $R_2(f, x, 0)$  nach Lagrange.
- (b) Ersetzen wir  $\cos(x)$  durch  $T_2(f, x, 0)$ , so entsteht ein Approximationsfehler. Bestimmen Sie  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  so, dass der Approximationsfehler auf  $[0, \beta]$  kleiner als  $10^{-3}$  wird.

(a) Taylorpolynom 2. Stufe:

$$T_2(f, x, 0) = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2}f^{(2)}(0)x^2 = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{1}{2}\cos(0)x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Lagrange-Darstellung des Restglieds:

$$R_2(f, x, 0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 = \frac{\sin(\xi)}{6}x^3, \quad \text{für ein } \xi \in (0, \pi/2).$$

- (b) Abschätzung des Approximationsfehlers: Aus  $\cos(x) = T_2(f, x, 0) + R_2(f, x, 0)$  schließt man (mit  $|\sin(\xi)| \leq 1$ ) für alle  $x \leq \beta$ :

$$|\cos(x) - T_2(f, x, 0)| = |R_2(f, x, 0)| = \left| \frac{\sin(\xi)}{6}x^3 \right| \leq \frac{\beta^3}{6}.$$

Die verlangte Fehlerschranke  $|R_2(f, x, 0)| < 10^{-3}$  wird demnach eingehalten, wenn  $\beta^3 < \frac{6}{10^3}$ , also

$$\beta < \frac{\sqrt[3]{6}}{10}$$

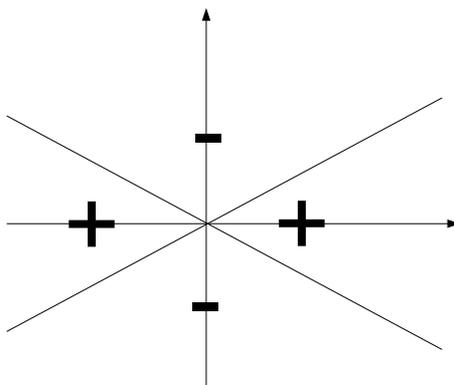
ist. Man kann zum Beispiel  $\beta = \frac{1}{10}$  wählen.

**Aufgabe 7** (8 Punkte) Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$f(x, y) := (x^2 - 2y^2) e^{-(x+y)}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$  und skizzieren Sie die Vorzeichenverteilung in  $\mathbb{R}^2$ .  
 (b) Bestimmen Sie Lage und Art aller kritischen Stellen von  $f$ .

- (a) Da der Faktor  $e^{-(x+y)}$  nie Null wird, erfüllen die Nullstellen von  $f$  die Gleichung  $x^2 = 2y^2$ , also  $y_{1,2} = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$ .



- (b) Der Gradient von  $f$  berechnet sich zu 
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - x^2 + 2y^2 \\ -4y - x^2 + 2y^2 \end{pmatrix} e^{-(x+y)}.$$

Da der Faktor  $e^{-(x+y)}$  nie Null wird, sind die kritischen Punkte genau die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x - x^2 + 2y^2 &= 0 \\ -4y - x^2 + 2y^2 &= 0, \end{aligned} \quad \text{also die Punkte } (0, 0) \text{ und } (4, -2).$$

Um eine Aussage über die Art der kritischen Punkte zu treffen, berechnen wir die Hesse-Matrix. Es gilt

$$\text{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^2 - 4x + 2 & x^2 - 2y^2 - 2x + 4y \\ x^2 - 2y^2 - 2x + 4y & x^2 - 2y^2 + 8y - 4 \end{pmatrix} e^{-(x+y)}.$$

Die Matrix

$$\text{H}f(4, -2) = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} e^{-2}$$

hat die beiden reellen Eigenwerte  $(-9 \pm \sqrt{73}) e^{-2} < 0$  und ist somit negativ definit, d.h.  $f$  nimmt in  $(4, -2)$  ein lokales Maximum an.

Der Punkt  $(0, 0)$  ist ein Sattelpunkt, da  $f$  in jeder Umgebung des Punktes sowohl positive als auch negative Funktionswerte annimmt.

**Aufgabe 8** (13 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$$

$$(c) \int (1+2\cos x)^2 dx$$

$$(b) \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

$$(d) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

(a) Die reelle Faktorisierung von  $x^2+x-2$  ist  $(x-1)(x+2)$ . Die Partialbruchzerlegung von  $\frac{2x+7}{x^2+x-2}$  lautet

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Um die Koeffizienten  $A$  und  $B$  zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten mit  $x^2+x-2$ :

$$2x+7 = A(x+2) + B(x-1).$$

Diese Bedingung muss für unendlich viele reelle Zahlen in  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$  erfüllt sein. Also stimmen die beiden Polynome links und rechts überein. Wir können  $A$  und  $B$  durch Koeffizientenvergleich berechnen:

$$2 = A + B,$$

$$7 = 2A - B.$$

Als Lösung dieses inhomogenen LGS ergibt sich

$$A = 3, \quad B = -1.$$

Damit ist

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx = \int \left( \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = [3\ln|x-1| - \ln|x+2|] = \left[ \ln \left| \frac{(x-1)^3}{x+2} \right| \right].$$

(b) Wir substituieren  $x = t^2$ . Mit  $\frac{dx}{dt} = 2t$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} &= \int_2^3 \frac{2t}{t-1} dt \\ &= \int_2^3 \frac{2t-2+2}{t-1} dt \\ &= \int_2^3 2 dt + \int_2^3 \frac{2}{t-1} dt \\ &= [2t]_2^3 + 2 \int_2^3 \frac{1}{t-1} dt \\ &= 2(3-2) + 2 [\ln|t-1|]_2^3 = 2(1 + \ln 2). \end{aligned}$$

(c) Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\int (1 + 2 \cos x)^2 dx &= \int (1 + 4 \cos x + 4(\cos x)^2) dx = \int dx + 4 \int \cos x dx + 4 \int (\cos x)^2 dx \\ &= [x + 4 \sin x] + 4 \int (\cos x)^2 dx.\end{aligned}$$

**Lösung 1** (für  $\int (\cos x)^2 dx$ ):

Wir verwenden folgendes Additionstheorem:

$$\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$$

Damit ist

$$\int (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (\cos(2x) + 1) dx = \left[ \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right].$$

**Lösung 2** (für  $\int (\cos x)^2 dx$ ):

Durch partielle Integration, mit  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}\int (\cos x)^2 dx &= [\cos x \sin x] + \int (\sin x)^2 dx \\ &= [\cos x \sin x] + \int (1 - (\cos x)^2) dx \\ &= [\cos x \sin x + x] - \int (\cos x)^2 dx,\end{aligned}$$

woraus sofort

$$\int (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2} [\cos x \sin x + x] = \left[ \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right]$$

folgt.

Für das ganze Integral erhalten wir

$$\int (1 + 2 \cos x)^2 dx = [3x + 4 \sin x + \sin(2x)].$$

(d) Durch partielle Integration, mit  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = -\frac{1}{x}$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln 1}{1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.\end{aligned}$$

Die Regel von l'Hospital liefert

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Somit erhalten wir

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1.$$

Name,

Matrikel-

Studien-

Vorname:

Nummer:

gang:

**Aufgabe 9** (5 Punkte) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \kappa: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto Av + b.$$

Bestimmen Sie einen Fixpunkt von  $\kappa$ , das heißt: bestimmen Sie ein  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $\kappa(x) = x$ .

$$x = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $A$  beschreibt eine Drehung um den Winkel

$$\frac{\pi}{6}$$

im Gegenuhrzeigersinn.

Welche Eigenschaften hat die Matrix  $A$ ? Tragen Sie entweder „wahr“ oder „falsch“ ein.

quadratisch

wahr

eigentlich orthogonal

wahr

symmetrisch

falsch

hermitesch

falsch

**Aufgabe 10** (5 Punkte) Für die Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  wird das folgende Vektorfeld definiert:

$$g: (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y^2 + \beta y}{x} \\ (\alpha y + \beta) \ln(x) \\ w^2 + \alpha w \\ \beta zw + \alpha z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix  $Jg =$

$$\begin{pmatrix} \frac{-y^2 - \beta y}{x^2} & \frac{2y + \beta}{x} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha y + \beta}{x} & \alpha \ln x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2w + \alpha \\ 0 & 0 & \beta w + \alpha & \beta z \end{pmatrix}$$

Für welche Paare  $(\alpha, \beta)$  ist die Jacobi-Matrix  $Jg$  symmetrisch?

$$(\alpha, \beta) = (2, 2)$$

**Aufgabe 11** (5 Punkte) Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

	Entwicklungspunkt	Konvergenzradius
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z + 2i)^n}{n 5^n}$	$-2i$	$5$
$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z - i + 1)^n$	$i - 1$	$1$
$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^n$	$0$	$\frac{1}{2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (4^n + 3^n) z^n$	$0$	$\frac{1}{4}$

**Aufgabe 12** (3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a)  $\frac{d}{dx} \arctan(\sin(x)) =$

$$\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)^2}$$

(b)  $\frac{d}{dx} x^{2x} =$

$$2x^{2x}(1 + \ln(x))$$

(c)  $\frac{d}{dx} (\sqrt{x} \ln(1 + x^2)) =$

$$\frac{2x^{3/2}}{1 + x^2} + \frac{\ln(1 + x^2)}{2\sqrt{x}}$$

**Aufgabe 13** (4 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 2i \\ -5i & -3i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$\det(A) = \boxed{14}$$

$$\operatorname{Sp}(A) = \boxed{5i}$$

$$\operatorname{Rg}(A) = \boxed{2}$$

sowie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von  $A$ .

$$\lambda_1 = \boxed{-2i}$$

$$\lambda_2 = \boxed{7i}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$