Aufgabe 1 (*6 Punkte*)

Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche Werte des Parameters α ist das System eindeutig lösbar?

(b) Geben Sie den Rang der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $\alpha = -3$.

(d) Gibt es einen Parameterwert α, für den in einer Lösung des Gleichungssystems alle Variablen den gleichen Wert (d.h. $x_1 = x_2 = x_3$) annehmen?

Wir betrachten die erweiterte Matrix

$$[A_\alpha || b] = \left(\begin{array}{ccc||c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$

Durch Zeilenumformungen vereinfacht man sie zu

$$[\tilde{A}_\alpha || \tilde{b}] = \left(\begin{array}{ccc||c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 6 \end{array}\right).$$

(a) An der letzten Zeile von $[\tilde{A}_\alpha || \tilde{b}]$ erkennt man, dass das System für alle $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ eindeutig lösbar ist.

Alternativ: Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A_\alpha = -2\alpha - 2 \neq 0$ ist, also für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

(b) Aus der obigen Darstellung von $[\tilde{A}_\alpha || \tilde{b}]$ folgt:

$$\mathrm{Rg}(A_\alpha) = 3 \quad \text{für} \quad \alpha \neq -1, \qquad \mathrm{Rg}(A_{(-1)}) = 2.$$

(c) Für $\alpha = -3$ erhalten wir mit den gleichen Umformungen wie oben das Gleichungssystem

$$[\tilde{A}_3 || \tilde{b}] = \left(\begin{array}{ccc||c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right).$$

Mit Rückwärtseinsetzen erhält man jetzt die Lösung:

$$x = (11, 5, -3)^\intercal.$$

(d) Im Fall $x_1 = x_2 = x_3$ folgt aus der zweiten Zeile von $[\tilde{A}_\alpha||\tilde{b}]$, dass $2x = 2$ ist und somit

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

gilt. Aus der dritten Zeile sieht man dann, dass $\alpha = 5$ sein muss.

Einsetzen in die erste Zeile ergibt auch keinen Widerspruch; also ist $(1, 1, 1)^\intercal$ eine Lösung für $\alpha = 5$.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei die folgende Quadrik:

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 1 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Um die euklidische Normalform der Quadrik zu bestimmen, muss man die Matrixbeschreibung der Quadrik aufstellen:

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 1$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(\lambda) = -9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$. Somit sind die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 0$.

Weil die Quadrikgleichung keinen linearen Teil hat, ergibt sich daraus direkt die euklidische Normalform der Quadrik:

$$-3y_1^2 - 3y_2^2 + 1 = 0$$

Die Quadrik ist ein elliptischer Zylinder (bzw. Kreiszylinder, da die Hauptachsen gleiche Länge haben).

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{4^k}{k!}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^k}+\frac{(-2)^k}{6^k}\right)$

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)^k}{k!}-1=\exp(-4)-1=1/e^4-1.$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k}+\frac{(-2)^k}{6^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k+\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Da es sich offenbar um zwei geometrische Reihen handelt, dürfen wir die gegebene Reihe aufsplitten und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{1-1/5}+\frac{1}{1+1/3}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2.$$

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Gegeben seien die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sowie das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha xy + 3\sin(y) + 5yz \\ \alpha x^2 + 3x\cos(y) + 5xz \\ \beta xy \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Parameter α, β besitzt f ein Potential?

(b) Berechnen Sie ein Potential von f für die Parameterwerte aus **(a)**.

(c) Sei nun $\beta = 5$ und folgende Parametrisierung der Kurve K gegeben.

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t \\ t\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die

$$\int_K f(s) \bullet ds = 1$$

gilt.

(a) $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend, die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials lautet somit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \beta x - 5x \\ 5y - \beta y \\ 2\alpha x + 3\cos(y) + 5z - 2\alpha x - 3\cos(y) - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta-5)x \\ (5-\beta)y \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta = 5$.

(b) Wegen $\operatorname{grad}(U) = f$ gilt zunächst

$$U(x,y,z) = \int 2\alpha xy + 3\sin(y) + 5yz \,\mathrm{d}\,x = \alpha x^2 y + 3x\sin(y) + 5xyz + c_1(y,z)\,.$$

Mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} U(x,y,z) = \alpha x^2 + 3x\cos(y) + 5xz + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} c_1(y,z) \stackrel{!}{=} \alpha x^2 + 3x\cos(y) + 5xz$$

folgt $c_1(y,z) = c_2(z)$ und schließlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} U(x,y,z) = 5xy + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} c_2(z) \stackrel{!}{=} 5xy \quad \Rightarrow \quad c_2(z) = c \in \mathbb{R}\,.$$

Ein Potential ist somit $U(x,y,z) = \alpha x^2 y + 3x\sin(y) + 5xyz\,.$

(c) Für $\beta = 5$ ist das Kurvenintegral wegunabhängig.

$$1 = \int_K f(s) \bullet ds = U(C(1)) - U(C(0)) = \alpha 4\pi + 6\sin(\pi) - 0 = \alpha 4\pi$$

Die Bedingung ist somit für $\alpha = \frac{1}{4\pi}$ erfüllt.

Alternative:

Kurvenintegral:

$$\begin{aligned}
\int_K f(s) \bullet ds &= \int_0^1 f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\alpha(1+t)t\pi + 3\sin(t\pi) \\ \alpha(1+t)^2 + 3(1+t)\cos(t\pi) \\ 5(1+t)t\pi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 2\alpha(1+t)t\pi + 3\sin(t\pi) + \alpha\pi(1+t)^2 + 3\pi(1+t)\cos(t\pi)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \alpha\pi + 4\alpha\pi t + 3\alpha\pi t^2 + 3\sin(t\pi) + 3\pi(1+t)\cos(t\pi)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\alpha\pi t + 2\alpha\pi t^2 + \alpha\pi t^3 - \frac{3}{\pi}\cos(t\pi) + 3(1+t)\sin(t\pi)\right]_0^1 - 3\int_0^1 \sin(t\pi)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\alpha\pi t + 2\alpha\pi t^2 + \alpha\pi t^3 - \frac{3}{\pi}\cos(t\pi) + 3(1+t)\sin(t\pi)\right]_0^1 + \frac{3}{\pi}\left[\cos(t\pi)\right]_0^1 \\
&= \left[\alpha\pi t + 2\alpha\pi t^2 + \alpha\pi t^3 + 3(1+t)\sin(t\pi)\right]_0^1 \\
&= \left[\alpha\pi + 2\alpha\pi + \alpha\pi\right] \\
&= 4\alpha\pi
\end{aligned}$$

Die Bedingung ist somit für $\alpha = \frac{1}{4\pi}$ erfüllt.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_1 und v_2 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$\alpha =$ 4 $\qquad$ $\beta =$ 3

(b) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_2 und v_3 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \gamma v_2 + \delta v_3$.

$\gamma =$ 5 $\qquad$ $\delta =$ 2

(c) Geben Sie eine Basis $B \subseteqq M$ des von M erzeugten Vektorraums $W = \mathrm{L}(M)$ aus Vektoren von M an.

$B :$ $\{v_1, v_2\}$ oder beliebige andere zwei

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Ableitungen in den jeweiligen Definitionsbereichen.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x\, e^{2x} =$	$(2x+1)e^{2x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \frac{x-3}{(x+1)^2} =$	$\frac{-x+7}{(x+1)^3}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x/2)\,, \quad x_0 = 0$

$$T_3(f, x, 0) = \boxed{1 - \frac{1}{8}x^2\,.}$$

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x^2)\,, \quad x_0 = 1$

$$T_3(g, x, 1) = \boxed{2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$\int (x+1)\big(5e^x - \sin(2x)\big)\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[5xe^x + \frac{1}{2}(x+1)\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]$
$\int \cos(x)\,\big(\sin(x)^3 + 3\sin(x)^2 + 3\sin(x) + 1\big)\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[\frac{1}{4}(\sin(x)+1)^4\right]$
$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[\,\ln\lvert x^3+2x-1\rvert\right]$
$\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x =$	$\ln\left(\frac{4}{13}\right)$