Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\dfrac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\dfrac{1}{x}$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 10. 04. 2012 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **10. 04.** bis **13. 04. 2012** mit Jörg Hörner (Raum V 57.8.160) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Lösungen x des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ an.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Begründen Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k}\right)^k$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sinh(k)$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k(k^2+2)}$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x}$ **(f)** $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-x-6}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \int_0^x t \exp(t)\,\mathrm{d}\,t$$

das Taylorpolynom $T_4\big(f, x, 0\big)$ der vierten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale, oder begründen Sie, warum sie nicht existieren.

(a) $\displaystyle\int_1^3 (2x-1)\ \exp\bigl(x^2-x\bigr)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2 - 2xy + x^3 = x((y-1)^2 + x^2 - 1)\,.$$

Die kritischen Stellen von f sind $(0,0), (0,2), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von f.

(b) Geben Sie für jede der oben stehenden kritischen Stellen den Funktionswert von f und den Typ der kritischen Stelle an.

(c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right)$ an.

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie alle absoluten Maxima und Minima der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto (x+y)^3$$

auf der durch die Nebenbedingung

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$$

beschriebenen Ellipse.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Geben Sie die komplexe Zahl $-32\,\mathrm{i}$ in Polarkoordinaten an.

Bestimmen Sie diejenigen Lösungen der Gleichung $z^5 = -32\mathrm{i}$, deren Argumente im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ liegen. Die Lösungen können in der Form $z = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$ angegeben werden.

Aufgabe 9 (*9 Punkte*) Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = \left(\binom{0}{0}; \binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ der Punkt $P = (6,2)^\intercal$, die beiden Vektoren $v = (-10,5)^\intercal$ und $w = (2,4)^\intercal$, sowie die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte P_1 und P_2 sind durch die Beziehungen $\overrightarrow{PP_1} = v$ und $\overrightarrow{PP_2} = w$ bestimmt.

Die Punkte Q, Q_1 und Q_2 sind die entsprechenden Bildpunkte: $Q = \alpha(P)$, $Q_1 = \alpha(P_1)$, $Q_2 = \alpha(P_2)$.

(a) Geben Sie für die Punkte P_1 und P_2 die Koordinaten im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ an.

$_{\mathbb{E}}P_1 =$, $_{\mathbb{E}}P_2 =$

(b) Geben Sie für die Punkte Q, Q_1, Q_2 die Koordinaten im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ an.

$_{\mathbb{E}}Q =$, $_{\mathbb{E}}Q_1 =$, $_{\mathbb{E}}Q_2 =$

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte Q, Q_1, Q_2 bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = (P; v, w)$ und geben Sie dann die Darstellung der Abbildung α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an. (Die allgemeine Koordinatentransformation muss dazu nicht bestimmt werden.)

$_{\mathbb{F}}Q =$, $_{\mathbb{F}}Q_1 =$, $_{\mathbb{F}}Q_2 =$

$_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) =$ $_{\mathbb{F}}x +$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Gegeben sind drei Punkte $P_1 = (0, 1, 2)$, $P_2 = (3, 6, 9)$ und $P_3 = (2, 4, 8)$ im Raum $\mathbb{R}^3$. Durch diese Punkte ist die Ebene E gegeben.

Geben Sie zwei Vektoren v und w an, welche die Ebene E aufspannen und bestimmen Sie einen Normalenvektor n der Ebene E.

$v =$ $\boxed{}$ $w =$ $\boxed{}$ $n =$ $\boxed{}$

Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E an.

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + kx_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 1 = 0 \right\} \qquad \text{für } k \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik in Abhängigkeit von k in der Form $x^\intercal A_k\, x + 2a^\intercal x + c = 0$ an.

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A_k in Abhängigkeit von k.

$\mathrm{Rg}(A_k) =$

Geben Sie die Menge aller $k \in \mathbb{R}$ an, für welche die Quadrik Q_k vom kegeligen Typ ist.

Aufgabe 12 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j^2 + 3j + 1}{3j^2 + 4j + 21} \right)^j z^j$ $\qquad \rho =$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j + 3^j}{4^j} (z - 4i)^j$ $\qquad \rho =$

(c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{3j + (-1)^j\, j}{2j + 1} \right)^j z^j$ $\qquad \rho =$
