Aufgabe 1 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie alle Lösungen x des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ an.

Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det(A) = (-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot 4 - 3(-6 - 3 + 6 + 1) = 2$$

Da die Determinante ungleich Null ist, ist das homogene LGS eindeutig lösbar: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume.

Zu A: charakteristisches Polynom: $(1-\lambda)(-1-\lambda) \overset{!}{=} 0$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$

Eigenräume: $(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\}$

$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\}$

Zu B: charakteristisches Polynom: $(2-\lambda)\,(\lambda^2+1) \overset{!}{=} 0$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \mathrm{i},\ \lambda_3 = -\mathrm{i}.$

Eigenräume: $(B - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\};$

$$(B - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1+3\mathrm{i} \\ -5\mathrm{i} \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\};$$

$$(B - \lambda_3 E) = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_3) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1-3\mathrm{i} \\ 5\mathrm{i} \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\}.$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Begründen Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k}\right)^k$ **(b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^k$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \sinh(k)$ **(d)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k(k^2+2)}$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x}$ **(f)** $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-x-6}$

(a) Wurzelkriterium

$$\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k}\right)^k} = \frac{k+1}{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Reihe konvergiert}$$

(b) $\left|\frac{3+4i}{6}\right| = \frac{\sqrt{9+16}}{6} = \frac{5}{6} < 1 \quad \Rightarrow$ Die gegebene geometrische Reihe konvergiert.

(c) $\sinh(k)$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow$ Reihe divergiert

(d)

$$\left|\frac{\sin(k)}{k(k^2+2)}\right| < \frac{1}{k(k^2+2)} < \frac{1}{k^3}$$

Somit ist eine konvergente Majorante gefunden, die Reihe konvergiert.

(e) Hier liegt der Fall $\frac{0}{0}$ vor, deshalb ergibt sich mit der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\cos(2x)}{4} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

(f) Hier liegt der Fall $\frac{0}{0}$ vor, deshalb ergibt sich mit der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{2x-1} = -\frac{1}{5}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \int\limits_0^x t\ \exp(t)\ \mathrm{d}\,t$$

das Taylorpolynom $T_4\big(f, x, 0\big)$ der vierten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Die Potenzreihe der Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent und kann gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^x t\ \exp(t)\ \mathrm{d}\,t &= \int\limits_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k!}\right)\ \mathrm{d}\,t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)k!}\,.\end{aligned}$$

Die ersten 3 Summanden liefern das gesuchte Taylorpolynom

$$T_4\big(f, x, 0\big) = \sum_{k=0}^{2} \frac{x^{k+2}}{(k+2)k!} = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{8}\,x^4\,.$$

Alternative Lösung:

Berechnung des Integrals mit partieller Integration:

$$f(x) = \int\limits_0^x t\exp(t)\ \mathrm{d}\,t = [t\exp(t)]_0^x - \int\limits_0^x \exp(t)\ \mathrm{d}\,t = x\exp(x) - \exp(x) + 1\,.$$

Ableitungen:

$$\begin{array}{rcll} f^{(0)}(x) &=& x\exp(x) - \exp(x) + 1 & f^{(0)}(0) = 0 \\ f^{(1)}(x) &=& x\exp(x) & f^{(1)}(0) = 0 \\ f^{(2)}(x) &=& x\exp(x) + \exp(x) & f^{(2)}(0) = 1 \\ f^{(3)}(x) &=& x\exp(x) + 2\exp(x) & f^{(3)}(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) &=& x\exp(x) + 3\exp(x) & f^{(4)}(0) = 3 \end{array}$$

Taylor-Polynom:

$$T_4\big(f, x, 0\big) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}\,x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\,x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{8}\,x^4\,.$$

Statt der partiellen Integration kann ersatzweise auch so argumentiert werden:

- Wegen übereinstimmender Integrationsgrenzen gilt $f^{(0)}(0) = \int_0^0 t\exp(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.
- Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $f^{(1)}(x) = x\exp(x)$.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale, oder begründen Sie, warum sie nicht existieren.

(a) $\displaystyle\int_1^3 (2x-1)\ \exp\bigl(x^2-x\bigr)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x$

(a) Mit der Substitution $u(x)=x^2-x$, $\dfrac{\mathrm{d}\,u(x)}{\mathrm{d}\,x}=2x-1$, $u(1)=0$, $u(3)=6$ folgt

$$\int_1^3 (2x-1)\ \exp\bigl(x^2-x\bigr)\,\mathrm{d}\,x \quad = \quad \int_0^6 \exp(u)\,\mathrm{d}\,u = e^6-1\,.$$

(b) Eine Partialbruchzerlegung für den Integranden lautet

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3} \quad\Rightarrow\quad 1=A(x-3)+B(x-1) \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}\,.$$

Somit ist das Integral

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-3|\right] = \left[\ln\left(\sqrt{\left|\frac{x-3}{x-1}\right|}\right)\right]\,.$$

(c)

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x = \ln\left(\sqrt{\lim_{\beta\to+\infty}\left|\frac{\beta-3}{\beta-1}\right|}\right) - \ln\left(\sqrt{\left|\frac{4-3}{4-1}\right|}\right) = \ln(1)-\ln\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\ln(3)}{2}\,.$$

(d) Der Integrand ist an $x=3$ nicht definiert, deshalb muss die Integration an dieser Stelle aufgespalten werden. Dabei gilt für $2<\beta<3$:

$$\int_2^\beta \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x = \ln\left(\sqrt{\left|\frac{\beta-3}{\beta-1}\right|}\right) - 0\,,$$

der Limes für $\beta\to 3-0$ existiert somit wegen

$$\lim_{\beta\to 3-0}\sqrt{\left|\frac{\beta-3}{\beta-1}\right|} = 0$$

nicht, das uneigentliche Integral divergiert.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2 - 2xy + x^3 = x((y-1)^2 + x^2 - 1)\,.$$

Die kritischen Stellen von f sind $(0,0), (0,2), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$.

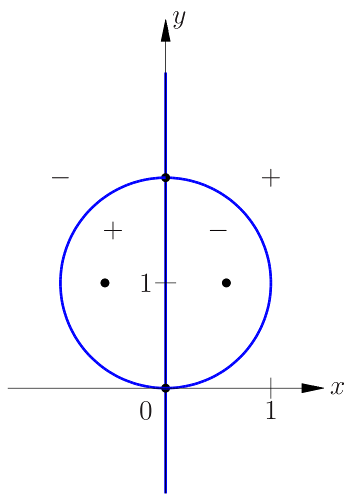
(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von f.

(b) Geben Sie für jede der oben stehenden kritischen Stellen den Funktionswert von f und den Typ der kritischen Stelle an.

(c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right)$ an.

(a)

y-Achse und Kreis um $(0,1)$ mit Radius 1.
Rechter Halbkreis negativ, an Nullstellenmenge jeweils Vorzeichenwechsel.



(b) Die Punkte $(0,0)$ und $(0,2)$ sind Kreuzungspunkte von Kurven aus der Nullstellenmenge, an denen jeweils ein Vorzeichenwechsel erfolgt. Hier liegen also Sattelpunkte mit Funktionswert 0 vor.

In den beiden durch die Nullstellenmenge begrenzten kompakten Halbkreisen müssen Extremwerte auftreten. Da jeweils nur eine kritische Stelle enthalten ist, müssen dies die entsprechenden Stellen sein.
Damit ist $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$ ein Maximum
und $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} < 0$ ein Minimum.

(c) Die Stelle $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ ist kritisch, hat also einen verschwindenden Gradienten und der Funktionswert wurde in **(b)** bestimmt. Die Tangentialebene hat somit die Gleichung $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Alternative Lösung von (b) mit Ableitungen:

Mit dem Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - 2y + 3x^2 \\ 2xy - 2x \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Hesse-Matrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{pmatrix}$$

Für $x = 0$ hat die Hesse-Matrix die Determinante $-(2y-2)^2$, die für $y \neq 1$ negativ ist. Hier liegen also Sattelpunkte mit Funktionswert 0 vor.

Für $y = 1$ hat die Hesse-Matrix Diagonalform mit Determinante $12x^2$, die für $x \neq 0$ positiv ist. Die Diagonal-Einträge haben das gleiche Vorzeichen wie die x-Koordinate der untersuchten Stelle.

Damit ist $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ ein Maximum und $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ein Minimum .

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie alle absoluten Maxima und Minima der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto (x+y)^3$$

auf der durch die Nebenbedingung

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$$

beschriebenen Ellipse.

Der Gradient von f ist $\begin{pmatrix} 3(x+y)^2 \\ 3(x+y)^2 \end{pmatrix}$. Der Gradient der Nebenbedingung ist $\begin{pmatrix} 10x-6y \\ -6x+10y \end{pmatrix}$. Dieser Ausdruck wird nur für $(x,y)=(0,0)$ Null. Der Punkt $(0,0)$ erfüllt die Nebenbedingung nicht. Daraus ergibt sich das System der Lagrange-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 3(x+y)^2 & = & \lambda(10x-6y) \\ 3(x+y)^2 & = & \lambda(-6x+10y) \\ 5x^2-6xy+5y^2-16 & = & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich $\lambda(10x-6y) = \lambda(-6x+10y)$.

Der Fall $\lambda = 0$ führt auf $x=-y$. Für $\lambda \neq 0$ ergibt sich $10x-6y = -6x+10y$ und daraus $x=y$.

Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt die vier kritischen Stellen

$$P_1 = (2,2), \quad P_2 = (1,-1), \quad P_3 = (-2,-2), \quad P_4 = (-1,1)$$

mit den Funktionswerten

$$f(P_1) = 64\,, \quad f(P_2) = 0\,, \quad f(P_3) = -64\,, \quad f(P_4) = 0\,.$$

Bei P_2 und P_4 können somit keine absoluten Extrema vorliegen.

Die durch die Nebenbedingung beschriebene Menge ist kompakt, also existiert (mindestens) ein absolutes Maximum und (mindestens) ein absolutes Minimum.

Durch Vergleich der Funktionswerte ergibt sich bei P_1 ein absolutes Maximum und bei P_3 ein absolutes Minimum.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Geben Sie die komplexe Zahl $-32\,\mathrm{i}$ in Polarkoordinaten an.

$$32\left(\cos(\tfrac{3}{2}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{3}{2}\pi)\right)$$

Bestimmen Sie diejenigen Lösungen der Gleichung $z^5 = -32\mathrm{i}$, deren Argumente im Intervall $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ liegen. Die Lösungen können in der Form $z = r\left(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)\right)$ mit $r,\varphi\in\mathbb{R}$ angegeben werden.

$$z = 2\left(\cos(\tfrac{7}{10}\pi)+\mathrm{i}\sin(\tfrac{7}{10}\pi)\right)$$

Aufgabe 9 (*9 Punkte*) Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = \left(\binom{0}{0};\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right)$ der Punkt $P=(6,2)^\intercal$, die beiden Vektoren $v=(-10,5)^\intercal$ und $w=(2,4)^\intercal$, sowie die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon x\mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -4 & -3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}.$$

Die Punkte P_1 und P_2 sind durch die Beziehungen $\overrightarrow{PP_1}=v$ und $\overrightarrow{PP_2}=w$ bestimmt.

Die Punkte Q, Q_1 und Q_2 sind die entsprechenden Bildpunkte: $Q=\alpha(P)$, $Q_1=\alpha(P_1)$, $Q_2=\alpha(P_2)$.

(a) Geben Sie für die Punkte P_1 und P_2 die Koordinaten im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ an.

$${}_{\mathbb{E}}P_1 = \binom{-4}{7},\quad {}_{\mathbb{E}}P_2 = \binom{8}{6}$$

(b) Geben Sie für die Punkte Q, Q_1, Q_2 die Koordinaten im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ an.

$${}_{\mathbb{E}}Q = \binom{6}{2},\quad {}_{\mathbb{E}}Q_1 = \binom{-4}{7},\quad {}_{\mathbb{E}}Q_2 = \binom{4}{-2}$$

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte Q, Q_1, Q_2 bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}=(P;v,w)$ und geben Sie dann die Darstellung der Abbildung α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an. (Die allgemeine Koordinatentransformation muss dazu nicht bestimmt werden.)

$${}_{\mathbb{F}}Q = \binom{0}{0},\quad {}_{\mathbb{F}}Q_1 = \binom{1}{0},\quad {}_{\mathbb{F}}Q_2 = \binom{0}{-1}$$

$${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}{}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Gegeben sind drei Punkte $P_1 = (0,1,2)$, $P_2 = (3,6,9)$ und $P_3 = (2,4,8)$ im Raum $\mathbb{R}^3$. Durch diese Punkte ist die Ebene E gegeben.

Geben Sie zwei Vektoren v und w an, welche die Ebene E aufspannen und bestimmen Sie einen Normalenvektor n der Ebene E.

$$v = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}} \qquad w = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}} \qquad n = \boxed{\frac{1}{\sqrt{98}} \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E an.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{98}}(-9x_1 + 4x_2 + x_3) = \frac{6}{\sqrt{98}}}$$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + kx_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 1 = 0 \right\} \qquad \text{für } k \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik in Abhängigkeit von k in der Form $x^\mathsf{T} A_k\, x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ an.

$$\boxed{x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} x + 2(1,0,0)\, x + 1 = 0}$$

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A_k in Abhängigkeit von k.

$$\mathrm{Rg}(A_k) = \boxed{\begin{cases} 3 & k \neq 2 \\ 2 & k = 2 \end{cases}}$$

Geben Sie die Menge aller $k \in \mathbb{R}$ an, für welche die Quadrik Q_k vom kegeligen Typ ist.

$$\boxed{\mathbb{R}}$$

Aufgabe 12 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j^2 + 3j + 1}{3j^2 + 4j + 21} \right)^j z^j$ $\qquad \rho = \boxed{3}$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j + 3^j}{4^j} (z - 4i)^j$ $\qquad \rho = \boxed{\frac{4}{3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{3j + (-1)^j\, j}{2j + 1} \right)^j z^j$ $\qquad \rho = \boxed{\frac{1}{2}}$