Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Gegeben sei eine lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$ mit
$A = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$. Weiter sei $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.
Entscheiden Sie jeweils, ob die durch "$\cdot$" gekennzeichneten freien Stellen mit Elementen aus $\{0, 1\}$ so aufgefüllt werden können, dass die entsprechende Eigenschaft erfüllt ist. Geben Sie, wenn möglich, ein Beispiel einer solchen Matrix A an.

(a) $\mathrm{Rg}(A) = 3$

(b) $\dim\ \mathrm{Kern}\,(\alpha) = 2$

(c) $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A)$

(d) Die Abbildung α ist surjektiv und ihr Kern hat die Dimension zwei.

(a) Um Rang 3 zu erhalten muss man nachprüfen, ob die Zeilen linear unabhängig sind. (Beachte: Zeilenrang=Spaltenrang=Rang, es geht also auch über die Spalten)
Hier eine Liste der Matrizen, die Rang 3 haben (zur Orientierung: in jeder Zeile sind die ersten beiden Spalten der Matrizen gleich).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Der Lösungsraum des linearen Gleichungsystem $Ax = 0$ ist der Kern der Abbildung α. Falls das Gleichungssystem genau zwei Parameter erlaubt, so ist der Kern zweidimensional.

Hier eine Liste der Matrizen, die diese Eigenschaft erfüllen (zur Orientierung: in jeder Zeile sind die ersten beiden Spalten der Matrizen gleich).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Es sind die gleichen Matrizen wie in (a).
Man kann direkt die Ränge der Matrix und der erweiterten Matrix betrachten oder man betrachtet das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$, hier gilt: Lösbarkeit $\Leftrightarrow \operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg}(A)$.

(d) Nicht möglich.
Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen besagt:

$$\dim\ \text{Definitionsbereich} = \dim\ \text{Bild} + \dim\ \text{Kern}\,.$$

In diesem Fall ist die Dimension des Definitionsbereichs vier, die Dimension des Bildes soll drei sein und gleichzeitig soll die Dimension des Kernes zwei sein. Setzt man das in die Formel ein, so sieht man $4 \neq 3 + 2$. Das ist unmöglich, d.h. eine solche Abbildung kann nicht existieren.

Anmerkung: Insgesamt gibt es 16 Varianten die Matrix aufzufüllen. Es sind 15 verschiedene Varianten oben aufgeführt, nun noch die letzte Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
sie hat Rang 1, die Dimension des Kernes ist 3 und der Rang der erweiterten Matrix ist 2.

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Lösen Sie das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge an.

Der Gaußalgorithmus liefert:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_1: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4 - Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{array}{r} Z_1 - Z_2: \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} -(Z_1 - 2Z_3): \\ Z_2 - Z_3: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x_2^2 + 2x_1x_3 + 6x_2 + 2x_3 + 5 = 0 \right\}$$

sowie die beiden Ebenen

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = -1 \right\} \text{ und } \mathcal{E}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_2 = -1 \right\}.$$

Bestimmen Sie für die Quadriken $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{E}_1$ und $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{E}_2$, die als Schnitt der Quadrik $\mathcal{Q}$ mit $\mathcal{E}_1$ beziehungsweise $\mathcal{E}_2$ entstehen, jeweils eine euklidische Normalform und die Gestalt.

$\mathcal{Q}_1$ hat die Gleichung $-2x_1 + 3x_2^2 + 6x_2 + 3 = 0$.
Quadratisches Ergänzen liefert $-2x_1 + 3(x_2+1)^2 = 0$, also die Normalform $-3y_1^2 + 2y_2 = 0$.
Die Gestalt ist eine Parabel.

$\mathcal{Q}_2$ hat die Gleichung $2x_1x_3 + 2x_3 + 2 = 0$ bzw.

$$(x_1, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\intercal} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2 = 0.$$

Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:
$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, die Eigenwerte sind also 1 und -1. Zum Eigenwert 1 ist $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor; zum Eigenwert -1 ist $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor.
Wir erhalten also als Transformationsmatrix $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Insgesamt ergibt sich dann durch Diagonalisieren $y_1^2 - y_2^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) + 2 = 0$.
Quadratisches Ergänzen liefert $\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 = 0$. Die euklidische Normalform ist $\frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 1 = 0$.
Die Gestalt ist eine Hyperbel.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die folgenden komplexen Potenzreihen

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^n z^n \qquad \text{und} \qquad g_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n+1}z^n$$

mit $\alpha\in\mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzkreis der Reihe $f(z)$. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.

(b) Finden Sie das maximale $\delta>0$ so, dass die Reihe $f(z)$ für alle $z\in U_\delta\left(\frac{1}{9}\mathrm{i}\right)$ absolut konvergiert.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha\in\mathbb{C}$, für die der Konvergenzradius der Reihe $g_\alpha(z)$ gleich 2 ist.

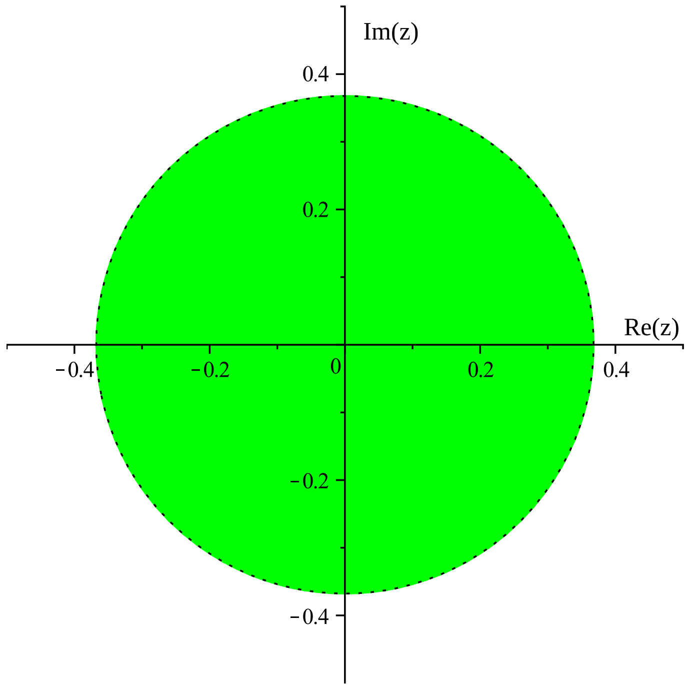
(a) Wir bestimmen den Konvergenzradius ρ:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n}\right|=\mathrm{e}, \quad \text{also} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\mathrm{e}.$$

Daraus folgt: $\rho=\mathrm{e}^{-1}$.

Der Konvergenzkreis ist also $U_{\mathrm{e}^{-1}}(0)$. Dies ist eine Kreisscheibe mit Radius e^{-1} (ohne den Rand) und mit Ursprung in 0 .

Skizze:



(D.h. für $z\in U_{\mathrm{e}^{-1}}(0)$ konvergiert die Reihe $f(z)$ absolut, für $z\notin\overline{U_{\mathrm{e}^{-1}}(0)}$ divergiert sie, für $z\in\partial U_{\mathrm{e}^{-1}}(0)$ wird keine Aussage gemacht.)

(b) Es gilt:

$|\frac{1}{9}\mathrm{i}| = \frac{1}{9}$. Für den Radius δ muss also folgendes gelten:

$$\delta := \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{9}.$$

(c) Wir bestimmen den Konvergenzradius ρ_α:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{\alpha^n}\right| = |\alpha|\,.$$

Der Konvergenzradius ist somit:

$$\rho_\alpha = \frac{1}{|\alpha|}$$

Der Konvergenzradius soll 2 sein. D.h. alle α aus der Menge

$$\left\{\alpha \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\alpha| = \tfrac{1}{2}\right\}$$

ergeben einen Konvergenzradius gleich 2 der Reihe $g_\alpha(z)$.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie den Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x^5-1)(x-1)}{4x^2-8x+4}.$$

(b) Bestimmen Sie die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-3)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k .$$

(c) Bestimmen Sie den Häufungspunkt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \cos\left(5n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\right) .$$

(a) Für $x \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{(x^5-1)(x-1)}{4x^2-8x+4} &= \frac{(1+x+x^2+x^3+x^4)(x-1)^2}{4(x-1)^2} = \frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{4} \\ \Rightarrow &\lim_{x\to 1} \frac{(x^5-1)(x-1)}{4x^2-8x+4} = 5/4 \end{aligned}$$

Alternativ: mit l'Hospital, da Zähler und Nenner an 1 verschwinden

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^5-1)(x-1)}{4x^2-8x+4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^6-x^5-x+1)}{4x^2-8x+4} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(6x^5-5x^4-1)}{8x-8} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(30x^4-20x^3)}{8} = 5/4$$

(b) Mit dem Grenzwert $1/(1-q)$ für die geometrische Reihe (zweite um erstes Glied korrigiert) ist der Wert der Summe

$$\frac{1}{1+1/3} + \frac{1}{1-1/3} - 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

Alternativ: Zusammenfassen der beiden Reihen ergibt

$$2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}}\right) - 1$$

und daher insgesamt $2 \cdot \frac{9}{8} - 1 = \frac{5}{4}$.

(c) Wegen der Periodizität des Kosinus ist

$$\cos\left(5n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der größte Häufungspunkt ergibt sich also zu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(3x+y)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Stufe von f um den Entwicklungspunkt $(0,\pi/4)$.

Gradient

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3\cos(3x+y) \\ \cos(3x+y) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} -9\sin(3x+y) & -3\sin(3x+y) \\ -3\sin(3x+y) & -\sin(3x+y) \end{pmatrix}$$

Auswertung am Entwicklungspunkt

$$f\,(0,\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \operatorname{grad} f\,(0,\pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\,, \quad \mathrm{H}f\,(0,\pi/4) = \begin{pmatrix} -\frac{9\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Taylorpolynom der Stufe zwei

$$T_2(f,(x,y),(0,\pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(y-\pi/4) - \frac{9\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x\,(y-\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{4}\,(y-\pi/4)^2$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := (y+1)(y-x^2+2) = -x^2y - x^2 + y^2 + 3y + 2\,.$$

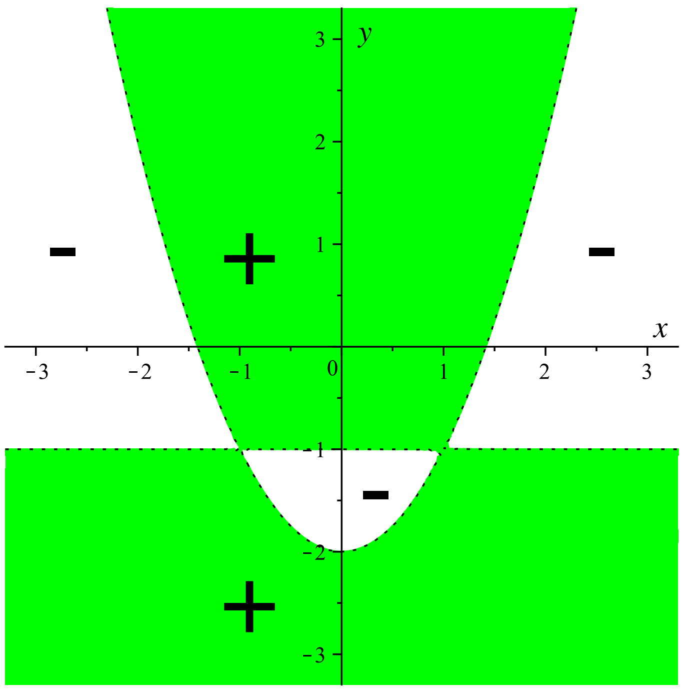
(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f und skizzieren Sie die Vorzeichenverteilung in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie Lage und Art aller kritischen Stellen von f.

(a) Nullstellenmenge:

$$y = x^2 - 2 \quad \vee \quad y = -1$$

Skizze:



(b) Der Gradient

$$\begin{pmatrix} -2xy - 2x \\ -x^2 + 2y + 3 \end{pmatrix}$$

muss an den kritischen Stellen verschwinden. Aus der ersten Zeile folgt somit

$$-2x(y+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \vee \quad y = -1\,.$$

Die zweite Zeile liefert

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} \\ y = -1 \quad &\Rightarrow \quad x = \pm 1\,, \end{aligned}$$

die kritischen Stellen lauten also

$$P_1 = (-1,-1) \quad P_2 = (1,-1) \quad P_3 = \left(0, -\frac{3}{2}\right)\,.$$

Lösung via Vorzeichenverteilung:

Wegen der aus der Skizze erkenntlichen Vorzeichenwechsel liegen bei P_1, P_2 Sattelpunkte vor. Die Stelle P_3 liegt in einem von Nullstellen umrandeten kompakten Gebiet. Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie ein Minimum in diesem kompakten Gebiet an. Dieses Minimum kann wegen negativen Vorzeichens der Funktionswerte in dessen Innern nicht auf dem Rand liegen. Da P_3 die einzige kritische Stelle im Innern des Gebietes ist, muss dort ein lokales Minimum vorliegen.

Alternative Lösung via Hessematrix:

Die Hessematrix ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2y-2 & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir werten diese nun an den kritischen Stellen aus und berechnen die Determinante.
Es ist $\det \mathrm{H}\, f(-1,-1) = -4 < 0$. Folglich liegt bei P_1 ein Sattelpunkt vor.
Es ist $\det \mathrm{H}\, f(1,-1) = -4 < 0$. Folglich liegt bei P_2 ein Sattelpunkt vor.
Es ist $\det \mathrm{H}\, f\left(0,-\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$. Außerdem ist $f_{xx}\left(0,-\frac{3}{2}\right) = 1 > 0$. Folglich ist P_3 eine lokale Minimalstelle.

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben ist das von dem reellen Parameter α abhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 x_2^2 + 6x_1^2 x_2 \\ 2x_1^3 + 8x_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

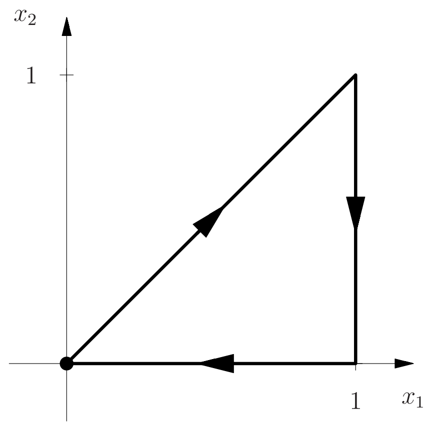
(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4x_1^2 x_2^2 + 2x_1^3 x_2$$

ein Potential von f_α ist.

(b) Berechnen Sie für den abgebildeten Weg C die Integrale

$$\oint_C f_4(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \oint_C f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$



(a) Wegen

$$\operatorname{grad} U(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 x_2^2 + 6x_1^2 x_2 \\ 8x_1^2 x_2 + 2x_1^3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} f_\alpha(x)$$

ist U für $\alpha = 4$ ein Potential von f_α.

(b) Parametrisierung der Randkurven:

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \qquad C_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad C_3(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

f_4 besitzt ein Potential, ein geschlossenes Kurvenintegral ist demnach gleich Null.

$$\oint_C f_4(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0$$

Das Kurvenintegral muss nach Definition berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\oint_C f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \oint_{C_1} f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x + \oint_{C_2} f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x + \oint_{C_3} f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 6t^3 \\ 2t^3 + 8t^3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_0^1 \begin{pmatrix} \dots \\ 2 + 8(1-t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 16t^3 \,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 -10 + 8t \,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 0 \,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[4t^4\right]_0^1 + \left[-10t + 4t^2\right]_0^1 + 0 \;=\; 4 - 10 + 4 \;=\; -2
\end{aligned}$$

Alternative: Wegen der Linearität des Integrals und der Tatsache, dass f_4 ein Potential besitzt, folgt

$$\begin{aligned}\oint \big(f_4(x) - f_0(x)\big) \bullet \mathrm{d}\,x &= \underbrace{\oint f_4(x) \bullet \mathrm{d}\,x}_{=0} - \oint f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x \\ \Leftrightarrow \qquad \oint f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= -\oint \big(f_4(x) - f_0(x)\big) \bullet \mathrm{d}\,x\,.\end{aligned}$$

Mit dem Vektorfeld

$$f_4(x) - f_0(x) = \begin{pmatrix} 8x_1x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und obenstehender Parametrisierung folgt dann

$$\begin{aligned}\oint f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= -\oint \big(f_4(x) - f_0(x)\big) \bullet \mathrm{d}\,x \\ &= -\int_0^1 \begin{pmatrix} 8t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t - \int_0^1 \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t - \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= -\int_0^1 8t^3 \,\mathrm{d}\,t = -2\end{aligned}$$

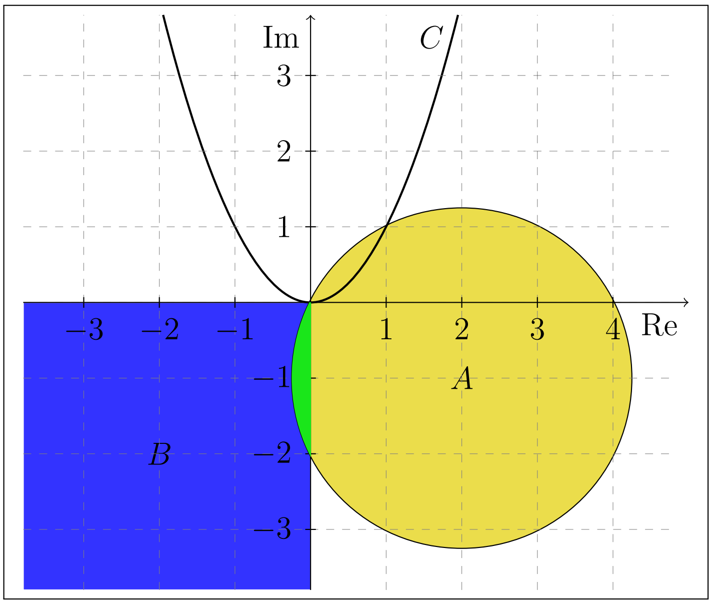
Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$.

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} | \; |z - 2 + \mathrm{i}| \leqq \frac{9}{4}\}$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} | \; \mathrm{Re}(z) \leqq 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \leqq 0\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} | \; \mathrm{Im}(z) = (\mathrm{Re}(z))^2\}$



Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix A.

$$\mathrm{Sp}(A) = \boxed{4} \qquad \det(A) = \boxed{5}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{2+\mathrm{i}}, \; V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad \lambda_2 = \boxed{2-\mathrm{i}}, \; V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*)

(a) Geben Sie $z = \dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ in Polarkoordinatendarstellung an. $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Berechnen Sie $1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{28} = \boxed{2}$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $-8\mathrm{i} = z^3$ an. (Die Lösungen können in Polarkoordinatendarstellung angeben werden.)

$\boxed{\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},\ 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}},\ 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}\} \text{ oder } \{2(\cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2})), 2(\cos(\frac{7\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{6})), 2(\cos(\frac{11\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{11\pi}{6}))\} \text{ oder } \{2\mathrm{i}, -\sqrt{3}-\mathrm{i}, \sqrt{3}-\mathrm{i}\}}$

Aufgabe 12 (*3 Punkte*) Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = \left(\binom{0}{0}; \binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ die Punkte $P = (2,1)^\intercal$, $Q = (4,2)^\intercal$ und $R = (3,3)^\intercal$. Das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; v, w)$ wird durch den Punkt P und die beiden Vektoren $v = \overrightarrow{PQ}$ und $w = \overrightarrow{PR}$ gebildet.

(a) M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. Geben Sie die Koordinaten des Punktes M bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$${}_{\mathbb{F}}M = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

(b) Die affine Abbildung α vertauscht die Punkte P, Q und R zyklisch, d.h. $\alpha(P) = Q$, $\alpha(Q) = R$ und $\alpha(R) = P$. Geben Sie die Darstellung von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\ {}_{\mathbb{F}}x + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 13 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Integrale.

$$\int 2x\sin(x^2-3)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\cos\left(x^2-3\right)\right]}$$

$$\int \frac{x-16}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[3\ln|x+5| - 2\ln|x-2|\right]}$$

$$\int x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{x^2}{4}\left(2\ln(x)-1\right)\right]}$$

$$\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{-\frac{1}{4}}$$
