Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 10** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 14. 10. 2013 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **16. 10.** bis **22. 10. 2013** mit Tilemachos Vassias (Raum V 57.7.354) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Gegeben seien folgende Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n,$$
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{3} \right)^n (x+1)^n .$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius und den Entwicklungspunkt.

(b) Entscheiden Sie nun für jedes $x \in \mathbb{R}$, ob die obigen Reihen jeweils konvergieren oder divergieren.

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Geben Sie eine reelle Matrix an, die den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3 und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert -2 hat.

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Der Graph der Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \cosh(x) - 1$$

ist parametrisiert durch

$$C : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, \cosh(t) - 1)^\intercal .$$

Berechnen Sie die Länge des Graphen von f.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int x^2 \ln(x) \,\mathrm{d}\, x$

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1 + (\ln(x))^2)} \,\mathrm{d}\, x$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 7x + 6}{x^2 + 3x} \,\mathrm{d}\, x$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \; 21x_1^2 + 8\sqrt{3}x_1x_2 + 13x_2^2 = 225\} .$$

Bestimmen Sie euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Skizzieren Sie die Quadrik im Ausgangskoordinatensystem.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Sei

$$f \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \tfrac{1}{9} - x^2 .$$

Die Funktion f besitzt im Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle. Benutzen Sie die Intervallhalbierungsmethode, ausgehend von $[a_1, b_1] := [0, 1]$, um ein Intervall von kleinerer Länge als $\varepsilon = 0{,}3$ zu finden, das eine Nullstelle von f enthält.

Aufgabe 7 (*11 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + (y-1)^2$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 2x^2 + \frac{y^2}{2} - 1$$

Es ist $f(x,y)$ das Quadrat des Abstands des Punktes $P := (0,1)$ vom Punkt (x,y).

Die Menge $E := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0 \,\}$ ist eine Ellipse.

Bestimmen Sie die absoluten Minimalstellen und die absoluten Maximalstellen von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes P von einem Punkt der Ellipse E.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Ebene $E = \{(x,y,z)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1\}$ und die Punkte $A = (1,0,3)^{\mathsf{T}}$ und $B = (3,2,3)^{\mathsf{T}}$.

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g durch A und B mit der Ebene E.

$S =$

(b) Geben Sie einen Normalenvektor n von E an.

$n =$

(c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und n.

$\alpha =$

(d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene F, welche durch A, B und den Ursprung geht.

(e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von A, B und dem Ursprung aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Es sei

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto x^2 + xy + 2y.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(f,(x,y),(1,1))$.

$T_1(f,(x,y),(1,1)) =$

(b) Entwickeln Sie f nach Potenzen von $(x-1)$ und $(y-1)$, d.h. schreiben Sie f in der Form

$$f(x,y) = a + b_0(x-1) + b_1(y-1) + \sum_{j=0}^{2} c_j (x-1)^j (y-1)^{2-j}, \qquad \text{mit } a, b_0, b_1, c_j \in \mathbb{R}.$$

$a =$, $b_0 =$, $b_1 =$, $c_0 =$, $c_1 =$, $c_2 =$.

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \alpha(x) = Ax$.

(a) Bestimmen Sie den Kern von α.

$\operatorname{Kern}(\alpha) =$

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

$\chi_A(\lambda) =$

(c) Welche Eigenwerte hat A?

(d) Geben Sie zu jedem Eigenwert seine algebraische und seine geometrische Vielfachheit an.

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit