Aufgabe 1 (*3 Punkte*) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge, die durch

$$f_0 := 0,\ f_1 := 1 \text{ und } f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$$

definiert ist. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} f_j^2 = f_n f_{n+1}.$$

IA Für $n = 0$ erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{0} f_j^2 = 0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = f_0 f_1.$$

IH Es gelte

$$\sum_{j=0}^{n} f_j^2 = f_n f_{n+1}.$$

IS Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1} f_j^2 &= \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} f_j^2\right)}_{=f_n f_{n+1} \text{ nach IH}} + f_{n+1}^2 \\
&= f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\
&= (f_n + f_{n+1}) f_{n+1} \\
&= f_{n+2} f_{n+1} \\
&= f_{n+1} f_{(n+1)+1}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \neq 0$.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\left(f'\left(\frac{1}{2\pi n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Bestimmen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von f an der Stelle $x = 0$.

(d) Ist f stetig differenzierbar?

(a) Nach der Produkt- und der Kettenregel berechnen wir für $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

(c) Es gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Nun ist aber

$$0 \leqq \lim_{h\to 0}\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| = \lim_{h\to 0}|h|\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right|}_{\leqq 1} \leqq \lim_{h\to 0}|h| = 0$$

also gilt $\lim\limits_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$.

Alternativ kann der Grenzwert auch in Worten begründet werden:
Für $h \to 0$ konvergiert der Faktor h gegen Null und $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ ist beschränkt.

(d) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n} = 0$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = -1 \neq 0 = f'(0),$$

also ist f' nicht stetig in 0.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei t ein reeller Parameter. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + ty + z &= 0 \\ x + (1+2t)y + (t+2)z &= 0 \\ x + y + tz &= 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems.

(b) Für welche t ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

(c) Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(a) Die Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1+2t & t+2 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung einiger Gauß-Schritte ergibt sich:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1+2t & t+2 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1+t & t+1 \\ 0 & 1-t & t-1 \end{pmatrix} = (t+1)\det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & t-1 \end{pmatrix} \\ &= (t+1)(t-1)\det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (t+1)(t-1)\det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2(t+1)(t-1) \end{aligned}$$

(b) Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante seiner Koeffizientenmatrix verschieden von Null ist. Hier also für $t \notin \{1, -1\}$.

(c) Für $t \notin \{1, -1\}$ ist das homogene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar und hat deswegen die Lösungsmenge $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Für die verbleibenden Fälle lösen wir mittels Gauß-Verfahren. Für $t = 1$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2} Z_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich $\mathcal{L} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$.

Für $t = -1$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 \leftrightarrow Z_3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2} Z_2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich $\mathcal{L} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\, x$

(b) $\int_0^1 \ln(2x) \,\mathrm{d}\, x$

(a) Es ist

$$\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{-1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\beta \to -\infty} [\mathrm{e}^x]_{\beta}^{-1} = \lim_{\beta \to -\infty} \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{\beta} = \mathrm{e}^{-1}.$$

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(2x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\beta \to 0+0} \int_{\beta}^1 \ln(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\beta \to 0+0} \int_{\beta}^1 \ln(2) + \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\beta \to 0+0} \Big[\ln(2)x + x\ln(x) - x \Big]_{\beta}^1 \\
&= \lim_{\beta \to 0+0} (\ln(2) - 1) - (\ln(2)\beta + \beta\ln(\beta) - \beta) \\
&= \ln(2) - 1 - \lim_{\beta \to 0+0} \ln(2)\beta - \lim_{\beta \to 0+0} \beta\ln(\beta) + \lim_{\beta \to 0+0} \beta \\
&= \ln(2) - 1 - \lim_{\beta \to 0+0} \frac{\ln(\beta)}{\beta^{-1}} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \ln(2) - 1 - \lim_{\beta \to 0+0} \frac{\beta^{-1}}{-\beta^{-2}} \\
&= \ln(2) - 1 - \lim_{\beta \to 0+0} (-\beta) \\
&= \ln(2) - 1\ .
\end{aligned}$$

Alternativ kann man zur Berechnung des Integrals $\int_{\beta}^1 \ln(2x)\,\mathrm{d}x$ auch lineare Substitution verwenden und

$$\int_{\beta}^1 \ln(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(2x\ln(2x) - 2x)\right]_{\beta}^1 = \Big[x\ln(2x) - x\Big]_{\beta}^1$$

rechnen.

Aufgabe 5 (*11 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 + 18 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Geben Sie alle auf dem Weg zur euklidischen Normalform verwendeten Koordinatensysteme an und skizzieren Sie die Quadrik und alle in Zwischenschritten verwendeten Koordinatensysteme im Ausgangskoordinatensystem.

Die Gleichung in Matrixschreibweise $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 18 = 0.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$.
Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$.
Der Eigenraum zu λ_1 ist der Lösungsraum $V(\lambda_1)$ des LGS

$$\left[\begin{array}{cc||c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Dieser Lösungsraum wird aufgespannt durch den normierten Eigenvektor $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Einen Eigenvektor v_2 zu λ_2 kann man analog durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 E_2)x = Ax = 0$ bestimmen. (Alternativ kann man verwenden, dass A symmetrisch ist: Somit sind die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 orthogonal.) Man erhält als normierten Eigenvektor $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dies liefert die Transformationsmatrix $F := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (0; v_1, v_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$ hat unsere Quadrik die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\intercal (F^\intercal AF) y + 2(F^\intercal a)^\intercal y + 18 \\ &= y^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)^\intercal y + 18 \\ &= 2y_1^2 + 12y_1 + 4y_2 + 18. \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um den linearen Term in y_1 zu beseitigen:

$$2y_1^2 + 12y_1 + 18 = 2(y_1^2 + 6y_1 + 9) = 2(y_1 + 3)^2.$$

Dies liefert den neuen Ursprung P mit Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und also

$$P = {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

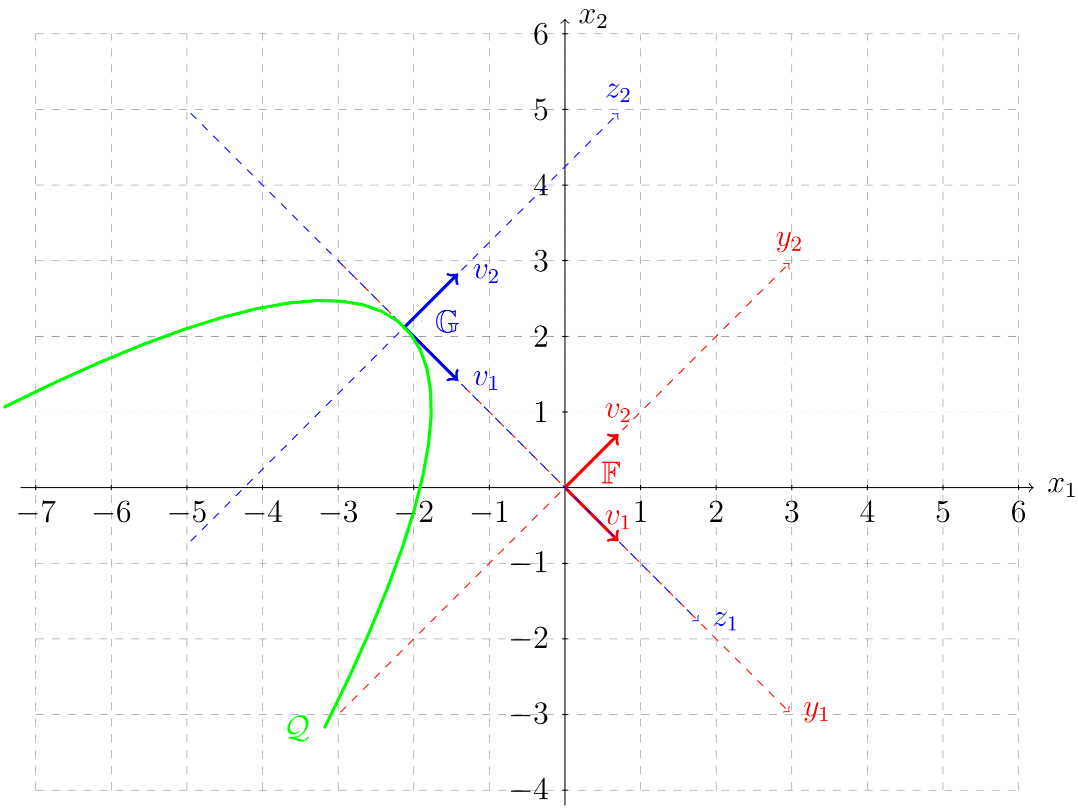
Wir erhalten das neue Koordinatensystem $\mathbb{G} = (P; v_1, v_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right); \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right)$.
In Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ wird die Quadrik beschrieben durch:

$$2z_1^2 + 4z_2 = 0.$$

Durch Multiplikation der Gleichung mit $\frac{1}{2}$ erhalten wir die Gleichung in euklidischer Normalform

$$z_1^2 + 2z_2 = 0.$$

Es handelt sich also um eine Parabel.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

(a) Es ist

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich die Matrix von f bezüglich der Standardbasen E_2 von $\mathbb{R}^2$ und E_3 von $\mathbb{R}^3$ als

$${}_{E_3}f_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) **Alternative 1:** Es ist $\operatorname{Bild}(f) = \left\{ s \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$, also ist f nicht surjektiv, da

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \notin \operatorname{Bild}(f).$$

Es ist f auch nicht injektiv, da $f\left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = f\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Alternative 2: Die lineare Abbildung f ist nicht injektiv, da

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim \left\{ s \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mid s \in \mathbb{R} \right\} = 1 \neq 0.$$

Die Abbildung ist auch nicht surjektiv, da

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq 1 = \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Kern}(f).$$

Alternative 3: Die lineare Abbildung f ist nicht injektiv, weil der Rang $\operatorname{Rg}\left({}_{E_3}f_{E_2}\right) = 1$ kleiner als die Zahl der Spalten ist, und nicht surjektiv, weil der Rang kleiner als die Zahl der Zeilen ist.

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Gegeben sei für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{x_1 x_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Einheitskreises K_1

$$C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat, und geben Sie für diese α ein Potential an.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{K_1} g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\displaystyle\int_{K_1} g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(a) Bestimmung der Rotation:

$$\operatorname{rot} g_\alpha = \frac{\partial\,(g_\alpha)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\,(g_\alpha)_1}{\partial x_2} = \big(\alpha + x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + \mathrm{e}^{x_1 x_2}\big) - \big(-\alpha + x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + \mathrm{e}^{x_1 x_2}\big) = 2\alpha$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist die Existenz eines Potentials äquivalent zu $\operatorname{rot} g_\alpha = 0$. Damit existiert genau dann ein Potential, wenn $\alpha = 0$ ist.

Nun ist für $\alpha = 0$ noch ein Potential zu bestimmen. Es ist $(g_0)_1(x_1, x_2) = x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2}$, also

$$U(x_1, x_2) = \int (g_0)_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\,x_1 = \int x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2}\,\mathrm{d}\,x_1 = \mathrm{e}^{x_1 x_2} + c(x_2).$$

Aus der Bedingung $U_{x_2}(x_1, x_2) = (g_0)_2(x_1, x_2)$ ergibt sich

$$x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + c_{x_2}(x_2) = x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2}$$

und somit $c_{x_2}(x_2) = 0$. Daraus folgt, dass $c(x_2) = C$ konstant ist. Wir erhalten das Potential

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto \mathrm{e}^{x_1 x_2} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

(b) Da K_1 ein geschlossener Weg über ein konservatives Vektorfeld (also eines mit Potential) ist, ergibt sich sofort

$$\int_{K_1} g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0.$$

Es bleibt noch $\int_{K_1} g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ zu berechnen. Dazu wird zuerst C' bestimmt:

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Variante 1 (unter Ausnutzung des Potentials). Es gilt

$$g_1(x_1, x_2) = g_0(x_1, x_2) + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Das lässt sich benutzen, um das zu berechnende Integral zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_{K_1} \left(g_0(x) + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right) \bullet \mathrm{d}\,x = \underbrace{\int_{K_1} g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x}_{=0} + \int_{K_1} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} (\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\,t = 2\pi.
\end{aligned}$$

Variante 2 (direkte Rechnung). Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^{2\pi} g_1\big(C(t)\big) \bullet C'(t) \,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) + \mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} \sin(t) \\ \cos(t) + \mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} \cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin(t))^2 - (\sin(t))^2 \mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} + (\cos(t))^2 + (\cos(t))^2 \mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} \,\mathrm{d}\,t \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\,t}_{=2\pi} + \int_0^{2\pi} \big(\cos(t))^2 - (\sin(t))^2 \big) \mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} \,\mathrm{d}\,t \\
&= 2\pi + \int_0^{2\pi} \big(\cos(t))^2 - (\sin(t))^2 \big) \mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} \,\mathrm{d}\,t \\
&= 2\pi + \int_0^{2\pi} \big(\cos(t)\sin(t) \big)' \mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} \,\mathrm{d}\,t \\
&= 2\pi + \Big[\mathrm{e}^{\cos(t)\sin(t)} \Big]_0^{2\pi} = 2\pi + (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte z_0 und die Konvergenzradien ρ folgender Potenzreihen:

$\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{2^n n^2}$	$z_0 = \mathrm{i}$	$\rho = 2$
$\sum_{n=0}^{\infty} n(1+2\mathrm{i}+z)^n$	$z_0 = -1-2\mathrm{i}$	$\rho = 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n z^{3n}$	$z_0 = 0$	$\rho = \frac{1}{2}$

Aufgabe 9 (*7 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x/2)$. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen von f im Punkt $x_0 = \pi$:

$f'(x_0) = \boxed{-\frac{1}{2}}$, $f''(x_0) = \boxed{0}$, $f'''(x_0) = \boxed{\frac{1}{8}}$.

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 von f im Punkt $x_0 = \pi$.

$$T_3(f, x, x_0) = \boxed{-\frac{1}{2}(x-\pi) + \frac{1}{48}(x-\pi)^3}$$

(b) Sei $D = \left\{ (x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x + y \geqq -1 \right\}$. Gegeben sei die Funktion

$$g : D \to \mathbb{R} : (x,y)^\intercal \mapsto \sqrt{1 + 3x + y}.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von g im Punkt $a = (0,0)^\intercal$:

$$\operatorname{grad} g(a) = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad \mathrm{H}g(a) = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 von g im Punkt $a = (0,0)^\intercal$:

$$T_2(g, (x,y), a) = \boxed{1 + \tfrac{1}{2}(3x + y) - \tfrac{1}{8}(9x^2 + 6xy + y^2)}$$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A.

$$\mathrm{Sp}(A) = \boxed{3}$$

(b) Der Vektor $(1,1,1)^\intercal$ ist ein Eigenvektor von A. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1.

$$\lambda_1 = \boxed{5}$$

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{(\lambda+1)^2(5-\lambda)}$$

(d) Welche weiteren Eigenwerte außer λ_1 hat A?

$$\boxed{-1}$$

Aufgabe 11 (*5 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x+1}{x^3+x}$.

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \boxed{\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}}$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x$.

$$\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right]}$$