Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & \alpha & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ genau eine Lösung?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $A_\alpha^\intercal A_\alpha$ eine Diagonalmatrix?

(a) Das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Matrix A_α ungleich 0 ist. Dabei gilt

$$\det A_\alpha \;=\; 32\alpha + 4 + 0 + 32 + 4\alpha^2 - 0 \;=\; 4(\alpha^2 + 8\alpha + 9) \;=\; 0$$

genau dann, wenn α einen der Werte $\dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 9}}{2} = -4 \pm \sqrt{7}$ annimmt.
Das Gleichungssystem ist also für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4-\sqrt{7}, -4+\sqrt{7}\}$ eindeutig lösbar.

(b) Die Matrix $B = (b_{jk})_{j,k} := A_\alpha^\intercal A_\alpha$ ist genau dann eine Diagonalmatrix, wenn alle Einträge b_{jk} mit $j \neq k$ Null sind. Da B symmetrisch ist, müssen nur b_{12}, b_{13} und b_{23} untersucht werden.

Man erhält
$$\begin{aligned} b_{12} &= \alpha\cdot 1 + 0\cdot 4 - 1\cdot\alpha = 0, \\ b_{13} &= \alpha\cdot 8 - 0\cdot 4 - 1\cdot 8 = 8\alpha - 8 = 8(\alpha-1) \\ \text{und}\quad b_{23} &= 1\cdot 8 - 4\cdot 4 + \alpha\cdot 8 = -8 + 8\alpha = 8(\alpha - 1). \end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ (und keine anderen Werte für α) sind alle drei Einträge gleich Null,
d. h. B ist eine Diagonalmatrix.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ x\mapsto 2x+\mathrm{e}^{3(x-1)}\,.$$

(a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,1)$ an.

(b) Wir betrachten die Umkehrfunktion

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ y\mapsto f^{-1}(y)$$

von f. Geben Sie das Taylorpolynom $T_1(f^{-1},y,3)$ an.

(a) Wir bestimmen zuerst die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2+3\mathrm{e}^{3(x-1)},\\ f''(x) &= 9\mathrm{e}^{3(x-1)}. \end{aligned}$$

Somit folgt $f(1)=3, f'(1)=5$ und $f''(1)=9$. Wir erhalten für das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T_2(f,x,1) &= f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2\\ &= 3+5(x-1)+\frac{9}{2}(x-1)^2\,. \end{aligned}$$

(b) Aus $f(1)=3$ folgt

$$1=f^{-1}(3),$$

da $f^{-1}(f(x))=x$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Weiter gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}f^{-1}(y)\right|_{y=f(x)}=\frac{1}{f'(x)}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $f'(x)\neq 0$. Somit ergibt sich mit

$$(f^{-1})'(3)=(f^{-1})'(f(1))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}f^{-1}(y)\right|_{y=f(1)}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

für das Taylorpolynom:

$$\begin{aligned} T_1(f^{-1},y,3) &= f^{-1}(3)+(f^{-1})'(3)(y-3)\\ &= 1+\frac{1}{5}(y-3)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*11 Punkte*) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$g_{a,b}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} bx_1x_3 + ax_1x_2^2 \\ 8x_1^2x_2 + bx_3 \\ ax_1^2 + 2ax_2 + a\cos(x_3) \end{pmatrix}.$$

(a) Gegeben sei die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C\colon \left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}^3\colon\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K g_{0,1}(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Rotation von $g_{a,b}$.

(c) Für welche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt $g_{a,b}$ ein Potential? Geben Sie für diese Werte ein Potential an.

(a)

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} g_{0,1}(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_{\pi/2}^{\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ 8(\cos(t))^2 + \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} -(\sin(t))^2\cos(t)\,\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1}{3}(\sin(t))^3\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{1}{3}(\sin(\pi/2))^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{J}g_{a,b} = \begin{pmatrix} bx_3 + ax_2^2 & 2ax_1x_2 & bx_1 \\ 16x_1x_2 & 8x_1^2 & b \\ 2ax_1 & 2a & -a\sin(x_3) \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rot} g_{a,b} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ (b-2a)x_1 \\ (16-2a)x_1x_2 \end{pmatrix}$$

(c) Es ist $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend. Also existiert genau dann ein Potential von $g_{a,b}$, wenn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rot} g_{a,b} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ (b-2a)x_1 \\ (16-2a)x_1x_2 \end{pmatrix}$$

ist für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Dies gilt genau dann, wenn $(a,b) = (8, 16)$ ist.

Wegen $\operatorname{grad} U = g$ gilt

$$U(x_1, x_2, x_3) = \int 16x_1x_3 + 8x_1x_2^2 \,\mathrm{d}\, x_1 = 8x_1^2x_3 + 4x_1^2x_2^2 + c_1(x_2, x_3).$$

Damit folgt

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}c_1(x_2, x_3) \stackrel{!}{=} 8x_1^2x_2 + 16x_3\,,$$

weshalb

$$c_1(x_2, x_3) = \int 16x_3 \,\mathrm{d}\, x_2 = 16x_2x_3 + c_2(x_3)$$

ist. Desweiteren gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 16x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}c_2(x_3) \stackrel{!}{=} 8x_1^2 + 16x_2 + 8\cos(x_3),$$

wodurch

$$c_2(x_3) = 8\int \cos(x_3) \,\mathrm{d}\, x_3 = 8\sin(x_3) + c_3$$

folgt. Für $c_3 = 0$ ergibt sich das Potential

$$U(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2x_3 + 4x_1^2x_2^2 + 16x_2x_3 + 8\sin(x_3).$$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Aussage wird durch vollständige Induktion bewiesen.

IA Für $n = 1$ ist $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^1 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IS Die Aussage sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 2 & -1-n \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n+1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d. h. die Aussage ist auch für die $(n+1)$–te Potenz der Matrix wahr.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(1+\mathrm{i})^k$$

konvergiert. Geben Sie deren Wert in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Wir schreiben die Summe um in

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(1+\mathrm{i})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k .$$

Für $q := \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$ gilt

$$|q| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Es handelt sich also um eine konvergente geometrische Reihe, da $|q| < 1$. Der Wert der Reihe ergibt sich durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(1+\mathrm{i})^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}} = \frac{1}{\frac{1-\mathrm{i}}{2}} = \frac{2}{1-\mathrm{i}} \cdot \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{1^2+1^2} = 1+\mathrm{i}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie alle globalen Minimalstellen und globalen Maximalstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3 - y^2$$

unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$.

Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(x,y) = 0$ für $g(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$.

Der Gradient der Funktion f ist $\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2, -2y)^\intercal$, und der Gradient von g ist $\operatorname{grad} g(x,y) = (x, 2y)^\intercal$. Kandidaten für Extremstellen ergeben sich somit als Lösung von

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -2y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(Lagrange-Bedingung)} \\ \frac{x^2}{2} + y^2 - 2 &= 0 && \text{(Nebenbedingung).} \end{aligned}$$

Die Lagrange-Bedingung lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x(3x+\lambda) \\ 2y(-1+\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile folgt $y = 0$ oder $\lambda = 1$.

Fall $y = 0$*:* Setzen wir $y = 0$ in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir $x^2 = 4$ und somit $x = \pm 2$. Dies liefert die kritischen Stellen $P_1 = (2,0)$ und $P_2 = (-2,0)$.

Fall $\lambda = 1$*:* Aus $3x^2 + \lambda x = 0$ folgt $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \lambda}{6}$. Somit ist $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Durch Einsetzen von $x = 0$ in die Nebenbedingung erhalten wir $y = \pm\sqrt{2}$, was die kritischen Stellen $P_3 = (0, \sqrt{2})$ und $P_4 = (0, -\sqrt{2})$ liefert.

Durch Einsetzen von $x = -\frac{1}{3}$ in die Nebenbedingung erhalten wir $y = \pm\frac{1}{6}\sqrt{70}$; dies liefert die kritischen Stellen $P_5 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\sqrt{70})$ und $P_6 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{70})$.

Die Nebenbedingungsmenge $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 = 2\}$, eine Ellipse im $\mathbb{R}^2$, ist kompakt, d. h. die Funktion f nimmt ihr globales Maximum und Minimum auf E an. Die Werte an den kritischen Stellen sind $f(P_1) = 8$, $f(P_2) = -8$, $f(P_3) = f(P_4) = -2$, $f(P_5) = f(P_6) = -\frac{107}{54}$. Deshalb befindet sich in $P_1 = (2,0)$ das globale Maximum und in $P_2 = (-2,0)$ das globale Minimum von f.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Für jeden reellen Parameter t sei die Quadrik Q_t wie folgt gegeben:

$$Q_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 1 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik Q_t in Abhängigkeit von t in der Form $x^\intercal A_t\, x + 2a^\intercal x + c = 0$ an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A_t in Abhängigkeit von t.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik Q_5.

(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik lautet

$$x^\intercal \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^\intercal x + 1 = 0.$$

(b) Das charakteristische Polynom von A_t ist

$$\chi_{A_t}(\lambda) \;=\; \det(A_t - \lambda E) = ((1-\lambda)^2 - t^2)(1-\lambda) \;=\; (1-\lambda+t)(1-\lambda-t)(1-\lambda).$$

Damit sind die Eigenwerte der Matrix A_t gegeben als $\lambda_1 = 1+t$, $\lambda_2 = 1-t$ und $\lambda_3 = 1$.

(c) Der Rang von

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist 3, der Rang der erweiterten Matrix

$$(A_5)_{\mathrm{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ist 4. Daher ist Q_5 eine Mittelpunktsquadrik.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^{\intercal} A F$ eine Diagonalmatrix ist.

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda(1+\lambda)(5-\lambda)$.

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 5$.

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ besitzt die Basis

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ besitzt die Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_3 = 5$ besitzt die Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch Normieren erhält man eine mögliche Matrix F:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Berechnen Sie den Betrag $r \in \mathbb{R}_0^+$ und das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ der komplexen Zahl

$$z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})^4.$$

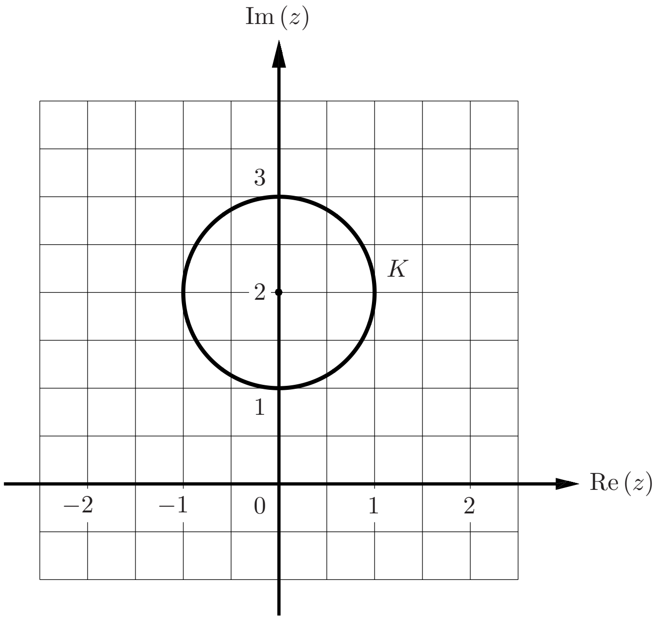
$r = \boxed{16}$, $\varphi = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$

(b) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}$ so, dass der rechts abgebildete Kreis K in der komplexen Zahlenebene durch die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - 4\,\mathrm{Im}(z) = s\}$$

beschrieben wird.

$s = \boxed{-3}$



Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^3$ so, dass folgende Vektoren ein Rechtssystem bilden:

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad w = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}}.$$

Berechnen Sie:

$$|(u+v)\times(u-v)| = \boxed{2}, \qquad \langle u - 3w \,|\, v + 2w\rangle - \langle v \times u \,|\, v \times w\rangle = \boxed{-6}$$

Aufgabe 11 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Folgengrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^4 + 2n^2 + n}{2n + n^3 + 3n^4} = \boxed{\dfrac{8}{3}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{j=3}^{n} \dfrac{\sqrt{j} - \sqrt{j+1}}{\sqrt{j(1+j)}} = \boxed{\dfrac{-1}{\sqrt{3}}}$

Aufgabe 12 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{\cos(\ln(1+\pi x))}{1+\pi x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{\pi}\sin(\ln(1+\pi x))\right]}$$

$$\int (2x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[(2x^2-4x+5)\mathrm{e}^x\right]}$$

(b) Bestimmen Sie nach Polynomdivision die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x^4+2x^3+2}{x^3+2x^2}$:

$$\frac{x^4+2x^3+2}{x^3+2x^2} = \boxed{x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{1}{2x}}$$

Berechnen Sie:

$$\int_1^2 \frac{x^4+2x^3+2}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Aufgabe 13 (*5 Punkte*) Für den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2–Matrizen sind durch

$$B:\quad B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad\text{und}$$

$$C:\quad C_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad C_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad C_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

zwei Basen gegeben. Stellen Sie C_4 bezüglich der Basis B dar.

$$C_4 = \boxed{0}\,B_1 + \boxed{1}\,B_2 + \boxed{(-1)}\,B_3 + \boxed{0}\,B_4\,.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}\colon A\mapsto A+A^{\mathsf{T}}$. Bestimmen Sie:

$${}_B\mathrm{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}}\,,\quad {}_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}}\,,\quad {}_B\varphi_C = \boxed{\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&0\\0&2&0&0\\2&0&-2&0\end{pmatrix}}$$

$$\dim(\mathrm{Bild}\,(\varphi)) = \boxed{3}$$