Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 7 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 16.10.2017 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **23.10.2017** bis **25.10.2017** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*8 Punkte*)

(a) Seien $A, D, T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei T invertierbar und es gelte $T^{-1}AT = D$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $A^n = TD^nT^{-1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch T^{-1} an.

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Eine reelle 4×4-Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze den komplexen Eigenwert $\lambda_1 = 3 + \mathrm{i}\sqrt{2}$, habe den Rang 3 und die Spur $\sqrt{7}$. Geben Sie alle Eigenwerte von A an.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung durch für

$$\frac{15x^2 - 24x + 52}{x^4 - 16}.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Aufgabe 5 (*14 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x - x^2 - y^2 - x^3 + x^2y^2 \\ &= (1 - x^2)\cdot(1 + x - y^2). \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f nur positive Werte annimmt, mit einem “+” und diejenigen Bereiche, in denen f nur negative Werte annimmt, mit einem “$-$”.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Orthonormalbasis $B\colon b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $b_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Weiter bezeichne E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

Für die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gelte $\varphi(b_1) = -b_1$, $\varphi(b_2) = b_2$ und $\varphi(b_3) = -b_3$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_B\varphi_B$ von φ bezüglich B.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

(c) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_E\varphi_E$ von φ bezüglich E.

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

(a) Geben Sie $\mathrm{e}^{\frac{13}{6}\pi\mathrm{i}}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

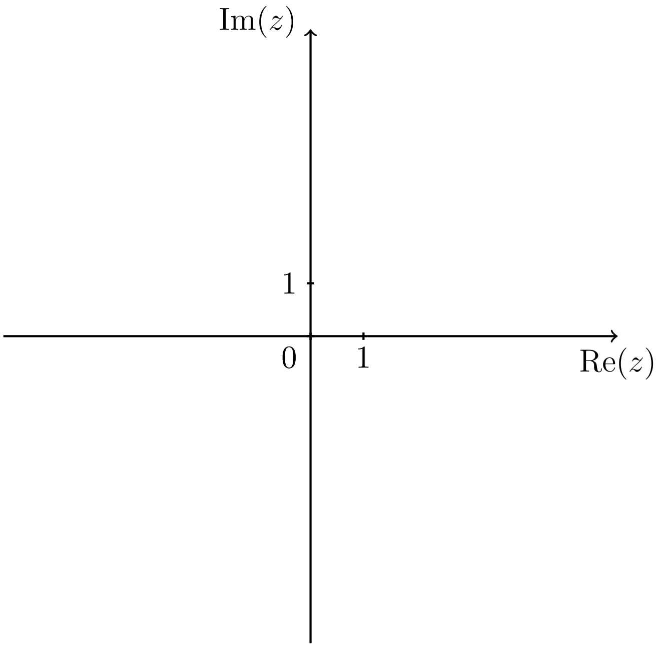
(b) Bestimmen Sie den Betrag sowie den Imäginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{10\mathrm{e}^{\frac{13}{6}\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{i} - 2}$.

$$|z| = \qquad , \qquad \operatorname{Im} z = \qquad .$$

(c) Es sei $M := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg(z^3) = \frac{\pi}{2}\}$. Weiter sei $z \in M$.

Geben Sie alle Werte aus $[0, 2\pi)$ an, die $\arg(z)$ annehmen kann:

Skizzieren Sie die Menge M im unten vorgezeichneten Koordinatensystem.



Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 5^{n-2}}{3 + 5^{n+1}} =$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 3^n} =$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2} =$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\mathrm{e}^{7x} - 1} =$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Gegeben seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Orthonormalbasis u_1, u_2, u_3 von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ so an, dass $\mathrm{L}(v_1) = \mathrm{L}(u_1)$ und $\mathrm{L}(v_1, v_2) = \mathrm{L}(u_1, u_2)$ sind.

$$u_1 = \boxed{}, \quad u_2 = \boxed{}, \quad u_3 = \boxed{}.$$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

(a) Geben Sie eine Stammfunktion F von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\mathrm{e}^{\sin(x)} \cos(x)$ an.

$$F(x) = \boxed{}$$

(b) Gegeben sei die Parametrisierung $C\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ der Kurve K mit

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3t \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $C'(t)$, $|C'(t)|$ sowie die Länge $L(K)$ von K:

$$C'(t) = \boxed{}, \quad |C'(t)| = \boxed{}, \quad L(K) = \boxed{}.$$

Aufgabe 11 (*2 Punkte*) Berechnen Sie den folgenden Reihenwert: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} + n!}{4^n \cdot n!} = \boxed{}$.
