Aufgabe 1 (*8 Punkte*)

(a) Seien $A, D, T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei T invertierbar und es gelte $T^{-1}AT = D$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $A^n = TD^nT^{-1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch T^{-1} an.

(a)
- Induktionsanfang: Es ist $TD^1T^{-1} = TDT^{-1} = TT^{-1}ATT^{-1} = A$.
- Induktionsschluss $n \rightsquigarrow n+1$: Es ist

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A \overset{\text{I.V.}}{=} TD^nT^{-1} \cdot A \overset{\text{I.A.}}{=} TD^nT^{-1} \cdot TDT^{-1} \\ &= TD^n \cdot DT^{-1} = TD^{n+1}T^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda) \cdot ((3-\lambda)^2 - 1) \\ &= (4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (4-\lambda)^2(2-\lambda). \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$.

Wir bestimmen nun die zugehörigen Eigenräume:

- Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$:
  Es ergibt sich der Eigenraum
  $$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
- Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:
  Es ergibt sich der Eigenraum
  $$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Damit ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gegeben, die wir als Spalten in folgende Matrix T eintragen:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix.

Die Inverse ist in diesem Fall

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Eine reelle 4×4-Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze den komplexen Eigenwert $\lambda_1 = 3 + \mathrm{i}\sqrt{2}$, habe den Rang 3 und die Spur $\sqrt{7}$. Geben Sie alle Eigenwerte von A an.

- Da die Matrix reell ist, treten komplexe Eigenwerte mit nichtverschwindendem Imaginärteil als komplex konjugierte Paare auf. Daher ist ein weiterer Eigenwert von A gegeben durch $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
- Die Matrix hat nicht den vollen Rang. Daher ist $\det(A) = 0$. Somit besitzt A einen Eigenwert $\lambda_3 = 0$.
- Als 4×4-Matrix besitzt A vier Eigenwerte (Vielfachheiten mitgerechnet). Die Spur einer Matrix ist die Summe der Eigenwerte. Es gilt daher

$$\begin{aligned}\sqrt{7} &= \operatorname{Sp} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ &= 3 + \mathrm{i}\sqrt{2} + 3 - \mathrm{i}\sqrt{2} + 0 + \lambda_4.\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda_4 = \sqrt{7} - 6$.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung durch für

$$\frac{15x^2 - 24x + 52}{x^4 - 16}.$$

Zunächst einmal faktorisieren wir das Nennerpolynom mit Hilfe der dritten binomischen Formel:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x^2 + 4) \cdot (x + 2)(x - 2).$$

Damit ist ein Ansatz für eine reelle Partialbruchzerlegung gegeben durch

$$\frac{15x^2 - 24x + 52}{x^4 - 16} \stackrel{!}{=} \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x - 2}.$$

Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner und Kürzen führt auf

$$\begin{aligned} 15x^2 - 24x + 52 &\stackrel{!}{=} (Ax + B)(x + 2)(x - 2) + C(x^2 + 4)(x - 2) + D(x^2 + 4)(x + 2) \\ &= (A + C + D)x^3 + (B - 2C + 2D)x^2 + (-4A + 4C + 4D)x + (-4B - 8C + 8D). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das LGS

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 15 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & -24 \\ 0 & -4 & -8 & 8 & 52 \end{array}\right],$$

welches auf die Lösung $A = 3,\ B = 1,\ C = -5$ und $D = 2$ führt. Die reelle Partialbruchzerlegung ist damit gegeben durch

$$\frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{x + 2} + \frac{2}{x - 2}.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^n .$$

Wir schreiben kurz $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}}$. Zunächst einmal bestimmen wir den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2,$$

so dass $\rho = \frac{1}{2}$ ist.

Damit ist klar, dass die Reihe absolut konvergiert für alle $x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (0,1)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.

Zu untersuchen ist nun noch das Konvergenzverhalten der Reihe in den Randpunkten $x = 0$ bzw. $x = 1$:

- Sei $x = 0$. Dann wird die Potenzreihe zu

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

  Da diese Reihe alternierend ist und zudem die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend gegen Null konvergiert, konvergiert die Potenzreihe im Punkt $x = 0$ nach dem Leibnizkriterium.

- Sei $x = 1$. Dann wird die Potenzreihe zu

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

  Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{n}$ ist, und da bekannt ist, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, ist die Potenzreihe für $x = 1$ nach dem Minorantenkriterium divergent.

Insgesamt ergibt sich, dass die Potenzreihe genau dann konvergiert, wenn $x \in [0,1)$ ist.

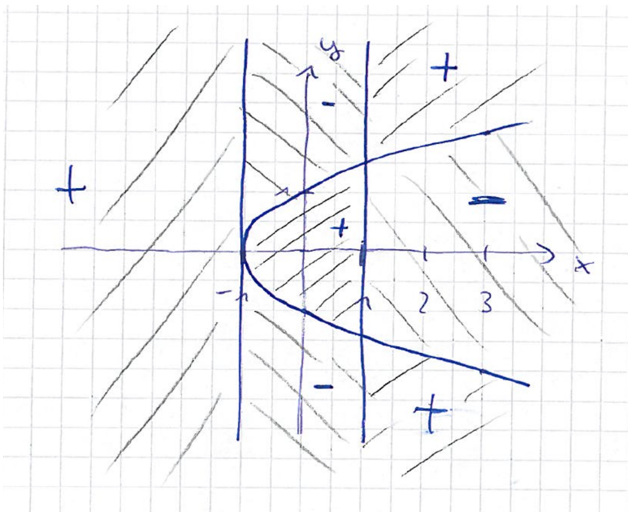
Aufgabe 5 (*14 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x - x^2 - y^2 - x^3 + x^2y^2 \\ &= (1-x^2)\cdot(1+x-y^2). \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f nur positive Werte annimmt, mit einem "+" und diejenigen Bereiche, in denen f nur negative Werte annimmt, mit einem "−".

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

(a) Die gesuchte Niveaumenge ist die Vereinigung einer nach rechts geöffneten und um 1 nach links verschobenen Normalparabel, deren Symmetrieachse die x-Achse ist, sowie der senkrechten Geraden $x = -1$ und $x = 1$.



(b) Wir bestimmen zunächst die kritischen Stellen von f. Es ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - 3x^2 + 2xy^2 \\ 2x^2y - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - 3x^2 + 2xy^2 \\ 2y(x^2-1) \end{pmatrix}.$$

Die zweite Komponente wird genau dann gleich Null, wenn $y = 0$ oder $x \in \{-1, 1\}$ ist.

- Falls $y = 0$, so wird die erste Komponente genau dann gleich Null, wenn $1 - 2x - 3x^2 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_2 = \frac{1}{3}$. Damit ergeben sich die kritischen Stellen
$$S_1 = (-1, 0), \quad S_2 = \left(\tfrac{1}{3}, 0\right).$$
- Falls $x = -1$, so ist die erste Komponente genau dann gleich Null, wenn $-2y^2 = 0$ ist, also wenn $y = 0$ ist. Es ergibt sich in diesem Fall die bereits oben gefundene kritische Stelle S_1.

- Falls $x = 1$, so ist die erste Komponente genau dann gleich Null, wenn $-4 + 2y^2 = 0$ ist, also wenn $y \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ist. Damit ergeben sich die beiden kritischen Stellen

$$S_3 = \left(1, -\sqrt{2}\right), \quad S_4 = \left(1, \sqrt{2}\right).$$

Zur Klassifikation der kritischen Stellen betrachen wir die Hessematrix von f:

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 - 6x + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist damit

$$\mathrm{H}f(S_1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}f(S_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{9} \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{H}f(S_3) = \begin{pmatrix} -4 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}f(S_4) = \begin{pmatrix} -4 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mathrm{H}f(S_2)$ negativ definit, so dass S_2 die Stelle eines lokalen Maximums sein muss.

Da die Determinante von $\mathrm{H}f(S_3)$ negativ ist, ist die Hessematrix an dieser Stelle indefinit, so dass wir bei S_3 einen Sattelpunkt vorliegen haben.

Da die Determinante von $\mathrm{H}f(S_4)$ negativ ist, ist die Hessematrix an dieser Stelle indefinit, so dass wir bei S_4 einen Sattelpunkt vorliegen haben.

Um $S_1 = (-1, 0)$ treten in der Vorzeichenverteilung aus **(a)** sowohl negative als auch positive Funktionswerte auf. Somit liegt bei S_1 ein Sattelpunkt vor.

(Die Hessematrix von $\mathrm{H}f(S_1)$ ist nicht indefinit und kann nicht zur Entscheidung herangezogen werden.)

Alternative: Die Klassifikation der kritischen Stellen kann auch ganz ohne Kenntnis der Hessematrix geschehen, indem wir die Vorzeichenverteilung aus **(a)** verwenden.

Dass bei S_1 ein Sattelpunkt vorliegt, wird diskutiert wie oben.

Ebenso argumentiert man, dass bei S_3 und S_4 Sattelpunkte vorliegen.

Sei M diejenige Menge, die von der Parabel und der Geraden $x = 1$ eingeschlossen wird. Da f stetig und M kompakt ist, nimmt f auf M ein Maximum an. Da f auf dem Rand von M gleich Null ist und sonst positiv, muss das Maximum im Innern von M angenommen werden. Damit muss die Stelle des Maximums eine kritische Stelle sein. Da S_2 die einzige kritische Stelle in M ist, liegt damit bei S_2 ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Orthonormalbasis $B\colon\ b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $b_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Weiter bezeichne E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

Für die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gelte $\varphi(b_1) = -b_1$, $\varphi(b_2) = b_2$ und $\varphi(b_3) = -b_3$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_B\varphi_B$ von φ bezüglich B.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

(c) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_E\varphi_E$ von φ bezüglich E.

(a) Es ist

$$ {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. $$

(b) Es ist

$$ {}_E\mathrm{id}_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad {}_B\mathrm{id}_E = \left({}_E\mathrm{id}_B\right)^{\mathsf{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}. $$

(c) Es ist

$$ {}_E\varphi_E = {}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_B\varphi_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -4\\ 4 & -4 & -7\end{pmatrix}. $$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

(a) Geben Sie $e^{\frac{13}{6}\pi i}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an. $\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i}$

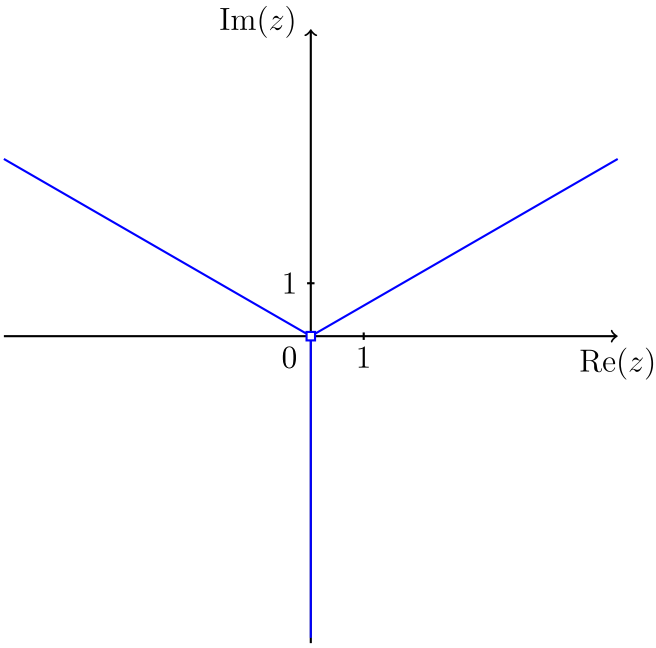
(b) Bestimmen Sie den Betrag sowie den Imäginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{10e^{\frac{13}{6}\pi i}}{i - 2}$.

$$|z| = \boxed{2\sqrt{5}}, \quad \operatorname{Im} z = \boxed{-2 - \sqrt{3}}.$$

(c) Es sei $M := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg(z^3) = \frac{\pi}{2}\}$. Weiter sei $z \in M$.

Geben Sie alle Werte aus $[0, 2\pi)$ an, die $\arg(z)$ annehmen kann: $\boxed{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi}$

Skizzieren Sie die Menge M im unten vorgezeichneten Koordinatensystem.



Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 5^{n-2}}{3 + 5^{n+1}} = \boxed{-\frac{1}{125}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 3^n} = \boxed{6}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n/2} = \boxed{\sqrt{e}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{e^{7x} - 1} = \boxed{\frac{4}{7}}$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Gegeben seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Orthonormalbasis u_1, u_2, u_3 von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ so an, dass $\mathrm{L}(v_1) = \mathrm{L}(u_1)$ und $\mathrm{L}(v_1, v_2) = \mathrm{L}(u_1, u_2)$ sind.

$$u_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad u_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad u_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

(a) Geben Sie eine Stammfunktion F von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\mathrm{e}^{\sin(x)} \cos(x)$ an.

$$F(x) = \boxed{2\mathrm{e}^{\sin(x)}}$$

(b) Gegeben sei die Parametrisierung $C\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ der Kurve K mit

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3t \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $C'(t)$, $|C'(t)|$ sowie die Länge $L(K)$ von K:

$$C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 3 \\ \cos(t) \end{pmatrix}}, \quad |C'(t)| = \boxed{\sqrt{10}}, \quad L(K) = \boxed{\pi\sqrt{10}}.$$

Aufgabe 11 (*2 Punkte*) Berechnen Sie den folgenden Reihenwert: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} + n!}{4^n \cdot n!} = \boxed{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3/4} + \frac{4}{3}}.$
