Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 6 – 9** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 20.11.2017 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen am **24.11.2017** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung durch für

$$\frac{x^3+2}{x(x^2+1)^2} \,.$$

Aufgabe 2 (*14 Punkte*) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2-x)(x^2+y^2-1) \,.$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f nur positive Werte annimmt, mit einem "$+$" und die Bereiche, in denen f nur negative Werte annimmt, mit einem "$-$".

(b) Zeigen Sie die Ungleichungen $4 < \sqrt{17} < 5$.

(c) Berechnen Sie $\nabla f\,(1,0)$.

(d) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

(a) Sei $t \in [5, +\infty)$ ein Parameter. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_5^t \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

(b) Ermitteln Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$ konvergiert.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)
Sei $\delta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$ die Drehung mit $\delta\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und mit $\delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix A.

(b) Bestimmen Sie die Drehachse von δ. Bestimmen Sie den Cosinus des Drehwinkels von δ.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B : b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass die Gerade $\mathrm{L}\,(b_1)$ die Drehachse von δ ist.

(d) Bestimmen Sie die Matrix ${}_B\delta_B$ für die Orthonormalbasis B aus **(c)**.

Aufgabe 5 (*12 Punkte*)

Seien $\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ Koordinatensysteme von $\mathbb{R}^2$.

Bezüglich $\mathbb{E}$ heißen die Koordinaten x_1, x_2. Bezüglich $\mathbb{F}$ heißen die Koordinaten y_1, y_2.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto 4x_1^2 + x_2^2$. Sei die Quadrik Q bezüglich $\mathbb{E}$ beschrieben durch

$$Q\colon 4x_1^2 + x_2^2 = 16\ ,$$

also als Niveaumenge von f zum Niveau 16.

(a) Zeichnen Sie $\mathbb{F}$ und Q in das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ ein.

(b) Sei P der Punkt mit ${}_{\mathbb{E}}P = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Liegt der Punkt P auf der Quadrik Q ?

(c) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f\,(x_1, x_2)$.

(d) Sei g die Tangente an die Quadrik Q durch den Punkt P aus **(b)**.
Berechnen Sie einen Richtungsvektor von g.
Zeichnen Sie P und g in die Zeichnung aus **(a)** ein.

(e) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(f) Geben Sie eine Beschreibung der Quadrik Q bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studiengang:**

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie folgende Reihenwerte.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} = \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\pi^2}{16}\right)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} =$$

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie: $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t/3}) =$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $\left(2\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/3})\right)_{k\in\mathbb{N}}$:

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Seien $u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $R : u, v, w$ ein Rechtssystem ist: $w =$

(b) Berechnen Sie $u \times w =$.

(c) Berechnen Sie $(u \times (u + w)) \times w =$ und $u \times ((u + w) \times w) =$.

(d) Sei D das Dreieck, dessen Ecken die Ortsvektoren u, v und $3u + v$ haben.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von D :

(e) Bestimmen Sie die Anzahl der Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$,

für welche $B : u, v, x$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist:

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Wir betrachten das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Die geschlossene Kurve K werde durch $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ parametrisiert.

Bestimmen Sie $C'(t) =$ $\boxed{}$ und $\int 2(\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t =$ $\boxed{}$.

Berechnen Sie den Ausfluss von g durch K : $A(g, K) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Bestimmen Sie die Spur: $\mathrm{Sp}(A_t) =$ $\boxed{}$

Bestimmen Sie die Determinante: $\det(A_t) =$ $\boxed{}$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom: $\chi_{A_t}(\lambda) =$ $\boxed{}$

Für welche Werte von t ist A_t invertierbar? $\boxed{}$

Für welche Werte von t ist A_t positiv definit? $\boxed{}$
