Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionengrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{14n^3-19}{2(n+1)(5n-4)^2}$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2+2n})$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(x+1))}{\sinh(2x)}$

(a) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{14n^3-19}{2(n+1)(5n-4)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^3-19}{50n^3-30n^2-48n+32} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25},$$

da Zählergrad und Nennergrad gleich sind.

(b) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2+2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(n^2+2n)}{n+\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{n+\sqrt{n^2+2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \frac{-2}{1+\sqrt{1}} = -1,$$

wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion.

(c) Zähler und Nenner sind durch differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $(-1,+\infty)$ gegeben (das sehen wir an der Berechnung der Ableitungen, die gleich verwendet werden). Beide streben für $x\to 0$ gegen 0; es liegt also ein Problem der Form „$\frac{0}{0}$" vor.

Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(x+1))}{\sinh(2x)} \overset{„\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\ln(x+1))\cdot\frac{1}{x+1}}{2\cosh(2x)} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{k-1}{(k+1)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Induktionsanfang **IA** Es ist

  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1} 2^k \frac{k-1}{(k+1)!} &= 1 \cdot \frac{-1}{1!} + 2 \cdot \frac{0}{2!} = -1, \\ 1 - \frac{2^{1+1}}{(1+1)!} &= 1 - \frac{4}{2} = -1. \end{aligned}$$

  Damit ist die Behauptung für $n = 1$ wahr.

- Induktionsschluss **IS** $n \rightsquigarrow n+1$. Induktionshypothese **IH** Angenommen, die Behauptung sei wahr für n.
  Dann ist

  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 2^k \frac{k-1}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{k-1}{(k+1)!} + 2^{n+1} \frac{n}{(n+2)!} \\ &= 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + 2^{n+1} \frac{n}{(n+2)!} \\ &= 1 - \frac{2^{n+1}(n+2)}{(n+2)!} + \frac{2^{n+1} n}{(n+2)!} \\ &= 1 + \frac{2^{n+1}(-n-2+n)}{(n+2)!} \\ &= 1 - \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n/2}}{\ln(n+1)}(z-2+\mathrm{i})^n.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ sowie den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ der Reihe.

(b) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für die folgenden Werte von $z \in \mathbb{C}$:

(i) $2 - \frac{5}{4}\mathrm{i}$ (ii) $4 - 3\mathrm{i}$ (iii) $2 - \frac{1}{\sqrt{5}} - \mathrm{i}$

(a) Wir lesen sofort ab, dass $z_0 = 2 - \mathrm{i}$.

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{\frac{n+1}{2}}}{\ln(n+2)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{5^{n/2}} \right| = \sqrt{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \sqrt{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}$$
$$= \sqrt{5} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}}_{=1} = \sqrt{5}$$

Alternative: Es ist

$$\sqrt[n]{\left| \frac{5^{n/2}}{\ln(n+1)} \right|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{5},$$

denn $1 \leqq \sqrt[n]{\ln(3)} \leqq \sqrt[n]{\ln(n+1)} \leqq \sqrt[n]{n}$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, sodass nach dem Sandwichsatz gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n+1)} = 1$.

Damit ergibt sich $\rho = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(b) (i) Wir betrachten den Abstand von $z_1 = 2 - \frac{5}{4}\mathrm{i}$ zum Entwicklungspunkt z_0 und erhalten

$$\left|2 - \frac{5}{4}\mathrm{i} - 2 + \mathrm{i}\right| = \left|-\frac{1}{4}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{5}} = \rho.$$

Damit liegt z_1 innerhalb des Konvergenzkreises der Potenzreihe, sodass die Reihe dort (absolut) konvergiert.

(ii) Wir betrachten den Abstand von $z_2 = 4 - 3\mathrm{i}$ von z_0 und erhalten

$$|4 - 3\mathrm{i} - 2 + \mathrm{i}| = |2 - 2\mathrm{i}| = 2\sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{5}} = \rho.$$

Damit liegt z_2 außerhalb des Konvergenzkreises der Potenzreihe, sodass die Reihe dort divergiert.

(iii) Wir setzen $z_3 = 2 - \frac{1}{\sqrt{5}} - \mathrm{i}$ in die Potenzreihe ein und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n/2}}{\ln(n+1)} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{\ln(n+1)}}_{=:a_n} .$$

Da die Reihe alterniert und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Potenzreihe in z_3 nach dem Leibnizkriterium.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int 6x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

(a) Wir sehen, dass der Integrand von der Form $\frac{f'}{f}$ ist mit $f(x) = x^2 - 1$. Damit erhalten wir sofort

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x^2-1|\right].$$

Alternative: Wir führen eine Partialbruchzerlegung für den Integranden durch und erhalten nach leichter Rechnung

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Damit ist

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln|x-1| + \ln|x+1|]$$

(b) Wir führen die Substitution $y = x^2$ durch und erhalten mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$

$$\begin{aligned}\int 6x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int \underset{\downarrow}{3y}\,\underset{\uparrow}{\sin(y)}\ \mathrm{d}y\\ &= [-3y\cos(y)] + \int 3\cos(y)\,\mathrm{d}y\\ &= [3\sin(y) - 3y\cos(y)]\\ &\overset{\text{Rücksubst.}}{=} \left[3\sin(x^2) - 3x^2\cos(x^2)\right].\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Gegeben sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{x-3y}}{y}$.

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur zweiten Ordnung.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $(0,1)$ an.

(c) Besitzt f im Punkt $(0,1)$ ein lokales Minimum?

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\mathrm{e}^{x-3y}}{y} = f(x,y),\\
f_y(x,y) &= \frac{-3\mathrm{e}^{x-3y}y - \mathrm{e}^{x-3y}}{y^2} = -\mathrm{e}^{x-3y}\left(\frac{3}{y} + \frac{1}{y^2}\right),\\
f_{xx}(x,y) &= f_x(x,y) = f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{x-3y}}{y},\ f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_y(x,y) = -\mathrm{e}^{x-3y}\left(\frac{3}{y} + \frac{1}{y^2}\right),\\
f_{yy}(x,y) &= 3\mathrm{e}^{x-3y}\left(\frac{3}{y} + \frac{1}{y^2}\right) - \mathrm{e}^{x-3y}\left(-\frac{3}{y^2} - \frac{2}{y^3}\right) = \mathrm{e}^{x-3y}\left(\frac{9}{y} + \frac{6}{y^2} + \frac{2}{y^3}\right).
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
T_2(f,(x,y),(0,1)) &= \mathrm{e}^{-3} + \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-3} & -4\mathrm{e}^{-3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-3} & -4\mathrm{e}^{-3}\\ -4\mathrm{e}^{-3} & 17\mathrm{e}^{-3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{-3} + \mathrm{e}^{-3}x - 4\mathrm{e}^{-3}(y-1) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3}x^2 - 4\mathrm{e}^{-3}x(y-1) + \frac{17}{2}\mathrm{e}^{-3}(y-1)^2.
\end{aligned}$$

(c) Es ist $\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-3}\\ -4\mathrm{e}^{-3}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Damit hat f in $(0,1)$ keinen kritischen Punkt, weswegen dort auch kein Minimum vorliegen kann.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Es bezeichne $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ den komplexen Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad höchstens zwei. Gegeben sei die lineare Abbildung $f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}\colon p(z) \mapsto p(z-\mathrm{i})$, sowie die Basis $Q\colon q_1, q_2, q_3$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ mit $q_1(z) = 1$, $q_2(z) = z$ und $q_3(z) = z^2$.

(a) Bestimmen Sie die inverse Abbildung $f^{-1}\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ zu f.

(b) Berechnen Sie die Matrizen ${}_Qf_Q$ und ${}_Q(f^{-1})_Q$.

(a) Die inverse Abbildung $f^{-1}\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ zu f ist gegeben durch $p(z) \mapsto p(z+\mathrm{i})$.

In der Tat gelten für beliebiges $p \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$(f^{-1} \circ f)(p(z)) = f^{-1}(p(z-\mathrm{i})) = p(z-\mathrm{i}+\mathrm{i}) = p(z)$$

und

$$(f \circ f^{-1})(p(z)) = f(p(z+\mathrm{i})) = p(z+\mathrm{i}-\mathrm{i}) = p(z).$$

(b) Wir bestimmen zunächst

$$\begin{aligned}
f(q_1(z)) &= q_1(z-\mathrm{i}) = 1 = q_1(z)\\
f(q_2(z)) &= q_2(z-\mathrm{i}) = z-\mathrm{i} = q_2(z) - \mathrm{i}q_1(z)\\
f(q_3(z)) &= q_3(z-\mathrm{i}) = z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 = q_3(z) - 2\mathrm{i}q_2(z) - q_1(z),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
f^{-1}(q_1(z)) &= q_1(z+\mathrm{i}) = 1 = q_1(z)\\
f^{-1}(q_2(z)) &= q_2(z+\mathrm{i}) = z+\mathrm{i} = q_2(z) + \mathrm{i}q_1(z)\\
f^{-1}(q_3(z)) &= q_3(z+\mathrm{i}) = z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 = q_3(z) + 2\mathrm{i}q_2(z) - q_1(z),
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich die Matrizen

$${}_Qf_Q = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad {}_Q(f^{-1})_Q = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Die Ellipse $\mathcal{Q}$ sei bestimmt durch die Gleichung

$$13x_1^2 + 13x_2^2 - 10x_1x_2 = 144.$$

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und einen Skalar $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A \; x + 2b^\intercal x + c = 0\}.$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie die Halbachsenlängen von $\mathcal{Q}$.

(d) Skizzieren Sie die Ellipse $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem.

(a) Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = -144$.

(b) Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 \stackrel{!}{=} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (13-\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 26\lambda + 144 = (\lambda - 8)(\lambda - 18).$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 18$.
Als Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren zu A bestimmen wir zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Durch normieren erhalten wir daraus das kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F}\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich $\mathbb{F}$ wird die Ellipse $\mathcal{Q}$ nun durch die Gleichung $8z_1^2 + 18z_2^2 - 144 = 0$ beschrieben. Als euklidische Normalform erhalten wir somit

$$-\frac{1}{18}z_1^2 - \frac{1}{8}z_2^2 + 1 = 0.$$

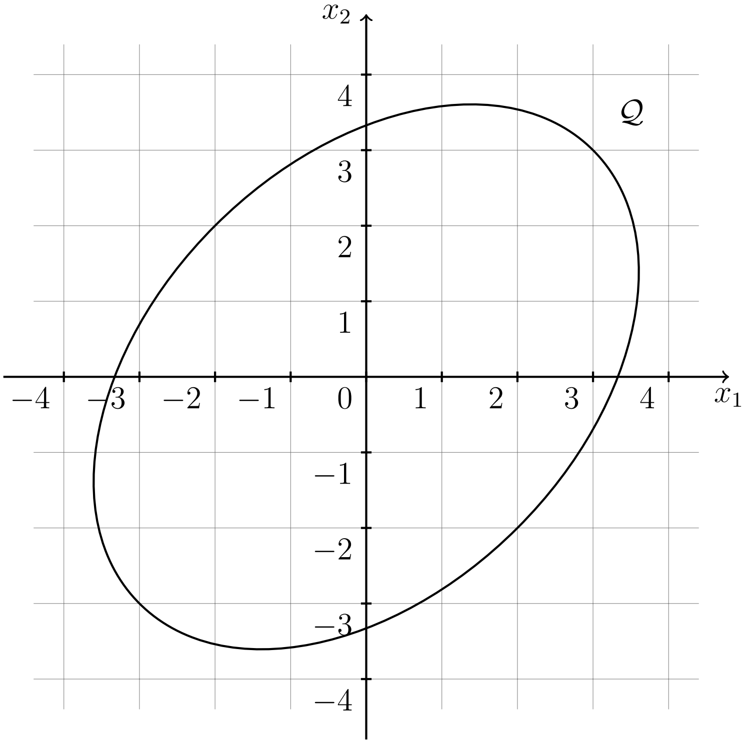
(c) Die euklidische Normalform einer Ellipse mit Halbachsenlängen h_1 und h_2 lautet

$$-\frac{z_1^2}{h_1^2} - \frac{z_2^2}{h_2^2} + 1 = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der euklidischen Normalform von $\mathcal{Q}$ liefert

$$h_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad h_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

(d) Insgesamt ergibt sich die folgende Skizze:



Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Spur der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

(b) Geben Sie den Rang der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

(c) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das obige Gleichungssystem keine Lösung?

(d) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem eine Lösung der Form $x = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$?

(a) Die Spur der Matrix A_α ist die Summe der Hauptdiagonalelemente. Die Spur der Matrix A_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist also gleich 4 .

(b) Der Rang von A_α ist der Spaltenrang. Die zweiten Zeile und die dritte Zeile von A_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig. Also ist $\operatorname{Rg}(A_\alpha) \geqq 2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Daher gilt, dass $\operatorname{Rg}(A_\alpha) = 2$ wenn A_α singulär ist. Die Matrix A_α ist singulär, wenn $0 = \det(A_\alpha) = 7 + 3\alpha$.

Zusammengefasst ist

$$\operatorname{Rg}(A_\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{wenn } \alpha = -\frac{7}{3}, \\ 3 & \text{wenn } \alpha \neq -\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Alternativ: Um den Rang von A_α zu bestimmen, kann man den Gauß-Algorithmus benutzen: Durch Zeilenumformungen vereinfacht man sie zu

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & \alpha+1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\alpha+7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Also erhalten wir

$$\operatorname{Rg}(A_\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{wenn } \alpha = -\frac{7}{3}, \\ 3 & \text{wenn } \alpha \neq -\frac{7}{3}. \end{cases}$$

(c) Aus **(b)** erhält man, dass für $\alpha \neq -\dfrac{7}{3}$ das obige Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt. Wir betrachten die erweiterte Matrix

$$[A_{-\frac{7}{3}}||b] = \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Durch Zeilenumformungen vereinfacht man sie zu

$$[A_{-\frac{7}{3}}||b] = \left[\begin{array}{ccc||c} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

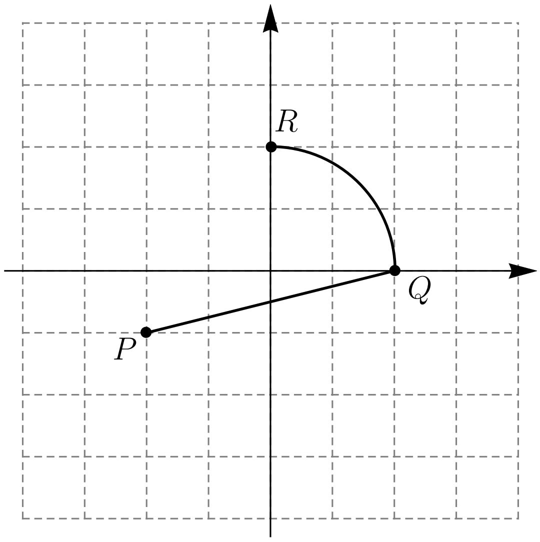
Also besitzt das obige Gleichungssystem keine Lösung für $\alpha = -\dfrac{7}{3}$.

(d) Im Fall $x = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$, folgt aus der zweiten Zeile von $[A_\alpha||b]$, dass $\mu = -x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Aus die erste Zeile folgt, dass $\alpha = -2$ sein muss. Einsetzen in die dritten Zeile ergibt auch keinen Widerspruch, also ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung für $\alpha = -2$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 9 (*8 Punkte*) Es sei K die Kurve, die aus der Strecke von $P = (-2,-1)$ nach $Q = (2,0)$ und der Viertelkreislinie von Q nach $R = (0,2)$ besteht. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.



(a) Geben Sie eine Parametrisierung C_1 der Strecke von P nach Q sowie eine Parametrisierung C_2 der Viertelkreislinie von Q nach R an.

$$C_1 \colon \boxed{[0,1]} \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -2+4t \\ -1+t \end{pmatrix}}, \qquad C_2 \colon \boxed{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}}.$$

(b) Geben Sie $C_1'(t)$ und $C_2'(t)$ an. $C_1'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $C_2'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}}$.

(c) Bestimmen Sie $\int_K f(s)\,\mathrm{d}s = \boxed{\frac{5}{6}\sqrt{17} + 2\pi}$

(d) Bestimmen Sie ein Potential von ∇f. $\boxed{f}$

(e) Bestimmen Sie $\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie jeweils zugehörige Eigenvektoren an.

$$\lambda_1 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie Matrizen $T, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so an, dass D Diagonalgestalt besitzt und $TDT^{-1} = A$ gilt.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11 (*8 Punkte*) Für $\alpha, z \in \mathbb{C}$ sei $A_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} \alpha & z & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) Entscheiden Sie, für welche Paare $(\alpha, z) \in \mathbb{C}^2$ die Matrix $A_{\alpha,z}^\intercal A_{\alpha,z}$ diagonal ist.

$$(0, z), \quad z \in \mathbb{C}$$

(b) Berechnen Sie $\det(A_{\alpha,z})$.

$$\det(A_{\alpha,z}) = \alpha^3 + z$$

(c) Bestimmen Sie für $z = -1 + \mathrm{i}$ den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

$$|z| = \sqrt{2}; \qquad \varphi = \tfrac{3}{4}\pi$$

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $A_{\alpha,1-\mathrm{i}}$ singulär? Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

$$\alpha \in \{2^{\frac{1}{6}}(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{4})),\ 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\tfrac{11}{12}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{11}{12}\pi)),\ 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\tfrac{19}{12}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{19}{12}\pi))\}$$

(e) Skizzieren Sie die Menge $M = \{\alpha \in \mathbb{C} : \det(A_{\alpha,0}) \in \mathbb{R}_0^+\} \cap \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\alpha) \leqq 0\}$.