Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für $j \in \{1,2\}$ jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}_j$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b_j$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens bestimmen wir die Lösungsmengen beider Gleichungssysteme gleichzeitig:

$$\left[\begin{array}{ccccc||cc} 3 & 1 & -2 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ Z_2 \leftrightarrow Z_1 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 3\,Z_1 : \\ Z_3 - 5\,Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 16 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -\frac{1}{2}\,Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||cc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Schon beim Auftreten der ersten Nullzeile ist ersichtlich, dass $\mathcal{L}_2$ leer ist.
Das Gleichungssystem $Ax = b_1$ besitzt die Lösungsmenge

$$\mathcal{L}_1 = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Es sei A die reelle (3×3)–Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3\pi & 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheit an. Ist A diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des dazugehörigen Eigenraums.

(a) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda \cdot E_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -3\pi & 1 & \pi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\pi - \lambda).$$

(b) Nach dem vorherigen Aufgabenteil sind 0 und π die einzigen Eigenwerte von A. Aus dem charakteristischen Polynom können wir ferner ablesen, dass der Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 2 und der Eigenwert π mit algebraischer Vielfachheit 1 auftritt. Da die Spalten von A einen zweidimensionalen Untervektorraum aufspannen (also $\mathrm{Rg}(A) = 2$ gilt), muss $\mathrm{Kern}\,(A)$ gemäß Dimensionsformel eindimensional sein, weshalb 0 mit geometrischer Vielfachheit 1 auftritt. Da zu jedem Eigenwert ein Eigenvektor existiert und die geometrische durch die algebraische Vielfachheit nach oben beschränkt ist, tritt π mit geometrischer Vielfachheit 1 auf. Außerdem ist A nicht diagonalisierbar: Denn dann müsste die algebraische mit der geometrischen Vielfachheit des Eigenwerts 0 übereinstimmen, was, wie wir gerade gesehen haben, nicht der Fall ist.

(c) Der nichttriviale Vektor $(0, 0, 1)^\intercal$ bildet eine Basis des eindimensionalen Eigenraums zum Eigenwert π. Ebenso bildet $(1, 0, 3)^\intercal$ eine Basis für den Eigenraum zum Eigenwert 0.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an E.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E.

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dem φ beschrieben wird durch ${}_{\mathbb{F}}\varphi_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}x \mapsto A\,{}_{\mathbb{F}}x$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Zunächst bestimmen wir den Normalenvektor n auf E. Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\left|\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\right| = \sqrt{2^2+5^2+4^2} = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Damit ist $n = \frac{\sqrt{5}}{15}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $n = -\frac{\sqrt{5}}{15}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \middle| n \right\rangle \geqq 0$ ist. Also haben wir $n = \frac{\sqrt{5}}{15}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ und die Hessesche Normalform

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{2\sqrt{5}}{15}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_2 + \frac{4\sqrt{5}}{15}x_3 = \frac{11}{15}\sqrt{5} \right\}.$$

(b) Jedes Koordinatensystem mit den folgenden Eigenschaften erfüllt die geforderte Bedingung:

- Der Ursprung liegt auf E.
- Der erste Basisvektor ist ein nichtverschwindendes Vielfaches von n.
- Die beiden anderen Basisvektoren sind Basisvektoren des Aufspanns $\mathrm{L}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Eine (naheliegende) Wahl von $\mathbb{F}$ wäre zum Beispiel

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} z^n$$

konvergiert und bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die diese Potenzreihe divergiert.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Entwicklungspunkt der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + (-1)^n}{n} \right)^{(n^2)} (z - \mathrm{e} + \mathrm{i})^n .$$

(a) Zunächst bestimmen wir den Konvergenzradius der Reihe (z. B.) mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Sei $a_n = \frac{3^n}{n^3}$. Dann ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 3 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3.$$

Der Konvergenzradius ist dann $\rho = \frac{1}{3}$. Damit konvergiert die Reihe jedenfalls für alle z mit $|z| < \frac{1}{3}$ und divergiert für alle z mit $|z| > \frac{1}{3}$.

Die kompexen Zahlen z mit $|z| = \frac{1}{3}$ sind noch gesondert zu betrachten. Es ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3^n}{n^3} z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Damit ist die Reihe für alle z mit $|z| = \frac{1}{3}$ absolut konvergent und damit auch konvergent.

(b) Der Entwicklungspunkt ist gegeben durch $z_0 = \mathrm{e} - \mathrm{i}$. Den Konvergenzradius bestimmen wir mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Es ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{n + (-1)^n}{n} \right)^{(n^2)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^n = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2k} \right)^{2k} = \mathrm{e}.$$

Damit ist der Konvergenzradius $\rho = \mathrm{e}^{-1}$.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Sei $a \neq 0$ und $f(x) = x\mathrm{e}^{ax}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (na^{n-1} + a^n x)\mathrm{e}^{ax}.$$

- Induktionsanfang **IA** Es ist $f'(x) = \mathrm{e}^{ax} + ax\mathrm{e}^{ax} = (1 \cdot a^{1-1} + a^1 x)\mathrm{e}^{ax}$.
- Induktionsschluss **IS** $n \rightsquigarrow n+1$: Es ist

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{(n)}(x)\right) \\
&\overset{\textbf{IH}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((na^{n-1} + a^n x)\mathrm{e}^{ax}\right) \\
&= a^n \mathrm{e}^{ax} + (na^{n-1} + a^n x)\mathrm{e}^{ax} a \\
&= (a^n + na^n + a^{n+1}x)\mathrm{e}^{ax} \\
&= ((n+1)a^n + a^{n+1}x)\mathrm{e}^{ax}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $g_{\alpha,n}$ das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$g_{\alpha,n}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - \sin(\alpha)y^2 \\ x^n y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie für alle $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ die Jacobi–Matrix und die Rotation von $g_{\alpha,n}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge L aller $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, für welche $g_{\alpha,n}$ ein Potential besitzt.

(c) Geben Sie für $(\alpha, n) = \left(-\frac{5}{6}\pi, 1\right)$ explizit ein Potential von $g_{\alpha,n}$ an.

(a) Die Jacobi-Matrix der Funktion $g = g_{\alpha,n}$ im Punkt (x, y) lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2\sin(\alpha)y \\ nx^{n-1}y & x^n \end{pmatrix};$$

demnach ist die Rotation bei (x, y) gegeben durch

$$\tfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) - \tfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = nx^{n-1}y + 2\sin(\alpha)y.$$

(b) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, existiert ein Potential genau dann, wenn die Rotation an jedem Punkt verschwindet. Insbesondere muss also

$$0 = \operatorname{rot} g(1,1) = n + 2\sin(\alpha)$$

gelten, was wegen $|\sin(\alpha)| \leqq 1$ nur für $n = 1, 2$ möglich ist. Aber $n = 2$ ist ausgeschlossen, denn sonst gälte beispielsweise

$$\operatorname{rot} g(2,1) = 4 + 2\sin(\alpha) > 0.$$

Also muss $n = 1$ sein. Wegen $\operatorname{rot} g(x,y) = y(1 + 2\sin(\alpha))$ folgt $\sin(\alpha) = -1/2$ bzw. $\alpha = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ oder $\alpha = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Die Lösungsmenge ist also $L = L_1 \cup L_2$ mit

$$L_1 := \left\{ \left(-\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, 1\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},\ L_2 := \left\{ \left(-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, 1\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(c) Nach dem vorherigen Teil gilt für alle $(\alpha, n) \in L$ stets $g(x,y) = (3x^2 + \frac{1}{2}y^2, xy)$, es gibt also bis auf Addition einer Konstanten nur ein Potential U. Dieses erfüllt für festes $y \in \mathbb{R}$ und beliebiges x nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (auch für $x < 0$):

$$U(x,y) - U(0,y) = \int_0^x \frac{\partial U}{\partial x}(t,y)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x g_1(t,y)\,\mathrm{d}\,t = x^3 + \frac{1}{2}xy^2.$$

Es ergibt sich ferner für alle y

$$U(0,y) - U(0,0) = \int_0^y g_2(0,t)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

Jedes Potential ist also von der Form $U(x,y) = x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Die Kurve K sei parametrisiert durch $c\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie $K := c([0,\pi])$. Zeichnen Sie insbesondere die Punkte $c(0)$, $c\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $c\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $c\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ und $c(\pi)$ ein.

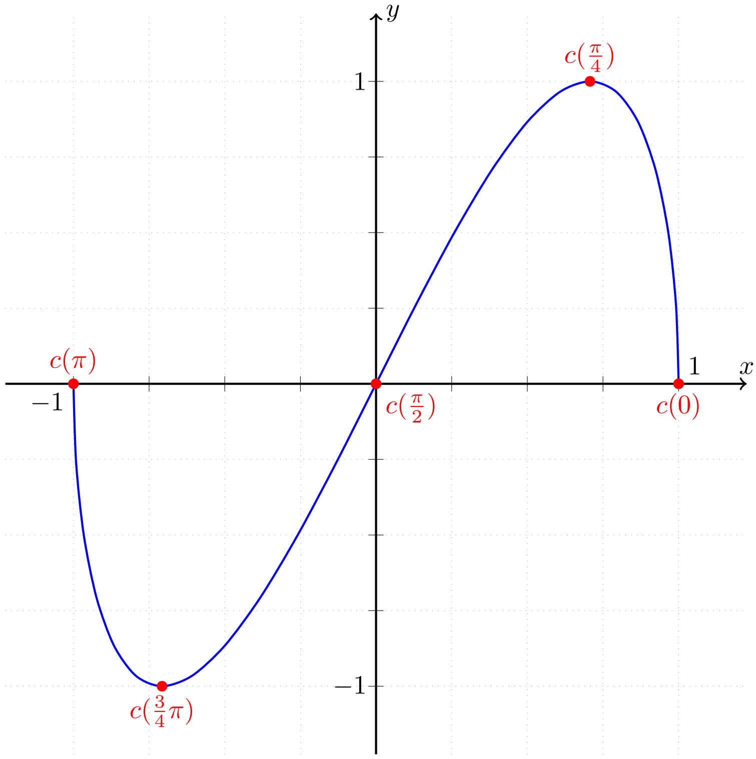
(b) Zeigen Sie, dass c eine reguläre Parametrisierung von K ist.

(c) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld mit

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(a) Zeichnung der Menge $c([0,\pi])$:



(b) Zu zeigen ist, dass $c'(t)$ nirgends verschwindet. Und in der Tat ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

niemals der Nullvektor, da aus $\sin(t) = 0$ mit $t \in [0,\pi]$ folgt, dass $t = 0$ oder $t = \pi$ gelten muss. Aber $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$.

(c) Per Definition gilt

$$\begin{aligned}\int_K g(x) \bullet \,\mathrm{d}\,x &= \int_0^\pi \langle g(c(t)) \,|\, c'(t)\rangle \,\mathrm{d}\,t \\ &= -\int_0^\pi \cos(t)\sin(t) \,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi c_2'(t) \,\mathrm{d}\,t \\ &= -\int_0^\pi \cos(t)\sin(t) \,\mathrm{d}\,t + c_2(\pi) - c_2(0),\end{aligned}$$

wobei in die letzte Gleichung der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung eingeht. Mittels partieller Integration berechnen wir außerdem

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}\,t &= \left[\sin^2(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)\sin(t) \,\mathrm{d}\,t \\ &= -\int_0^\pi \cos(t)\sin(t) \,\mathrm{d}\,t,\end{aligned}$$

weshalb $\int_0^\pi \cos(t)\sin(t) = 0$ und wegen $c_2(\pi) = c_2(0) = 0$ auch

$$\int_K g(x) \bullet \,\mathrm{d}\,x = 0$$

gilt.

Alternative: Es ist leicht zu sehen, dass $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto \frac{1}{2}x_1^2 + x_2$ ein Potential von g ist. Damit ist

$$\int_K g(x) \bullet \,\mathrm{d}\,x = \Phi(c(\pi)) - \Phi(c(0)) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 0 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 0\right) = 0.$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Es seien A_1, A_2 und A_3 die reellen (2×2)–Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A_1, A_2 und A_3 in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ linear unabhängig sind.

(b) Sie dürfen annehmen, dass durch die Abbildung

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \colon (A, B) \mapsto \langle A \mid B \rangle := \operatorname{Spur}(A^\intercal B)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert wird. Berechnen Sie die folgenden Werte:

$$\langle A_1 \mid A_1 \rangle, \; \langle A_1 \mid A_2 \rangle, \; \langle A_1 \mid A_3 \rangle \text{ und } \langle A_2 \mid A_3 \rangle.$$

(c) Bestimmen Sie Matrizen $B_1, B_2, B_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $\mathrm{L}(A_1) = \mathrm{L}(B_1)$, $\mathrm{L}(A_1, A_2) = \mathrm{L}(B_1, B_2)$ und $\mathrm{L}(A_1, A_2, A_3) = \mathrm{L}(B_1, B_2, B_3)$ gilt und dass B_1, B_2, B_3 ein Orthonormalsystem bezüglich dem in **(b)** definierten Skalarprodukt bilden.

(a) Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$ gegeben, so gilt also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Dies ist nur möglich, wenn $\lambda_3 = 0$ ist. Dann folgt aber $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ bzw. $\lambda_1 = \lambda_2$ und schließlich

$$0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3\lambda_1.$$

Damit verschwinden sowohl λ_1 als auch λ_2 und A_1, A_2 und A_3 sind linear unabhängig.

(b) Es gilt

$$\langle A_1 \mid A_1 \rangle = \operatorname{Spur}(A_1^\intercal A_1) = \operatorname{Spur} \begin{pmatrix} 0^2 + 1^2 & * \\ * & (-1)^2 + 0^2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\langle A_1 \mid A_2 \rangle = \operatorname{Spur}(A_1^\intercal A_2) = \operatorname{Spur} \begin{pmatrix} 0^2 + 1 \cdot 2 & * \\ * & (-1) \cdot 1 + 0^2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\langle A_1 \mid A_3 \rangle = \operatorname{Spur}(A_1^\intercal A_3) = \operatorname{Spur} \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & * \\ * & (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = -6,$$

$$\langle A_2 \mid A_3 \rangle = \operatorname{Spur}(A_2^\intercal A_3) = \operatorname{Spur} \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & * \\ * & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = 3.$$

(c) Wir verwenden das Gram–Schmidt–Orthonormalisierungsverfahren. Demnach ist ein normierter Vektor B_1 mit $\mathrm{L}\,(A_1) = \mathrm{L}\,(B_1)$ gegeben durch

$$B_1 := \frac{1}{|A_1|} A_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle A_1 \,|\, A_1 \rangle}} A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ferner steht nach Gram–Schmidt–Verfahren die Matrix

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_2 &:= A_2 - \langle A_2 \,|\, B_1 \rangle \, B_1 \\
&= A_2 - \frac{\langle A_2 \,|\, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \\
&= A_2 - \frac{1}{2} A_1 \\
&= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

senkrecht zu B_1. Dann ist

$$B_2 := \frac{1}{|\tilde{B}_2|} \tilde{B}_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} \tilde{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine normierte Matrix mit $\mathrm{L}\,(B_1, B_2) = \mathrm{L}\,(A_1, A_2)$. Nach Gram–Schmidt wird eine zu B_1 und B_2 orthogonale Matrix definiert durch

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_3 &:= A_3 - \langle A_3 \,|\, B_1 \rangle \, B_1 - \langle A_3 \,|\, B_2 \rangle \, B_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Setzen wir also noch

$$B_3 := \frac{1}{|\tilde{B}_3|} \tilde{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dann sind B_1, B_2 und B_3 wie gewünscht.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Es sei $z = \frac{3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+3\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-1+\mathrm{i}}$.

(a) Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

$$|z| = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \boxed{\frac{19}{12}\pi}.$$

(b) Bestimmen Sie $(-1+\mathrm{i})^6 = \boxed{8\mathrm{i}}$.

(c) Bestimmen Sie $\left(3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+3\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = \boxed{729}$.

(d) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z^6.

$$\mathrm{Re}(z^6) = \boxed{0}, \qquad \mathrm{Im}(z^6) = \boxed{-\frac{729}{8}}.$$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $(2,1)$ sei

$$\mathrm{T}_2(f,(x,y),(2,1)) = 19 + 2(x-2) + 7(x-2)^2 - 4(x-2)(y-1).$$

(a) Geben Sie die Hessematrix von f im Punkt $(2,1)$ an. $\quad \mathrm{H}f\,(2,1) = \boxed{\begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_1(f,(x,y),(2,1)) = \boxed{19 + 2(x-2)}$.

(c) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an mit

$$\mathrm{T}_1(g,(x,y),(2,1)) = \mathrm{T}_1(h,(x,y),(2,1)) = \mathrm{T}_1(f,(x,y),(2,1)).$$

$$g(x,y) = \boxed{19 + 2(x-2)},$$

$$h(x,y) = \boxed{19 + 2(x-2) + (x-2)^{17}}.$$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{4n-9} = \boxed{\mathrm{e}^4}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2+2x\sin(x^5)}{(2x-5)^2} = \boxed{\dfrac{7}{4}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{2^n}{n}} = \boxed{2}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{1}{7^k} = \boxed{\dfrac{7}{8}}$

Aufgabe 12 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen $f,g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2$ und $g(x,y)=x^2+2xy+3y^2+3x+y$.

(a) Berechnen Sie ∇f und ∇g.

$$\nabla f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}}, \qquad \nabla g(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 2x+2y+3 \\ 2x+6y+1 \end{pmatrix}}.$$

(b) Geben Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$ an, in denen ∇g verschwindet. $\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

(c) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung von kritischen Stellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$ nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

$$\boxed{\begin{aligned} x+y+\lambda(2x+2y+3) &= 0, \\ x+y+\lambda(2x+6y+1) &= 0, \\ x^2+2xy+3y^2+3x+y &= 0 \end{aligned}}.$$

(d) An welchen Stellen nimmt die Funktion f ihren größten bzw. kleinsten Wert unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$ an?

größter Wert bei $\begin{pmatrix} -2-\dfrac{\sqrt{11}}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$,

kleinster Wert bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und bei $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
