Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 7 – 9** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 14.10.2019 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **21.10.2019** bis **23.10.2019** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*8 Punkte*)

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+8}{(n+1)^2}$.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\pi/4}\right)\right)$.

(c) Es sei $a_n = \left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right)^{-n\cdot(1+(-1)^n)}$. Berechnen Sie $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(d) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{12^n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Es sei a ein reeller Parameter. Weiter sei $f_a\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} x + a^2 - a & \text{, für } x \leqq 0, \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2a^2x) & \text{, für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Für welche $a\in\mathbb{R}$ ist f_a in $x_0 = 0$ stetig?

(b) Für welche $a\in\mathbb{R}$ ist f_a in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon f(x) = x\cos(x)$.

(a) Bestimmen Sie f' und f''.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Stufe von f um den Entwicklungspunkt π.

(c) Zeigen Sie, dass gilt $|f(x) - T_2(f,x,\pi)| \leqq \frac{1}{6}(2\pi+3)|x-\pi|^3$ für alle $x\in[0,2\pi]$.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ und die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Gegeben seien die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 0 \\ 18 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Spur von A sowie den Rang von $A - 2E_3$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und deren algebraische Vielfachheiten.

(c) Ist A diagonalisierbar?

(d) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*) Gegeben sei in Standardkoordinaten die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 30 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik $\mathcal{Q}$.
Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{G}$ so an, dass die Quadrik $\mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{G}$ durch diese euklidische Normalform beschrieben wird.

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

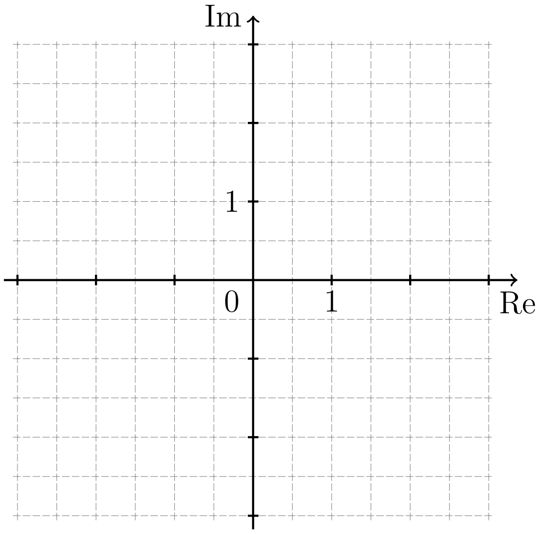
Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

(a) Es sei $z = \dfrac{-\mathrm{i} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

$|z| = \boxed{}$, $\varphi = \boxed{}$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\colon t \mapsto \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^t$.

Zeichnen Sie die Punkte $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(-1)$ in die komplexe Zahlenebene ein.



Aufgabe 8 (*8 Punkte*)

(a) Berechnen Sie:

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{x-5} + \ln(3) \right) \mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \frac{\cos(3x)}{\left(\pi - \sin(3x)\right)^{\frac{5}{2}}} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\dfrac{11x - 18}{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

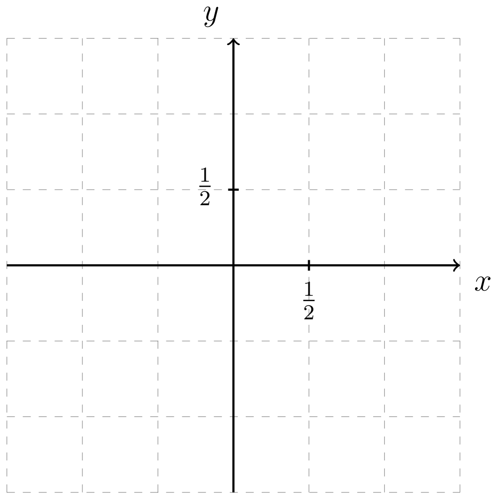
$$\frac{11x - 18}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \boxed{}$$

Berechnen Sie:

$$\int \frac{11x - 18}{x^3 - 6x^2 + 9x} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (*9 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon f(x,y) = (1-x^4)\cos(\pi y)$.

(a) Zeichnen Sie die Niveaulinien von f zum Niveau 0 für $(x,y) \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ und kennzeichnen Sie die Bereiche, in denen f nur positive bzw. negative Werte annimmt.



(b) Berechnen Sie den Gradienten von f. $\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{}$.

(c) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von f auf $\mathbb{R}^2$.

(d) Geben Sie für jede kritische Stelle von f, die im Bereich $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ liegt, an, welcher Typ (Sattelpunkt, lokales Maximum/Minimum) dort vorliegt.