Aufgabe 1 (*8 Punkte*)

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+8}{(n+1)^2}$.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\pi/4}\right)\right)$.

(c) Es sei $a_n = \left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right)^{-n\cdot(1+(-1)^n)}$. Berechnen Sie $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

(d) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{12^n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$.

(a) Der Ausdruck $\dfrac{3n^2+8}{(n+1)^2} = \dfrac{3n^2+8}{n^2+2n+1}$ ist ein Quotient aus Polynomen gleichen Grades. Damit ergibt sich der gesuchte Grenzwert als Quotient der führenden Koeffizienten, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+8}{(n+1)^2} = 3.$$

(b) Da alle beteiligten Funktionen stetig sind, können wir Grenzwertbildung und Funktionsauswertung vertauschen. Es ist damit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \cos\left(\ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\pi/4}\right)\right) &= \cos\left(\ln\left(\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{\pi/4}\right)\right) \\ &= \cos(\ln(\mathrm{e}^{\pi/4})) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(c) Wir spalten a_n in zwei Teilfolgen nach geraden und ungeraden Indizes auf. Dann ist

$$a_{2k} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{-2k\cdot 2} = \left(\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}\right)^{-2} \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^{-2}.$$

Weiter ist

$$a_{2k+1} = \left(-1+\frac{1}{2k+1}\right)^0 = 1.$$

Damit besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte e^{-2} und 1. Da $\mathrm{e}^{-2} < 1$, gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1 \qquad \text{und} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \mathrm{e}^{-2}.$$

(d) (i) Es handelt sich hierbei um eine geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} < 1$. Daher ist der Wert der Reihe gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{12^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

(ii) Es ist $\dfrac{\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$. Damit sind die Reihenglieder von der Form $a_{n+1}-a_n$ mit $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$. Es liegt also eine Teleskopreihe vor. Weiterhin ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Es sei a ein reeller Parameter. Weiter sei $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} x + a^2 - a & \text{, für } x \leqq 0, \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2a^2 x) & \text{, für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f_a in $x_0 = 0$ stetig?

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f_a in $x_0 = 0$ differenzierbar?

(a) Damit f_a in 0 stetig ist, muss gelten, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0-0} f_a(x) = f_a(0) = \lim_{x\to 0+0} f_a(x) \\ \Leftrightarrow\quad & \lim_{x\to 0-0} (x + a^2 - a) = a^2 - a = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{2}(x^2 + 2a^2 x) \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 - a = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a = 1 \quad \text{oder} \quad a = 0. \end{aligned}$$

(b) Für die Differenzierbarkeit betrachten wir den Differenzenquotienten. Damit der Grenzwert existiert, müssen links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten existieren und gleich sein. Es ist

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f_a(x) - f_a(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x + a^2 - a - (a^2 - a)}{x - 0} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f_a(x) - f_a(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2a^2 x) - (a^2 - a)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{2}(x + 2a^2) - \frac{1}{x}(a^2 - a) \right).$$

Offensichtlich kann der rechtsseitige Grenzwert nur existieren, wenn $(a^2 - a) = 0$ ist, also wenn $a \in \{0, 1\}$. In diesen Fällen gilt

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f_a(x) - f_a(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} 0 & , a = 0, \\ 1 & , a = 1. \end{cases}$$

Nur im Fall $a = 1$ stimmen rechts- und linksseitiger Grenzwert überein. Daher ist f_a nur für $a = 1$ differenzierbar.

Alternativ können wir auch wie folgt vorgehen: Damit f_a in 0 differenzierbar ist, muss f_a in 0 stetig sein und weiterhin muss gelten, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0-0} f_a'(x) = \lim_{x\to 0+0} f_a'(x) \\ \Leftrightarrow\quad & \lim_{x\to 0-0} 1 = \lim_{x\to 0+0} (x + a^2) \\ \Leftrightarrow\quad & 1 = a^2 \\ \Leftrightarrow\quad & a = 1 \quad \text{oder} \quad a = -1. \end{aligned}$$

Da f_a nur für $a \in \{0, 1\}$ in 0 stetig ist, ist f_a nur für $a = 1$ in 0 differenzierbar.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = x\cos(x)$.

(a) Bestimmen Sie f' und f''.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Stufe von f um den Entwicklungspunkt π.

(c) Zeigen Sie, dass gilt $|f(x) - T_2(f,x,\pi)| \leqq \frac{1}{6}(2\pi+3)|x-\pi|^3$ für alle $x \in [0, 2\pi]$.

(a) Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - x\sin(x), \\ f''(x) &= -x\cos(x) - 2\sin(x), \end{aligned}$$

(b) Damit ist

$$\begin{aligned} T_2(f,x,\pi) &= f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{1}{2}f''(\pi)(x-\pi)^2 \\ &= -\pi - (x-\pi) + \frac{1}{2}\pi(x-\pi)^2 \end{aligned}$$

(c) Nach dem Satz von Taylor ist $f(x) = T_2(f,x,\pi) + R_2(f,x,\pi)$, wobei

$$\begin{aligned} R_2(f,x,\pi) &= \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-\pi)^3 \\ &= \frac{1}{6}(\xi\sin(\xi) - 3\cos(\xi))(x-\pi)^3 \end{aligned}$$

für ein $\xi = \xi_{x,\pi}$ zwischen x und π ist. Daher ist insbesondere $\xi \in [0, 2\pi]$ und es gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(f,x,\pi)| &\leqq \frac{1}{6}|\xi\sin(\xi) - 3\cos(\xi)||x-\pi|^3 \\ &\leqq \frac{1}{6}(\underbrace{|\xi|}_{\leqq 2\pi}\underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leqq 1} + 3\underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leqq 1})|x-\pi|^3 \\ &\leqq \frac{1}{6}(2\pi+3)|x-\pi|^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ und die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad Z_4 \leftrightarrow Z_1 : \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_1 : \\ Z_4 - 2\,Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2 : \\ Z_4 + Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4 + 2\,Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \\ Z_2 + 2\,Z_3 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$ ist damit

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Für die Lösungsmenge des inhomogenen Systems $Ax = b$ erhalten wir somit

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Gegeben seien die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 0 \\ 18 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Spur von A sowie den Rang von $A - 2E_3$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und deren algebraische Vielfachheiten.

(c) Ist A diagonalisierbar?

(d) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

(a) Die Spur von A ist die Summe der Diagonalelemente, also $\mathrm{Sp}(A) = 8 - 4 - 1 = 3$.

Den Rang von $A - 2E_3$ berechnet man mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen:

$$\mathrm{Rg}(A - 2E_3) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 18 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

(b) Aus Teil (a) weiß man, dass 2 ein Eigenwert ist. Außerdem sieht man, dass -1 ein Eigenwert ist, denn $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -1. Da die Summe der Eigenwerte gleich der Spur einer Matrix ist, gilt für den dritten Eigenwert λ_3:

$$3 = -1 + 2 + \lambda_3,$$

also $\lambda_3 = 2$. Somit ist -1 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1, 2 ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2.

(c) Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar: Nach Teil (b) ist 2 doppelter Eigenwert, d.h. die algebraische Vielfachheit ist 2. Die geometrische Viefachheit dieses Eigenwerts ist wegen $\mathrm{Rg}(A - 2E_3)$ gleich 1, stimmt also nicht mit der algebraischen Vielfachheit überein.

(d) $\det(A) = -4$, denn die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte.

$\det(B) = 1 \cdot (-2) \cdot 5 = -10$, denn B ist obere Dreiecksmatrix, daher ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonaleinträge.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*) Gegeben sei in Standardkoordinaten die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 30 = 0\right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik $\mathcal{Q}$.
Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{G}$ so an, dass die Quadrik $\mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{G}$ durch diese euklidische Normalform beschrieben wird.

In Matrixschreibweise lautet die Gleichung der Quadrik

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} -10 & -5 \end{pmatrix}}_{a^\intercal} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 30 = 0.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$.
Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -5$.

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 5$ ist der Lösungsraum $V(\lambda_1)$ des LGS

$$\left[\begin{array}{rr||r} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{array}\right].$$

Dieser Lösungsraum wird z.B. aufgespannt durch den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einen Eigenvektor v_2 zu $\lambda_2 = -5$ bestimmt man analog, etwa $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(Alternativ kann man verwenden, dass A symmetrisch ist: Somit sind die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 orthogonal.)

Eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren erhält man, indem man die Eigenvektoren normiert:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Man beachte, dass auch $-v_1$ bzw. $-v_2$ normierte Eigenvektoren ist, aber bis auf das Vorzeichen und Reihenfolge sind diese Vektoren hier eindeutig bestimmt.)

Dies liefert die Transformationsmatrix $F := \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (0; v_1, v_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ hat unsere

Quadrik die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\mathsf{T}(F^\mathsf{T}AF)y + 2(F^\mathsf{T}a)^\mathsf{T}y + 30 \\ &= y^\mathsf{T}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} y + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}\right)^\mathsf{T} y + 30 \\ &= 5y_1^2 - 5y_2^2 - 10\sqrt{5}\,y_1 + 30. \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung verschieben wir den Ursprung und beseitigen damit den linearen Term:

$$5y_1^2 - 10\sqrt{5}\,y_1 = 5(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 5 - 5) = 5(y_1 - \sqrt{5})^2 - 25.$$

Dies liefert den neuen Ursprung P mit Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$, umgerechnet in Anfangskoordinaten $\mathbb{E}$:

$$P = {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das neue Koordinatensystem $\mathbb{G} = (P; v_1, v_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \right)$.

In den neuen Koordinaten $z_1 = y_1 - \sqrt{5}$ und $z_2 = y_2$ wird die Quadrik beschrieben durch die Gleichung $5z_1^2 - 5z_2^2 + 5 = 0$.

Division durch 5 liefert die euklidische Normalform $z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0$.

Es handelt sich um eine Hyperbel.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

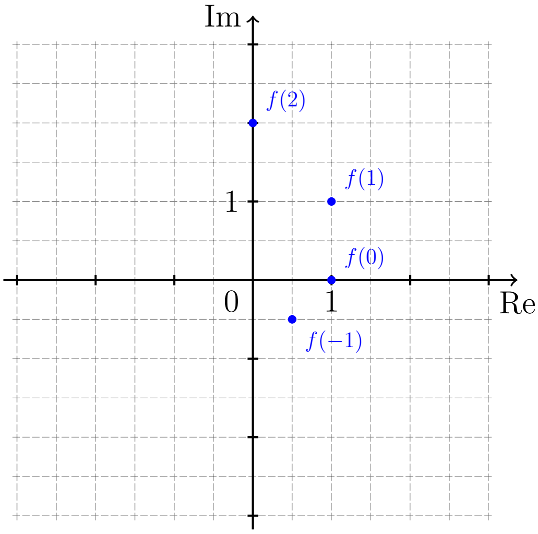
Aufgabe 7 *(4 Punkte)*

(a) Es sei $z = \dfrac{-\mathrm{i} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

$$|z| = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{3}}, \qquad \varphi = \boxed{\frac{7}{6}\pi}.$$

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\colon t \mapsto \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^t$.

Zeichnen Sie die Punkte $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(-1)$ in die komplexe Zahlenebene ein.



Aufgabe 8 *(8 Punkte)*

(a) Berechnen Sie:

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{x-5} + \ln(3)\right) \mathrm{d}\,x = \boxed{\ln(4)}$$

$$\int \frac{\cos(3x)}{\left(\pi - \sin(3x)\right)^{\frac{5}{2}}} \mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{2}{9\left(\pi - \sin(3x)\right)^{\frac{3}{2}}}\right]}$$

(b) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\dfrac{11x - 18}{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

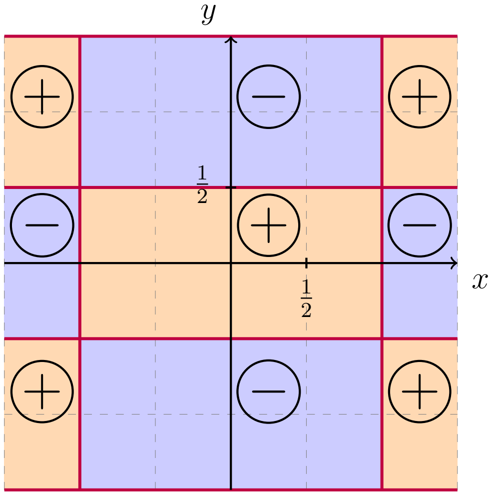
$$\frac{11x - 18}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \boxed{-\frac{2}{x} + \frac{2}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}}$$

Berechnen Sie:

$$\int \frac{11x - 18}{x^3 - 6x^2 + 9x} \mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-2\ln|x| + 2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3}\right]}$$

Aufgabe 9 (*9 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon f(x,y) = (1-x^4)\cos(\pi y)$.

(a) Zeichnen Sie die Niveaulinien von f zum Niveau 0 für $(x,y) \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ und kennzeichnen Sie die Bereiche, in denen f nur positive bzw. negative Werte annimmt.



Niveaulinien sind lila eingezeichnet

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} -4x^3\cos(\pi y) \\ -\pi\sin(\pi y)\cdot(1-x^4) \end{pmatrix}}.$$

(c) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von f auf $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\left\{(0,k),\quad \left(-1, \tfrac{2k+1}{2}\right),\quad \left(1, \tfrac{2k+1}{2}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

(d) Geben Sie für jede kritische Stelle von f, die im Bereich $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ liegt, an, welcher Typ (Sattelpunkt, lokales Maximum/Minimum) dort vorliegt.

lokale Minima bei $(0,\pm 1)$, lokales Maximum bei $(0,0)$
Sattelpunkte bei $(-1,\pm 3/2), (-1,\pm 1/2), (1,\pm 3/2), (1,\pm 1/2)$