Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 06.04.2020 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **14.04.2020** bis **16.04.2020** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{30^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right)$.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n (z - 2 - \mathrm{i})^n .$$

(a) Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius der Reihe.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe und für welche divergiert sie?

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (x_1 \mathrm{e}^{x_2}, x_2)^\intercal$. Weiter sei die Kurve K_1 parametrisiert durch $C_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (t, t^2)^\intercal$ und K_2 sei die Strecke von $(0,0)^\intercal$ nach $(1,1)^\intercal$.

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(c) Besitzt g ein Potential?

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie diejenigen Stellen in der kompakten Menge

$$M = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 4\},$$

an denen die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto (x+y)^2$ ihren kleinsten bzw. ihren größten Wert annimmt.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben sei in Standardkoordinaten die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1^2 - 17x_2^2 - 18x_1x_2 - 12x_1 + 4x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie eine Matrixbeschreibung $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2b^\intercal x + c = 0\}$ mit einer symmetrischen Matrix A, einem Vektor b und einer Konstanten c an.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und bestimmen Sie für jeden Eigenraum eine Orthonormalbasis.

(c) Geben Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik $\mathcal{Q}$ an und stellen Sie ferner ein kartesisches Koordinatensystem auf, bezüglich welchem $\mathcal{Q}$ durch diese euklidische Normalform beschrieben wird.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Sei A eine Matrix mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor v. Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass v für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ein Eigenvektor von A^{2n} zum Eigenwert λ^{2n} ist.

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Wir betrachten die Matrizen $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\mathrm{Sp}(M+N)$, $\det(M)$ und $\mathrm{Rg}(N)$.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n - 3^n} = \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{(n/2)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n^{5/2} - n^3}{(2n-1)^3} =$$

Aufgabe 9 (*7 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x\sin(xy)$. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse–Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f\left((x,y)^\intercal\right) =$$

$$\mathrm{H}f\left((x,y)^\intercal\right) =$$

Berechnen Sie $\operatorname{grad} f\left((1,\frac{\pi}{2})^\intercal\right)$ und $\mathrm{H}f\left((1,\frac{\pi}{2})^\intercal\right)$.

$$\operatorname{grad} f\left((1,\tfrac{\pi}{2})^\intercal\right) = \qquad , \qquad \mathrm{H}f\left((1,\tfrac{\pi}{2})^\intercal\right) =$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)^\intercal$.

$$\mathrm{T}_2\left(f, (x,y)^\intercal, \left(1,\tfrac{\pi}{2}\right)^\intercal\right) =$$

Aufgabe 10 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie

das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) =$	
die Eigenwerte von A:	
die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte:	
die Eigenräume:	
die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte:	

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Zeichnen Sie die Punkte der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 8(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\}$ in dem nachfolgenden Koordinatensystem ein: