Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 7 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\; b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 11.04.2022 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **18.04.2022** bis **20.04.2022** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Sei die Quadrik $\mathcal{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal A x + c = 0 \right\}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := -2.$$

(a) Berechnen Sie $A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - 4 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathrm{Sp}(A)$ und $\det(A)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$. Geben Sie auch ein kartesisches Koordinatensystem an, in dem diese Normalform angenommen wird.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionengrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-5n+1} \right)$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x + x)}{3x+5}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{2^{k+1}}{k!}$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} \right)^n$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Es sei $f(x) = \dfrac{11x^2-6x+45}{(x-1)(x^2+9)}$. Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung für den Ausdruck $f(x)$ durch. Bestimmen Sie $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) := 4x^2 - 3xy$. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum von f auf dem Kreis $D := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \right\}$.

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Kurve K mit Parametrisierung
$C\colon \left[1, \sqrt{3}\right] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$ sowie das Skalarfeld
$f\colon (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{1 + \left(\dfrac{3x_2}{2x_1} \right)^2}$.
Berechnen Sie

(a) die Länge der Kurve K,

(b) $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}s$.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Seien $e_1, \ldots, e_4$ die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^4$ und sei

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$Ae_1 = \boxed{}, \quad Ae_2 = \boxed{}, \quad Ae_3 = \boxed{} \quad \text{und} \quad Ae_4 = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A: $\boxed{}$

und die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A: $\boxed{}$.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben seien die zwei Basen $B\colon b_1, b_2, b_3$ und $C\colon c_1, c_2, c_3$ für den Vektorraum $V := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\colon f(x) = a_0 e^x + a_1 x e^x + a_2 x^2 e^x\}$, wobei

$$b_1(x) = e^x, \quad b_2(x) = xe^x, \quad b_3(x) = x^2 e^x,$$
$$c_1(x) = e^x, \quad c_2(x) = (x-1)e^x, \quad c_3(x) = (x^2+1)e^x.$$

Weiterhin sei die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V\colon f(x) \mapsto f(x+1)$ gegeben.

(a) Stellen Sie c_3 und $\varphi(b_1)$ als Linearkombination der Basisvektoren aus B dar:

$$c_3 = \boxed{}, \quad \varphi(b_1) = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\mathrm{id}_C$, ${}_B\varphi_B$ und ${}_B\varphi_C$.

$${}_B\mathrm{id}_C = \boxed{}, \quad {}_B\varphi_B = \boxed{}, \quad {}_B\varphi_C = \boxed{}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Gegeben seien die komplexen Zahlen, $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = (1+\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})$.

(a) Schreiben Sie z_1 in Polarkoordinaten mit Argument in $[0, 2\pi)$.

$$z_1 = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie $|z_2|$ und $\arg(z_2) \in [0, 2\pi)$. $|z_2| = \boxed{}$ und $\arg(z_2) = \boxed{}$

(c) Schreiben Sie $\frac{z_2}{z_1^3}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. $\frac{z_2}{z_1^3} = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$, sowie die Inverse der Matrix $M := (f_1\, f_2\, f_3)$.

$$F : \boxed{}, \boxed{}, \boxed{} \quad \text{und} \quad M^{-1} = \boxed{}.$$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\left(\binom{x}{y}\right) := \mathrm{e}^{x-y}\cos(x)$.

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix im Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.

$$\operatorname{grad} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \boxed{} \qquad \mathrm{H}f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \boxed{}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $\binom{x}{y} = \binom{2\pi}{\pi}$.

$$T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi \\ \pi \end{pmatrix}\right) = \boxed{}$$
