Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Sei die Quadrik $\mathcal{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^\intercal A x + c = 0 \right\}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := -2.$$

(a) Berechnen Sie $A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - 4 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{Sp}(A)$ und $\det(A)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$. Geben Sie auch ein kartesisches Koordinatensystem an, in dem diese Normalform angenommen wird.

(a) Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Weiter erhalten wir

$$\operatorname{Sp}(A) = 0 + 3 + 3 = 6.$$

Schließlich bekommen wir mit der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= -4 - 4 - 12 - 12 \\ &= -32. \end{aligned}$$

(b) Wegen **(a)** ist einer der Eigenwerte $\lambda_1 = 4$. Für die anderen beiden Eigenwerte λ_2 und λ_3 gilt

$$6 = \operatorname{Sp}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 + \lambda_2 + \lambda_3 \iff \lambda_2 = 2 - \lambda_3$$

und

$$-32 = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 4 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \iff \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -8.$$

Damit bekommen wir

$$-8 = \lambda_2(2 - \lambda_2) = 2\lambda_2 - \lambda_2^2 \iff \lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 8 = 0$$

und mit der Mitternachtsformel

$$(\lambda_2)_{1,2} = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8}\right) = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{36}\right) = 1 \pm 3.$$

Wir erhalten also z.B. $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = -2$.

Alternative: Man berechnet mit der Regel von Sarrus das charakteristische Polynom von A:

$$\begin{aligned}\chi_A(s) &= \det(A - s\mathrm{E}_3) = -s(3-s)^2 - 4 - 4 - 4(3-s) + s - 4(3-s)\\ &= -s(9 - 6s + s^2) - 8 - 24 + 8s + s\\ &= -s^3 + 6s^2 - 9s - 32 + 9s\\ &= -s^3 + 6s^2 - 32.\end{aligned}$$

Wegen **(a)** ist eine der Nullstellen $s = 4$ und wir erhalten

$$\chi_A(s) = -s^3 + 6s^2 - 32 = (4-s)(s^2 - 2s - 8) = (4-s)(4-s)(-2-s).$$

Damit sind die übrigen Eigenwerte $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = -2$.

(c) Den Eigenraum $V(\lambda_1)$ zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ erhält man durch Lösen des LGS $(A - \lambda_1\mathrm{E}_3)x = 0$, welches explizit gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -4 & 2 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} -4 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Zwei zueinander senkrechte Eigenvektoren zu λ_1 sind daher $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, wobei wir v_1 schon aus Teil **(a)** kennen.

Einen Eigenvektor zu λ_3 kann man analog bestimmen durch Lösen des LGS $(A - \lambda_3\mathrm{E}_3)x = 0$, welches explizit gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 2 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 5 & 0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Man findet zum Beispiel den Vektor $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Wir betrachten nun das neue Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = (0; \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Bezüglich $\mathbb{F}$ ist die Quadrik gegeben durch die Gleichung

$$0 = y^\intercal \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} y - 2 = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 2 \iff -2y_1^2 - 2y_2^2 + y_3^2 + 1 = 0.$$

Damit handelt es sich bei Q um einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionengrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-5n+1}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{3x+5}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{2^{k+1}}{k!}$

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-5n+1} &= \left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-5n+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-5n+1}}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-5n+1}}\\ &= \frac{n^2+2n-(n^2-5n+1)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-5n+1}}\\ &= \frac{7n-1}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}\\ &= \frac{7-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}\\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0+0}}=\frac{7}{2},\end{aligned}$$

wobei wir im Grenzübergang die Stetigkeit der Wurzelfunktion verwendet haben.

(b) Da $\ln(\mathrm{e}^x+x)>\ln(\mathrm{e}^x)=x$ für alle $x>0$, gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}^x+x)=+\infty$. Daher können wir die Regel von l'Hospital anwenden (Fall „$\frac{\infty}{\infty}$“) und erhalten bei weiterer Anwendung der Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{3x+5} &\overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\right)}{3}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+1}{3\mathrm{e}^x+3x} \overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{3\mathrm{e}^x+3} \overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{3\mathrm{e}^x}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Alternative: Mit Hilfe der Logarithmusgesetze kann man den Ausdruck zunächst umformen. Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{3x+5} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)\right)}{3x+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x)+\ln\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}{3x+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}{3x+5}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}{3+\frac{5}{x}}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

da $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ und somit $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)=\ln(1)=0$ wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{2^{k+1}}{k!} &= 2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}2^k - \frac{1}{0!}2^0 - \frac{1}{1!}2^1 - \frac{1}{2!}2^2\right) \\ &= 2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}2^k - 5\right) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}2^k - 10 = 2\mathrm{e}^2 - 10.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} \right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$

(a) Hierbei handelt es sich um eine geometrische Reihe.
Diese konvergiert genau dann, wenn $\left|\frac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right| < 1$. Es ist

$$\left|\frac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right| = \frac{|1+\mathrm{i}|}{|3-2\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} < 1.$$

Also konvergiert die Reihe.

(b) Sei $a_n := \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$. Dann ist $a_n > \frac{1}{2n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die skalierte harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergiert, divergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Minorantenkriterium.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Es sei $f(x) = \dfrac{11x^2 - 6x + 45}{(x-1)(x^2+9)}$. Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung für den Ausdruck $f(x)$ durch. Bestimmen Sie $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Da das quadratische Polynom $x^2 + 9$ keine reelle Nullstelle besitzt, machen wir den folgenden Ansatz für eine reelle Partialbruchzerlegung

$$\frac{11x^2 - 6x + 45}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9}$$

$$\text{bzw.}\quad 11x^2 - 6x + 45 = A(x^2+9) + (Bx + C)(x-1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir $x = 1$, so erhalten wir aus der letzten Gleichung, dass $50 = 10A$, sodass $A = 5$. Ein Koeffizientenvergleich bei x^2 liefert $11 \overset{!}{=} A + B = 5 + B$, sodas $B = 6$. Zuletzt machen wir noch einen Koeffizientenvergleich bei x^0, woraus $45 \overset{!}{=} 9A - C = 45 - C$ folgt, sodass $C = 0$. Damit ist

$$f(x) = \frac{5}{x-1} + \frac{6x}{x^2+9}.$$

Wir erhalten damit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[5\ln|x-1| + 3\ln(x^2+9)\right].$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f\left(\binom{x}{y}\right) := 4x^2 - 3xy$. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum von f auf dem Kreis $D := \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Kritische Stellen:

Man betrachte die Nebenbedingung $g\binom{x}{y} := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Die Gradienten sind gegeben durch

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{grad} g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad .$$

Es gilt $\operatorname{grad} g\binom{x}{y} = \binom{2x}{2y} = \binom{0}{0}$ genau dann, wenn $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ ist. Da die Stelle $\binom{0}{0}$ nicht in D liegt, gilt $\operatorname{grad} g\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ für alle $\binom{x}{y} \in D$, und wir wissen nach der Multiplikatormethode von Lagrange, dass es zu jedem Minimum und jedem Maximum der auf D eingeschränkten Funktion $f|_D$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die Gleichungen $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} + \lambda \operatorname{grad} g\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ und $g\binom{x}{y} = 0$ erfüllt sind.

Wir finden also alle Maxima und Minima auf D (und möglicherweise weitere nicht relevante Punkte), indem wir diese Gleichungen nach x, y, λ lösen:

$$\begin{aligned} 8x - 3y + \lambda 2x &= 0 \\ -3x + \lambda 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Wir lösen die zweite Gleichung nach x auf, d.h. $x = \frac{2}{3} \cdot \lambda y$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$0 = \frac{16}{3} \cdot \lambda y - 3y + \frac{4}{3} \cdot \lambda^2 y = \frac{4}{3} \cdot y \cdot \left(\lambda^2 + 4\lambda - \frac{9}{4}\right).$$

Die Lösung $y = 0$ scheidet aus, da daraus $x = 0$ folgt und $\binom{x}{y} = \binom{0}{0} \notin D$.

Damit bleibt die quadratische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda - \frac{9}{4} = 0$ zu lösen. Diese besitzt die Lösungen $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{9}{2}$.

Betrachten wir $\lambda = \frac{1}{2}$ und setzen dies in die zweite Gleichung dann erhalten wir $x = \frac{y}{3}$. Setzen wir dies wiederum in die dritte Gleichung, so folgt $\binom{x}{y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{10}}\binom{1}{3}$

Ein analoges Vorgehen für $\lambda = -\frac{9}{2}$ liefert $x = -3y$ und $\binom{x}{y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{10}}\binom{3}{-1}$.

Einsetzen der kritischen Stellen:

$f\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{10}}\binom{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ und $f\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{10}}\binom{3}{-1}\right) = \frac{9}{2}$.

Damit gilt $\min\{f(x) \mid x \in D\} = -\frac{1}{2}$ und $\max\{f(x) \mid x \in D\} = \frac{9}{2}$.

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Kurve K mit Parametrisierung $C\colon \left[1, \sqrt{3}\right] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$ sowie das Skalarfeld $f\colon (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{1 + \left(\frac{3x_2}{2x_1}\right)^2}$.

Berechnen Sie

(a) die Länge der Kurve K,

(b) $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}s$.

Es ist $C'(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$ und damit $|C'(t)| = \sqrt{36t^2 + 36t^4} = 6|t|\sqrt{1+t^2}$, wobei wir wegen $t \geqq 0$ die Betragsstriche auch weglassen können.

(a) Die Länge der Kurve K ist gegeben durch

$$\int_K 1\,\mathrm{d}s = \int_1^{\sqrt{3}} |C'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{\text{Subst. } u=1+t^2}{=} 3\int_2^4 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \left[2u^{3/2}\right]_2^4 = 16 - 4\sqrt{2}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\int_K f(s)\,\mathrm{d}s &= \int_1^{\sqrt{3}} f(C(t))|C'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{3\cdot 2t^3}{2\cdot 3t^2}\right)^2} \cdot 6t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2}\cdot 6t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} (6t + 6t^3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[3t^2 + \frac{3}{2}t^4\right]_1^{\sqrt{3}} = 9 + \frac{27}{2} - 3 - \frac{3}{2} = 6 + 12 = 18.\end{aligned}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Seien $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_4$ die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^4$ und sei

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$A\mathrm{e}_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}, \quad A\mathrm{e}_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad A\mathrm{e}_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad A\mathrm{e}_4 = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A: $\boxed{1,\ 13}$

und die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A: $\boxed{d_1 = 3, \quad d_{13} = 1}$.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben seien die zwei Basen $B\colon b_1, b_2, b_3$ und $C\colon c_1, c_2, c_3$ für den Vektorraum $V := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\colon f(x) = a_0\mathrm{e}^x + a_1 x\mathrm{e}^x + a_2 x^2\mathrm{e}^x\}$, wobei

$$b_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad b_2(x) = x\mathrm{e}^x, \quad b_3(x) = x^2\mathrm{e}^x,$$
$$c_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad c_2(x) = (x-1)\mathrm{e}^x, \quad c_3(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x.$$

Weiterhin sei die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V\colon f(x) \mapsto f(x+1)$ gegeben.

(a) Stellen Sie c_3 und $\varphi(b_1)$ als Linearkombination der Basisvektoren aus B dar:

$$c_3 = \boxed{1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3}, \quad \varphi(b_1) = \boxed{\mathrm{e} \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3}.$$

(b) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\mathrm{id}_C$, ${}_B\varphi_B$ und ${}_B\varphi_C$.

$${}_B\mathrm{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad {}_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} & 2\mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}}, \quad {}_B\varphi_C = \boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 & 2\mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} & 2\mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Gegeben seien die komplexen Zahlen, $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = (1+\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})$.

(a) Schreiben Sie z_1 in Polarkoordinaten mit Argument in $[0, 2\pi)$.

$$z_1 = \boxed{\sqrt{2}\left(\cos(\tfrac{7\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{7\pi}{4})\right)}$$

(b) Bestimmen Sie $|z_2|$ und $\arg(z_2) \in [0, 2\pi)$. $|z_2| = \boxed{2\sqrt{2}}$ und $\arg(z_2) = \boxed{\frac{23}{12}\pi}$

(c) Schreiben Sie $\frac{z_2}{z_1^3}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. $\frac{z_2}{z_1^3} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}}$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$, sowie die Inverse der Matrix $M := (f_1\, f_2\, f_3)$.

$$F : \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad M^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\left(\binom{x}{y}\right) := \mathrm{e}^{x-y}\cos(x)$.

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix im Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.

$$\operatorname{grad} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \boxed{\mathrm{e}^{x-y}\begin{pmatrix} \cos(x) - \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}} \quad \mathrm{H}f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \boxed{\mathrm{e}^{x-y}\begin{pmatrix} -2\sin(x) & \sin(x) - \cos(x) \\ \sin(x) - \cos(x) & \cos(x) \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $\binom{x}{y} = \binom{2\pi}{\pi}$.

$$T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi \\ \pi \end{pmatrix}\right) = \boxed{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{\pi}(x-2\pi) - \mathrm{e}^{\pi}(y-\pi) - \mathrm{e}^{\pi}(x-2\pi)(y-\pi) + \tfrac{\mathrm{e}^{\pi}}{2}(y-\pi)^2}$$
