Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionengrenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(\ln(2))^k}{k!}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+4}-n\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln(4x)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n-5}$

(a) Mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$ ergibt sich hier

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln(2))^k}{k!}=\mathrm{e}^{\ln(2)}=2.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+2n+4}-n&=\left(\sqrt{n^2+2n+4}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n+4}+n}{\sqrt{n^2+2n+4}+n}=\frac{n^2+2n+4-n^2}{\sqrt{n^2+2n+4}+n}\\&=\frac{2n+4}{\sqrt{n^2+2n+4}+n}=\frac{2+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}+1}\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=1.\end{aligned}$$

(c) Durch die Umformung $x\ln(4x)=\frac{\ln(4x)}{\frac{1}{x}}$ erfüllen wir die Voraussetzungen der Regel von l'Hospital und erhalten

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\ln(4x)}{\frac{1}{x}}\right)\overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=}\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\frac{1}{4x}\cdot 4}{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0+0}-x=0.$$

(d) Es ist

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n-5}=\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}}\Bigg)^4\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-5}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}1^{-5}=1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^4.$$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^n}{n} x^n$, für welche divergiert sie?

(b) Für welche komplexen Zahlen z konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n (z+2-3\mathrm{i})^n$, für welche divergiert sie?

(a) Der Entwicklungspunkt der Potenzreihe ist $x_0 = 0$. Den Konvergenzradius erhalten wir durch

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{7^n}{n}\right|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{7}.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut für $x \in \left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{7}$.

Zu prüfen sind noch die Randpunkte:

- Einsetzen von $x = \frac{1}{7}$ liefert
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n},$$
also ein Endstück der divergenten harmonischen Reihe. Daher liegt bei $x = \frac{1}{7}$ Divergenz vor.
- Einsetzen von $x = -\frac{1}{7}$ liefert
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^n = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$
Da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist und wir eine alternierende Reihe haben, konvergiert die Potenzreihe für $x = -\frac{1}{7}$ nach dem Leibnizkriterium.

(b) Der Entwicklungspunkt der Potenzreihe ist $z_0 = -2 + 3\mathrm{i}$.

Den Konvergenzradius erhalten wir durch

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(1+\mathrm{i})^n|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut für alle z innerhalb des Kreises um $-2+3\mathrm{i}$ mit Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und divergiert für alle z außerhalb.

Zu prüfen ist nun noch der Rand. Sei dazu $|z+2-3\mathrm{i}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann ist

$$|(1+\mathrm{i})^n (z+2-3\mathrm{i})^n| = 1 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daher bilden die Glieder der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n (z+2-3\mathrm{i})^n$ für $|z+2-3\mathrm{i}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ keine Nullfolge und auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt Divergenz vor.

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-3k}{4^{k+1}} = \frac{n+1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4} \,.$$

Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.

IA Es ist

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1-3k}{4^{k+1}} = \frac{1-3}{4^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

und

$$\frac{1+1}{4^2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

Damit ist die Behauptung für $n = 1$ gezeigt.

IS $n \rightsquigarrow n+1$: Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-3k}{4^{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1-3k}{4^{k+1}} + \frac{1-3(n+1)}{4^{n+2}} \\ &\overset{\text{IH}}{=} \frac{n+1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4} + \frac{-2-3n}{4^{n+2}} \\ &= \frac{4n+4}{4^{n+2}} - \frac{1}{4} + \frac{-2-3n}{4^{n+2}} \\ &= \frac{n+2}{4^{n+2}} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + x_2 - \frac{1}{2}$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$

sowie der Halbkreis $K := \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0,\, x_2 \geqq 0\}$.

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung C von K.

(b) Bestimmen Sie $\nabla f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\nabla g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Für welche $x \in K$ gilt $\nabla g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$?

(c) Wählen Sie eine Parametrisierung C von K und bestimmen Sie alle Minimal- und Maximalstellen von $f \circ C$.

(d) Bestimmen Sie alle Minimal- und Maximalstellen von f in K.

(a) Es ist $(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 = 0$ genau dann, wenn $(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$, somit ist die Lösungsmenge der Gleichung $g(x) = 0$ der Einheitskreis.
Wegen $x_2 \geqq 0$ ergibt sich eine Parametrisierung als:

$$C\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Alternativer Lösungsweg: Es ist $(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 = 0$ genau dann, wenn $(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$ bzw.

$$x_2^2 = 1 - x_1^2$$

Wegen der Bedingung $x_2 \geqq 0$ dürfen wir die Wurzel ziehen und erhalten mit $t = x_1$ die Parametrisierung

$$C\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}$$

(b) Es gelten:

$$\nabla f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\nabla g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4x_1\,(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ 4x_2\,(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Für alle $x \in K$ gilt $(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 = 0$ und somit $(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$, folglich ist $\nabla g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$ für alle $x \in K$.

(c) Wir berechnen $f(C(t))$ und leiten ab:

$$\begin{aligned} f(C(t)) &= (\cos(t))^2 + \sin(t) - \tfrac{1}{2} \\ (f \circ C)'(t) &= -2\cos(t)\sin(t) + \cos(t) = \cos(t)\,(1 - 2\sin(t)) \end{aligned}$$

Als Nullstellen von $(f \circ C)'$ erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2}\pi \ \rightarrow \ \text{Nullstelle von } \cos(t) \\ t_1 &= \frac{1}{6}\pi \ \rightarrow \ \text{Nullstelle von } 1 - 2\sin(t) \\ t_2 &= \frac{5}{6}\pi \ \rightarrow \ \text{Nullstelle von } 1 - 2\sin(t) \end{aligned}$$

Da $f \circ C$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist, wissen wir, dass $f \circ C$ ein Minimum und ein Maximum annimmt, aber nur auf dem Rand oder an kritischen Stellen im Inneren. Setzen wir all diese Kandidaten für Extremalstellen in $f \circ C$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} f\left(C\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)\right) &= \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} \\ f\left(C\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\right) &= 0 + 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \\ f\left(C\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)\right) &= \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} \\ f\left(C(0)\right) &= \tfrac{1}{2} \\ f\left(C(\pi)\right) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

- $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = 0$ und $t_4 = \pi$ sind Minimalstellen
- $t_1 = \frac{\pi}{6}$ und $t_2 = \frac{5\pi}{6}$ sind Maximalstellen

von $f \circ C$.

Alternativer Lösungsweg:

Wir verwenden die alternative Parametrisierung und berechnen analog zu oben:

$$\begin{aligned} f(C(t)) &= t^2 + \sqrt{1 - t^2} - \tfrac{1}{2} \\ (f \circ C)'(t) &= 2t + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t) = t\left(2 - \tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \end{aligned}$$

Eine Nullstelle von $(f \circ C)'$ ist $t_0 = 0$, für die anderen beiden Nullstellen $t_{1/2}$ gilt $\sqrt{1 - t_{1/2}^2} = \frac{1}{2}$ beziehungsweise $t_{1/2}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, also $t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Da $f \circ C$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist, wissen wir, dass $f \circ C$ ein Minimum und ein Maximum annimmt, aber nur auf dem Rand oder an kritischen Stellen im Inneren. Setzen wir all diese Kandidaten für Extremalstellen in $f \circ C$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} f\left(C\left(0\right)\right) &= 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \\ f\left(C\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) &= \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} \\ f\left(C\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) &= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} \\ f\left(C\left(-1\right)\right) &= \tfrac{1}{2} \\ f\left(C\left(1\right)\right) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

- $t_0 = 0$, $t_3 = -1$, und $t_4 = 1$ sind die Minimalstellen
- $t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sind die Maximalstellen

von $f \circ C$.

(d) Ist C eine Parametrisierung von K, so ergeben sich die Maximalstellen von f auf K als die Punkte $C(t)$ mit t Maximalstelle von $f \circ C$, analog hat f genau dann eine Minimalstelle in $x = C(\tilde{t})$, wenn $\tilde{t}$ eine Minimalstelle von $f \circ C$ ist. Folglich sind

- $C(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Minimalstellen
- $C\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $C\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ die Maximalstellen

von f in K.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Gegeben seien die Drehung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Ebene E, welche durch die Punkte $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $P_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ verläuft.

(a) Bestimmen Sie die Drehachse R von φ.

(b) Bestimmen Sie eine Hesse-Normalform von E.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Bildebene $\varphi(E) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = \varphi(x) \text{ für ein } x \in E\}$.

(a) Wir lösen die Fixpunktgleichung $\varphi(x) = x$, was äquivalent zum Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ist. Zur Vereinfachung multizplizieren wir hierbei beide Seiten mit 11 und erhalten:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -6 & -2 & 0 \\ -2 & 17 & -9 & 11 \\ -6 & 7 & 17 & -11 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} (1/2)\cdot Z_1 : \\ Z_2 + Z_1 : \\ Z_3 + 3Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -11 & 11 \\ 0 & -11 & 11 & -11 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 3/11\cdot Z_2 : \\ (1/11)\cdot Z_2 : \\ Z_3 + Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hieraus erhalten wir als Drehachse:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Da P_1 der Ursprung ist, können wir einen Normalenvektor n direkt über das normierte Kreuzprodukt der Ortsvektoren von P_2 und P_3 berechnen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

womit wir

$$n = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhalten. Da E den Ursprung erhält, erhalten wir als eine Hesse-Normalform folglich:

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{1}{\sqrt{11}} x_1 + \frac{3}{\sqrt{11}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{11}} x_3 = 0 \right\}$$

(c) Die Bildebene ist eindeutig durch die durch

$$\varphi(P_1) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(P_2) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(P_3) \overset{\text{(a)}}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Punkte bestimmt.

Wir berechnen das Kreuzprodukt $v := (\varphi(P_1) - \varphi(P_3)) \times (\varphi(P_2) - \varphi(P_3))$:

$$v := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir $n = \frac{1}{|v|} v = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ als einen Normalenvektor. Den Abstand d zum Ursprung erhalten wir aus

$$\langle n \,|\, \varphi(P_3) \rangle = \frac{1}{\sqrt{11}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{11}} = d,$$

womit wir als Hesse-Normalform

$$\varphi(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{11}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{11}} x_2 - \frac{3}{\sqrt{11}} x_3 = \frac{2}{\sqrt{11}} \right\}$$

erhalten.

Alternativer Lösungsweg:

Sei η ein Normalenvektor von E sowie $A := \frac{1}{11} \left(\begin{smallmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \end{smallmatrix} \right)$ der lineare Anteil von φ. Da φ als Isometrie Winkel erhält, gilt für beliebige Punkte $P, Q \in E$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q - P \,|\, \eta \rangle = \langle Q - P \,|\, (P + \eta) - P \rangle \\ &= \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, \varphi(P + \eta) - \varphi(P) \rangle \\ &= \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle \end{aligned}$$

insbesondere ist – da zu jedem Punkt P' in $\varphi(E)$ ein Punkt P in E mit $P' = \varphi(P)$ existiert –

$$\begin{aligned} n := A\eta &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ -33 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Normalenvektor von $\varphi(E)$. Den Abstand zum Ursprung erhalten wir aus

$$0 = \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \langle \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle = \langle \varphi(Q) \,|\, A\eta \rangle \,,$$

indem wir für P einen festen Punkt, z. B. P_1, einsetzen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(Q) \,|\, n \rangle &= \left\langle \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal \right) \,\middle|\, n \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{11}}, \end{aligned}$$

Die Hesse-Normalform lautet also

$$\varphi(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{11}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{11}} x_2 - \frac{3}{\sqrt{11}} x_3 = \frac{2}{\sqrt{11}} \right\}.$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int \frac{1+5x}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das Integral kann man mit Partialbruchzerlegung lösen. Es ist

$$\frac{1+5x}{1-x^2} = \frac{3}{1-x} - \frac{2}{1+x}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int \frac{1+5x}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{3}{1-x}\,\mathrm{d}\,x - \int \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= -3\ln\left(|1-x|\right) - 2\ln\left(|1+x|\right) + C,\end{aligned}$$

wobei C eine Konstante ist.

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben seien $f : \mathbb{R}^3 \backslash \left\{(0,0,0)^\intercal\right\} \to \mathbb{R}\colon f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung $C\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3\colon C(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^\intercal$.

Bestimmen Sie

$$\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

Wir bestimmen zuerst C'. Es gilt

$$C'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)^\intercal.$$

Somit erhalten wir $|C'(t)| = \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1} = \sqrt{2}$. Des Weiteren gilt unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras

$$f(C(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Damit ist das geforderte Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}\,t = 2\sqrt{2}\operatorname{arsinh}(\pi),$$

wie man mit Hilfe der Formelsammlung (Tabelle) sieht.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-64\mathrm{i} = \boxed{64\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)}$

Bestimmen Sie alle Lösungen von $w^3 = -64\mathrm{i}$. Geben Sie diese sowohl in Polarkoordinaten als auch in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 4\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) &&= 4\mathrm{i},\\
w_1 &= 4\left(\cos\left(\tfrac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{7\pi}{6}\right)\right) &&= -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i},\\
w_2 &= 4\left(\cos\left(\tfrac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{11\pi}{6}\right)\right) &&= 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

(b) Es sei $z = \dfrac{\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)}{1 + \mathrm{i}}$. Berechnen Sie $|z|$ und $\arg z \in [0, 2\pi)$.

$$|z| = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad , \qquad \arg z = \boxed{3 - \frac{\pi}{4}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Geben Sie zu jedem Eigenwert λ dessen algebraische Vielfachheit e_λ, dessen geometrische Vielfachheit d_λ sowie den zugehörigen Eigenraum $V(\lambda)$ an.

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = 0, \quad e_0 = 2, \quad d_0 = 1, \quad V(0) = \mathrm{L}((1, -2, 1)^\intercal)\\
&\lambda_2 = 6, \quad e_6 = 1, \quad d_6 = 1, \quad V(6) = \mathrm{L}((1, 1, 1)^\intercal)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Bestimmen Sie

$$f'(x) = \boxed{-\frac{1}{x^2}} \qquad f''(x) = \boxed{\frac{2}{x^3}}$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f, x, 1) = \boxed{1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4}$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Sei $\mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ein kartesisches Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem. Weiter sei $P \in \mathbb{R}^2$ mit ${}_{\mathbb{G}}P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}P = \boxed{\frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

(b) Geben Sie die Abbildungsvorschriften der Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $B:\ b_1, b_2, b_3$ die Basis mit Basisvektoren $b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Betrachten Sie die von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Abbildung $\varphi_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto A_t\, x$ mit

$${}_{E}(\varphi_t)_{E} = A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -t & 0 & 3t \\ 0 & t(1-t) & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche t ist die Abbildung φ_t **nicht** bijektiv? $t \in \left\{ \boxed{0\,,\,1} \right\}$

(b) Geben Sie ${}_{E}\mathrm{id}_{B}$ an: ${}_{E}\mathrm{id}_{B} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(c) Sei nun $t = 1$. Bestimmen Sie ${}_{B}\mathrm{id}_{E}$, ${}_{E}(\varphi_1)_{B}$ und ${}_{B}(\varphi_1)_{B}$:

${}_{B}\mathrm{id}_{E} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ ${}_{E}(\varphi_1)_{B} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ ${}_{B}(\varphi_1)_{B} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$
