Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 11.04.2023 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **17.04.2023** bis **20.04.2023** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

(a) Beweisen Sie diese Aussage anhand vollständiger Induktion.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k k^2$.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 + z + \frac{1}{4} = \mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ der komplexen Zahl

$$w = \frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(42\mathrm{i}-42)}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})(\pi+\pi\mathrm{i})}.$$

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ -1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

(b) Berechnen Sie nun die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A_2.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{16n^2 + 3n} - 4n\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-k}{k!}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 + x^2 - 6x + 4}{\ln(x) - x + 1}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2 - 2}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{5x^2+9}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{4+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := x^2 + 2y^2 - 2x^2y.$$

(a) Berechnen Sie den Gradient ∇f und die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f$ von f.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Es seien die Vektoren u_1 und u_2 gegeben durch

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei α der Winkel zwischen u_1 und u_2.

Bestimmen Sie $\cos\alpha = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt F des von u_1 und u_2 aufgespannten Parallelogramms:

$F = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $v \in \mathrm{L}(u_1, u_2)$ so, dass v normiert und senkrecht zu u_1 ist:

$v = \boxed{}$

(d) Für $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}_3$ gegeben durch

$$\mathcal{B}\colon u_1, u_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{E}_3\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix

${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{E}_3} = \boxed{}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n)!} = \boxed{} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} = \boxed{}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Berechnen Sie Entwicklungspunkt z_0 sowie Konvergenzradius ρ der folgenden komplexen Reihen

Reihe	z_0	ρ
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{3} + 1\right)^n$		
$\sum_{n=0}^{\infty} n! \left(z - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^n$		

Aufgabe 11 (*5 Punkte*)
Gegeben seien die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie das lineare Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + (4+\alpha)x_2 + (\pi\alpha + 6)x_3 &= \beta + 2 \\ x_1 + (2+\alpha)x_2 + (3\alpha + 3)x_3 &= 2\beta + 1 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix

$[A_\alpha || b_\beta] =$

(b) Für welche Paare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist $A_\alpha x = b_\beta$ nicht lösbar?

$(\alpha, \beta) \in$

(c) Es sei jetzt $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteqq \mathbb{R}^3$ von $A_0 x = b_0$:

$\mathcal{L} =$

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := \mathrm{e}^{(\sin(x))^2}$.

Bestimmen Sie die Ableitungen

$f'(x) =$

$f''(x) =$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$T_2(f, x, \frac{\pi}{4}) =$
