Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

(a) Beweisen Sie diese Aussage anhand vollständiger Induktion.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k k^2$.

(a) **IA** $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1 = \frac{(-1)^1 \cdot 1 \cdot (1+1)}{2}$$

IS $n \to n+1$: Es gilt mit der Induktionshypothese (IH: Die Aussage ist wahr für beliebiges aber festes n), dass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&\overset{\text{IH}}{=} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} + \frac{2(-1)^{n+1}(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(2n+2-n)}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)((n+1)+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage mit dem Prinzip der vollständigen Induktion.

(b) Wir nutzen die bewiesene Aussage und rechnen

$$\sum_{k=1}^{10} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^{10} 10(10+1)}{2} = 55.$$

Alternative:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} (-1)^k k^2 &= -1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36 - 49 + 64 - 81 + 100 \\
&= 55.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 + z + \frac{1}{4} = \mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ der komplexen Zahl

$$w = \frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(42\mathrm{i}-42)}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})(\pi+\pi\mathrm{i})}.$$

(a) Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$\left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \mathrm{i}.$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned}
\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^2 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\\
z_1 + \tfrac{1}{2} &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
z_2 + \tfrac{1}{2} &= \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
z_1 &= -\tfrac{1-\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
z_2 &= -\tfrac{1+\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Alternative 1:

Mit der Mitternachtsformel ergibt sich

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} + w_{1,2}$$

wobei $w_{1,2}$ die Lösungen von $w^2 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{4} - \mathrm{i}) = \mathrm{i}$ sind.
Nach Anwendung der Wurzelformel erhalten wir

$$\begin{aligned}
w_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\\
w_2 &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\tfrac{1-\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
z_2 &= -\tfrac{1+\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Alternative 2:

Mit $z = a + b\mathrm{i}$ kann die Gleichung umgeformt werden zu

$$(a+b\mathrm{i})^2 + (a+b\mathrm{i}) + \tfrac{1}{4} - \mathrm{i} = 0.$$

Wir erhalten

$$\left(a^2 - b^2 + a + \tfrac{1}{4}\right) + (2ab + b - 1)\,\mathrm{i} = 0,$$

und daraus (durch Vergleich von Real- und Imaginärteil) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a + \tfrac{1}{4} &= 0, \\ 2ab + b - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung kann man umstellen zu $a^2 + a + \frac{1}{4} = b^2$, also $(a + \frac{1}{2})^2 = b^2$. Daraus ergibt sich $b = \pm(a + \frac{1}{2})$. Setzt man die beiden Möglichkeiten in die zweite Gleichung ein, erhält man die beiden Fälle

$2a^2+2a+\frac{3}{4} = 0$: Diese Gleichung hat keine reellen Lösungen, weil $2a^2+2a+\frac{3}{4} = 2(a^2+a+\frac{1}{4})+\frac{1}{4} = 2(a + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ für reelle a immer positiv ist. (Geneigte Löser können auch damit argumentieren, dass die Diskriminante in der von ihnen bevorzugten Lösungsformel negativ ist).

$2a^2 + 2a - \frac{1}{2} = 0$: Die beiden Lösungen sind

$$a_1 = \tfrac{-1+\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{dann ergibt sich } b_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ aus der zweiten Gleichung,}$$

$$a_2 = \tfrac{-1-\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{dann ergibt sich } b_2 = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ aus der zweiten Gleichung.}$$

Mit den so ermittelten Real- und Imaginärteilen ergeben sich also

$$\begin{aligned} z_1 &= -\tfrac{1-\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\,, \\ z_2 &= -\tfrac{1+\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

(b) Multiplikation zweier komplexer Zahlen bewirkt eine Addition der jeweiligen Argumente, wohingegen eine Division die Subtraktion der Argumente bewirkt.

Man berechnet den Winkel für w aus den Argumenten der Faktoren im Zähler und im Nenner als

$$\left(\underbrace{\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}}_{=2\pi} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\underbrace{\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}}_{=2\pi} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dieser Winkel liegt im Bereich $[0, 2\pi)$ und ist deshalb das Argument von w.

Alternative 1:

Die Ausdrücke $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ sowie $(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})$ treten komplex konjugiert mit positiven Realteil auf und liegen deshalb auf der positiven reellen Achse.

Es bleibt dann noch das Argument von $\frac{42\mathrm{i}-42}{\pi+\pi} = \frac{42}{\pi}\,\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}$ zu bestimmen.

Die Argumente von $(42\mathrm{i} - 42)$ sowie $(\pi + \pi\mathrm{i})$ können abgelesen werden (als $\frac{3\pi}{4}$ bzw. $\frac{\pi}{4}$), und der Winkel für $\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}$ ergibt sich als

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Dieser Winkel liegt im Bereich $[0, 2\pi)$ und ist deshalb das Argument von $\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}$, und damit auch das Argument von $w = \frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(42\mathrm{i}-42)}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})(\pi+\pi\mathrm{i})} = \frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}\,\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}$.

Alternative 2:

Man berechnet:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(42\mathrm{i}-42)}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})(\pi+\pi\mathrm{i})} = \frac{2(42\mathrm{i}-42)}{8(\pi+\pi\mathrm{i})} \\ &= \frac{42}{4\pi}\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}} = -\frac{42}{4\pi}\frac{(\mathrm{i}-1)^2}{2} = \frac{42}{4\pi}\mathrm{i} = \frac{21}{2\pi}\mathrm{i} = \frac{21}{2\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Somit ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ -1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

(b) Berechnen Sie nun die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A_2.

(a) Per Definition ist das charakteristische Polynom der Matrix A_α gegeben durch

$$\begin{aligned}\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda \mathrm{E}_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha-\lambda & \alpha \\ -1 & 0 & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda+\alpha)^2 + 0 - \alpha^2 - 0 - 0 - 0 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2) - \alpha^2 \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2(2\alpha-1) - \lambda(\alpha^2 - 2\alpha).\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte der Matrix A_α suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Wegen $\chi_{A_\alpha}(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2(2\alpha-1) - \lambda(\alpha^2-2\alpha) = -\lambda\cdot(\lambda^2 + \lambda(2\alpha-1) + (\alpha^2-2\alpha))$ gilt:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -\lambda \cdot \left(\lambda^2 + \lambda(2\alpha-1) + (\alpha^2-2\alpha)\right) = 0.$$

Wir erhalten zwei Fälle:

(i) $\lambda_1 = 0$.

(ii) $\lambda^2 + \lambda(2\alpha-1) + (\alpha^2-2\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda_{2,3} &= -\frac{2\alpha-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2\alpha-1)^2}{4} - \alpha^2 + 2\alpha} \\ &= \frac{1-2\alpha}{2} \pm \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\left((1-2\alpha) \pm \sqrt{4\alpha+1}\right).\end{aligned}$$

Daher sind die Eigenwerte der Matrix A_α gegeben durch:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}((1-2\alpha) + \sqrt{4\alpha+1}), \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}((1-2\alpha) - \sqrt{4\alpha+1})$$

(b) Für $\alpha = 2$ sind die Eigenwerte der Matrix A_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left((1-2\cdot 2)+\sqrt{4\cdot 2+1}\right) = \frac{1}{2}(1-4+3) = 0, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}\left((1-2\cdot 2)-\sqrt{4\cdot 2+1}\right) = \frac{1}{2}(1-4-3) = -3 \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die zu den Eigenwerten λ_k zugehörigen Eigenvektoren v_k $(k = 1, 2, 3)$ durch Anwendung des Gauß-Algorithmus. Es gilt: $(A_2 - \lambda_k \mathrm{E}_3)v_k = 0$.

(i) $\lambda_{1,2} = 0$:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,2}$:

$$V(\lambda_{1,2}) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) $\lambda_3 = -3$:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit ist der Eigenraum zum Eigenwert λ_3:

$$V(\lambda_3) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{16n^2+3n} - 4n\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1-k}{k!}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+x^2-6x+4}{\ln(x)-x+1}$

(a) Erweitern via binomischer Formel und anschließendes Ausklammern der führenden Potenz liefert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{16n^2+3n} - 4n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{16n^2+3n} - 4n \cdot \frac{\sqrt{16n^2+3n}+4n}{\sqrt{16n^2+3n}+4n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{16n^2+3n-16n^2}{\sqrt{16n^2+3n}+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{16n^2+3n}+4n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{3}{\sqrt{16+3/n}+4} = \frac{3}{8}\,.\end{aligned}$$

(b) Es handelt sich um eine Teleskopreihe, es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1-k}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!}\right) \\ &= -\frac{1}{0!} + \cancel{\frac{1}{1!}} - \cancel{\frac{1}{1!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{(n-1)!}} - \cancel{\frac{1}{(n-1)!}} + \frac{1}{n!} \\ &= -1 + \frac{1}{n!}\,;\end{aligned}$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1-k}{k!} = -1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = -1 + 0 = -1\,.$

Die Pünktchen dienen hier zur Veranschaulichung, sie lassen sich so präzisieren:
$\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!} = \frac{1}{n!} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell!} - \frac{1}{0!} = \frac{1}{n!} - 1\,.$

Alternative:

Wie oben schreiben wir $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1-k}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{k}{k!}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!}\right)$

und bemerken

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = -1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} = -1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} = -1 + \mathrm{e}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} = \mathrm{e}.$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1-k}{k!} = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) - \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} = (-1+\mathrm{e}) - \mathrm{e} = -1\,.$

(c) Da Zähler und Nenner gegen Null konvergieren, kann man (zweimal) den Satz von l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2-6x+4}{\ln(x)-x+1} &\overset{\text{l'H}}{\underset{''\frac{0}{0}''}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4+x^2-6x+4)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)-x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x^3+2x-6}{\frac{1}{x}-1}\\ &\overset{\text{l'H}}{\underset{''\frac{0}{0}''}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^3+2x-6)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{12x^2+2}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{14}{-1} = -14.\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2-6x+4}{\ln(x)-x+1} &\overset{\text{l'H}}{\underset{''\frac{0}{0}''}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4+x^2-6x+4)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)-x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x^3+2x-6}{\frac{1}{x}-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{4x^4+2x^2-6x}{1-x} \overset{\text{l'H}}{\underset{''\frac{0}{0}''}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^4+2x^2-6x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{16x^3+4x-6}{-1} = \frac{14}{-1} = -14.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2-2}$

(a) Wir berechnen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{1} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Nach Quotientenkriterium erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

und damit die Konvergenz der Reihe.

(b) Für alle $n \geqq 1$ gilt die Abschätzung

$$\frac{n+1}{3n^2-2} \geqq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch die ursprüngliche Reihe.

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{5x^2+9}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{4+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

(a) Die Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2+9}{x\,(x^2+3)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}\\
\Leftrightarrow 5x^2+9 &\overset{!}{=} Ax^2+3A+Bx^2+Cx = x^2(A+B)+xC+3A\\
\Rightarrow A+B=5,&\quad C=0,\quad 3A=9\\
\Rightarrow A=3,&\quad B=2,\quad C=0.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int \frac{5x^2+9}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

Ausführen der Integration ergibt

$$\int \frac{5x^2+9}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x = \left[3\ln|x| + \ln(x^2+3)\right].$$

(b) Integration via Substitution $4+\sin(2x)=u$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\cos(2x)$ liefert:

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sqrt{4+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[\sqrt{u}\right] = \left[\sqrt{4+\sin(2x)}\right].$$

Wir berechnen

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{4+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{4+\sin(2x)}\right]_0^{\pi/4} = \sqrt{5}-2.$$

Alternative Lösung:

Integration via Substitution $4+\sin(2x)=u$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\cos(2x)$, $u(0)=4$, $u(\pi/4)=5$, liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{4+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\\
&= \left[\sqrt{u}\right]_4^5 = \sqrt{5}-2.
\end{aligned}$$

(c) Die partielle Integration (zweimal) liefert

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\right] - \int \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\right] - \left(\left[\mathrm{e}^{-x}\sin(x)\right] + \int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \left[-\mathrm{e}^{-x}(\cos(x)+\sin(x))\right] - \int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\;\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\cos(x)+\sin(x)\right)\right].$$

Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\;\mathrm{d}x &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\;\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\cos(x)+\sin(x)\right)\right]_0^{\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\lim_{\beta\to+\infty}\mathrm{e}^{-\beta}(\cos(\beta)+\sin(\beta)) - \mathrm{e}^{0}(\cos(0)+\sin(0))\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die zuletzt verwendete Konvergenz $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\mathrm{e}^{-\beta}(\cos(\beta)+\sin(\beta)) = 0$ ergibt sich wegen $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\mathrm{e}^{-\beta} = 0$ aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned}
-2\,\mathrm{e}^{-\beta} \leqq \mathrm{e}^{-\beta}(-|\cos(\beta)| - |\sin(\beta)|) &\leqq \mathrm{e}^{-\beta}(-|\cos(\beta)+\sin(\beta)|) \\
&\leqq \mathrm{e}^{-\beta}(\cos(\beta)+\sin(\beta)) \leqq \mathrm{e}^{-\beta}(|\cos(\beta)| + |\sin(\beta)|) \leqq 2\,\mathrm{e}^{-\beta}
\end{aligned}$$

mit dem Sandwich-Argument.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := x^2 + 2y^2 - 2x^2 y.$$

(a) Berechnen Sie den Gradient ∇f und die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f$ von f.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

(a) Durch Ableiten bekommen wir den Gradient

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 4xy \\ 4y - 2x^2 \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Matrix

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4y & -4x \\ -4x & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Zur Berechnung der kritischen Stellen muss der Gradient nullgesetzt werden und das resultierende Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} 2x - 4xy \\ 4y - 2x^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung der zweiten Gleichung führt zu $y = \frac{1}{2}x^2$, einsetzen dieser Gleichung in die erste Gleichung ergibt

$$x - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(1 - x^2) = 0\,.$$

Somit gilt $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$.

Insgesamt erhalten wir also die drei kritischen Stellen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Zur Klassifizierung der kritischen Stellen werden diese in die Hesse-Matrix eingesetzt, dadurch erhält man

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es muss noch bestimmt werden, ob diese Matrizen positiv definitiv, negativ definit oder indefinit sind. Berechnen der Determinanten liefert

$$\det \mathrm{H}f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8, \qquad \det \mathrm{H}f\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -16, \qquad \mathrm{H}f\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -16.$$

Damit folgt:

- $P_1 = \binom{0}{0}$ ist ein Minimum, da die Determinante und die Spur $\operatorname{Sp} \mathrm{H} f\binom{0}{0} = 2 + 4 = 6$ beide positiv sind.
- P_2 und P_3 sind Sattelpunkte da die Determinanten negativ sind.

Alternative Lösung: Die Eigenwerte zu den Hesse-Matrizen an der kritischen Stellen lauten:
Eigenwerte von $\mathrm{H} f\binom{0}{0}$ sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$.
Eigenwerte von $\mathrm{H} f\binom{1}{1/2}$ sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{5}$.
Eigenwerte von $\mathrm{H} f\binom{-1}{1/2}$ sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{5}$.
Daraus folgt ebenso, dass bei $P_1 = \binom{0}{0}$ ein lokales Minimum und bei $P_2 = \binom{-1}{1/2}$, $P_3 = \binom{-1}{1/2}$ Sattelpunkte vorliegen.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Es seien die Vektoren u_1 und u_2 gegeben durch

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei α der Winkel zwischen u_1 und u_2.

Bestimmen Sie $\cos\alpha = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt F des von u_1 und u_2 aufgespannten Parallelogramms:

$F = \boxed{5}$

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $v \in \mathrm{L}(u_1, u_2)$ so, dass v normiert und senkrecht zu u_1 ist:

$$v = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

(d) Für $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}_3$ gegeben durch

$$\mathcal{B}\colon u_1, u_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{E}_3\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix

$$_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{E}_3} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n)!} = \boxed{-\pi} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} = \boxed{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Berechnen Sie Entwicklungspunkt z_0 sowie Konvergenzradius ρ der folgenden komplexen Reihen

Reihe	z_0	ρ
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{3} + 1\right)^n$	-3	3
$\sum_{n=0}^{\infty} n! \left(z - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^n$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$	0

Aufgabe 11 (*5 Punkte*)
Gegeben seien die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie das lineare Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + (4+\alpha)x_2 + (\pi\alpha + 6)x_3 &= \beta + 2 \\ x_1 + (2+\alpha)x_2 + (3\alpha+3)x_3 &= 2\beta + 1 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A_\alpha || b_\beta] = \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & (4+\alpha) & (\pi\alpha+6) & \beta+2 \\ 1 & (2+\alpha) & (3\alpha+3) & 2\beta+1 \end{array}\right]$$

(b) Für welche Paare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist $A_\alpha x = b_\beta$ nicht lösbar?

$$(\alpha, \beta) \in \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

(c) Es sei jetzt $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^3$ von $A_0 x = b_0$:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := \mathrm{e}^{(\sin(x))^2}$.

Bestimmen Sie die Ableitungen

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{(\sin(x))^2} \sin(x)\cos(x)$$

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{(\sin(x))^2} \Big(2(\sin(x))^2(\cos(x))^2 + (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 \Big)$$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$T_2(f, x, \tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{\mathrm{e}} + \sqrt{\mathrm{e}}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)^2$$
