Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f\binom{x}{y} := x^3 + 3xy^2$. Bestimmen Sie jeweils den minimalen und den maximalen Wert, der von f auf der Ellipse $D := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 5\}$ angenommen wird.

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Nebenbedingungsfunktion $g\binom{x}{y} := 2x^2 + y^2 - 5$. Dann folgt für die Gradienten

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x^2+3y^2\\6xy\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x\\2y\end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\operatorname{grad} g\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ nur für $\binom{x}{y} = \binom{0}{0} \notin D$ erfüllt, und die Methode von Lagrange kann angewendet werden.
Zu jedem Maximum und Minimum von $f\big|_D$ findet man also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichungen $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} + \lambda \operatorname{grad} g\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ und $g\binom{x}{y} = 0$ erfüllt sind:

$$3x^2 + 3y^2 + 4\lambda x = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$6xy + 2\lambda y = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$2x^2 + y^2 - 5 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Durch Faktorisieren von (II) erhalten wir $2y(3x+\lambda) = 0$ und somit die zwei Fälle $y = 0$ oder $\lambda = -3x$.
Fall 1 ($y = 0$): Einsetzen in (III) liefert somit $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ und damit die kritischen Stellen

$$S_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Fall 2 ($\lambda = -3x$): Einsetzen in (I) liefert

$$3x^2 + 3y^2 - 4 \cdot 3x^2 = -9x^2 + 3y^2 = 0$$

und somit $y = \pm\sqrt{3}x$.
Einsetzen in (III) liefert letztlich

$$2x^2 + (\pm\sqrt{3}x)^2 = 5x^2 = 5$$

und folglich $x = 1$ oder $x = -1$. Insgesamt erhalten wir damit die vier kritischen Stellen

$$S_3 = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$
$$S_5 = \begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_6 = \begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Einsetzen der 6 kritischen Stellen in f ergibt

$$f(S_1) = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad f(S_2) = -\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad f(S_3) = f(S_4) = 10, \quad f(S_5) = f(S_6) = -10.$$

Da f stetig und die Ellipse D kompakt ist, sind die globalen Maximalstellen und die globalen Minimalstellen von $f|_D$ unter den kritischen Stellen vertreten.
Hierbei gilt

$$\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{125}{8}} < \sqrt{100} = 10 \ ,$$

Damit liegen bei S_1 und S_2 weder maximale noch minimale Werte vor.

Insgesamt erhalten wir für den minimalen Wert $\min\{f(x) \mid x \in D\} = -10$ und für den maximalen Wert $\max\{f(x) \mid x \in D\} = 10$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $U : u_1, u_2, u_3$ so, dass

$$\mathrm{L}\,(u_1) = \mathrm{L}\,(b_1)\,, \quad \mathrm{L}\,(u_1, u_2) = \mathrm{L}\,(b_1, b_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{L}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{L}\,(b_1, b_2, b_3)$$

ist und dass $U : u_1, u_2, u_3$ ein Rechtssystem ist.

Mittels Schmidt-Verfahren erhalten wir

$$u_1 = \frac{1}{|b_1|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_2^* = b_2 - \langle b_2 \mid u_1 \rangle \, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$u_2 = \frac{1}{|u_2^*|} u_2^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den letzten Vektor erhalten wir

$$\begin{aligned} u_3^* &= b_3 - \langle b_3 \mid u_1 \rangle \, u_1 - \langle b_3 \mid u_2 \rangle \, u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-\frac{1}{\sqrt{6}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$u_3 = \frac{1}{|u_3^*|} u_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Um zu prüfen, ob es sich um ein Rechtsystem handelt, berechnen wir $\det(u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{aligned}\det(u_1,u_2,u_3) &= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}((-2+0-1)-(0+1+2)) = -1\ .\end{aligned}$$

Wir können also in einem der Vektoren das Vorzeichen ändern, um auf ein Rechtssystem zu kommen. So ist z.B. durch

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Rechtssystem mit den gewünschten Eigenschaften gegeben.

Alternative: Anstatt u_3 mittels Schmidt-Verfahren zu berechnen, kann man auch das Kreuzprodukt verwenden. Dieses garantiert, dass wir ein Rechtssystem erhalten: Mit

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ist $U : u_1, u_2, u_3$ ein Rechtssystem.

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_n := a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{für } n \geqq 3.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $a_{3k+1} = (-1)^k a_1$ für alle $k \geqq 0$ gilt.

Induktionsanfang $(k = 0)$**:** Es gilt für $k = 0$

$$a_{3k+1} = a_{3\cdot 0+1} = a_1 = (-1)^0 a_1 = (-1)^k a_1.$$

Induktionsschritt $(k \to k+1)$**:** Sei ein $k \geqq 0$ gegeben.

Verwenden dürfen wir die Induktionshypothese: Es ist $a_{3k+1} = (-1)^k a_1$.

Mit der rekursiven Definition der Folge wird damit

$$\begin{aligned} a_{3(k+1)+1} &= a_{3(k+1)} - a_{3(k+1)-1} \\ &= a_{3(k+1)-1} - a_{3(k+1)-2} - a_{3(k+1)-1} \\ &= -a_{3(k+1)-2} \\ &= -a_{3k+1} \\ &\overset{\text{IH}}{=} -(-1)^k a_1 = (-1)^{k+1} a_1. \end{aligned}$$

Somit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Also gilt die Behauptung für alle $k \geqq 0$.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben sei der reelle Vektorraum

$$U = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} :\; f(x) = a_1 \mathrm{e}^x + a_2 x \mathrm{e}^x \right\}$$

mit zugehörigen Basen $B\colon b_1, b_2$ und $C\colon c_1, c_2$ mit

$$\begin{aligned} b_1(x) &= 3\mathrm{e}^x, & b_2(x) &= (x-2)\mathrm{e}^x \\ c_1(x) &= \mathrm{e}^x, & c_2(x) &= x\mathrm{e}^x \,. \end{aligned}$$

Gegeben sei ferner die lineare Abbildung $\varphi\colon U \to U\colon f \mapsto \varphi(f)$, wobei die Funktion $\varphi(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\left(\varphi(f)\right)(x) = f(2x-3) \cdot \mathrm{e}^{2-x} \,.$$

(a) Bestimmen Sie $\left(\varphi(b_1)\right)(x)$ und $\left(\varphi(b_2)\right)(x)$.

(b) Bestimmen Sie Skalare $\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$ für $j,k \in \{1,2\}$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &= \alpha_{1,1} \cdot c_1 + \alpha_{2,1} \cdot c_2 \\ \varphi(b_2) &= \alpha_{1,2} \cdot c_1 + \alpha_{2,2} \cdot c_2 \,. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Matrix ${}_C\varphi_B$.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\varphi(b_1)\right)(x) &= b_1(2x-3) \cdot \mathrm{e}^{2-x} = 3\mathrm{e}^{2x-3}\mathrm{e}^{2-x} = 3\mathrm{e}^{x-1} \\ \left(\varphi(b_2)\right)(x) &= b_2(2x-3) \cdot \mathrm{e}^{2-x} = (2x-5)\,\mathrm{e}^{2x-3}\mathrm{e}^{2-x} = (2x-5)\,\mathrm{e}^{x-1} \end{aligned}$$

(b) Nach (a) ist

$$\left(\varphi(b_1)\right)(x) = 3\mathrm{e}^{x-1} = 3\mathrm{e}^{-1} \cdot \mathrm{e}^x = 3\mathrm{e}^{-1} c_1(x)$$

und somit $\alpha_{1,1} = 3\mathrm{e}^{-1}$, $\alpha_{2,1} = 0$,
sowie

$$\begin{aligned} \left(\varphi(b_2)\right)(x) &= (2x-5)\,\mathrm{e}^{x-1} = (2x-5)\,\mathrm{e}^{-1} \cdot \mathrm{e}^x \\ &= 2\mathrm{e}^{-1} \cdot x\mathrm{e}^x - 5\mathrm{e}^{-1} \cdot \mathrm{e}^x = -5\mathrm{e}^{-1} c_1(x) + 2\mathrm{e}^{-1} c_2(x) \end{aligned}$$

und somit $\alpha_{1,2} = -5\mathrm{e}^{-1}$ und $\alpha_{2,2} = 2\mathrm{e}^{-1}$.

(c) Die in (b) bestimmen Skalare bilden die Koordinatenvektoren der Bilder der Basiselemente von B bezüglich der Basis C, es gilt für $k \in \{1,2\}$

$${}_C(\varphi(b_k)) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,k} \\ \alpha_{2,k} \end{pmatrix} \,.$$

Hieraus erhalten wir

$${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{-1} & -5\mathrm{e}^{-1} \\ 0 & 2\mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral.

$$\int \frac{3x^3 + 5x^2 + 3x}{x^2 + 1} \,\mathrm{d}x$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} \frac{\ln(x) + 1}{x \ln(x)} \,\mathrm{d}x.$$

(c) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergiert.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x$$

(a) Wir führen zunächst eine Polynomdivision durch, um den Grad des Zählers kleiner als den des Nenners zu machen. Es ergibt sich

$$3x^3 + 5x^2 + 3x = (3x + 5)(x^2 + 1) - 5,$$

sodass

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^3 + 5x^2 + 3x}{x^2 + 1} \,\mathrm{d}x &= \int (3x + 5) \,\mathrm{d}x - \int \frac{5}{x^2 + 1} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2 + 5x\right] - \int \frac{5}{x^2 + 1} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2 + 5x - 5\arctan(x)\right].
\end{aligned}$$

(b) Wir machen die Substitution $u = x \ln(x)$. Damit ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$ und die Grenzen des Integrals werden zu $u = \mathrm{e} \cdot \ln(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ (unten) und zu $u = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}$ (oben). Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} \frac{\ln(x) + 1}{x \ln(x)} \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}} \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u \\
&= \left[\ln|u|\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}} \\
&= \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\right) - \ln(\mathrm{e}) = \mathrm{e} + 1 - 1 = \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Alternative: Neben der alternativen Substitution $u = \ln(x)$ ist es ebenfalls möglich, zunächst das unbestimmte Integral zu berechnen und anschließend die Integralgrenzen einzusetzen. Im Folgenden kombinieren wir beide Wege. Es ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x) + 1}{x \ln(x)} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{u + 1}{\mathrm{e}^u \cdot u} \cdot \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u = \int \frac{u + 1}{u} \,\mathrm{d}u = \int \left(1 + \frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u \\
&= \left[u + \ln|u|\right] = \left[\ln(x) + \ln|\ln(x)|\right].
\end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen liefert

$$\left[\ln(x) + \ln|\ln(x)|\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} = \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right) + \ln\left|\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right)\right| - \ln(\mathrm{e}) - \ln|\ln(\mathrm{e})| = \mathrm{e} + 1 - 1 - 0 = \mathrm{e}.$$

(c) Es ist $\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leqq x^{-2}$ für $x \neq 0$. Da das Integral $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ für $\alpha > 1$ konvergiert, konvergiert insbesondere auch $\int_1^{+\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x$ und damit nach dem Majorantenkriterium auch das ursprüngliche Integral.

Aufgabe 6 (5 *Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $(A - 4\mathrm{E}_4)\,x = 0$.

(b) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A als Produkt von Linearfaktoren an.

(c) Ist A invertierbar?

(d) Ist A diagonalisierbar?

(a) Wir verwenden das Gaußverfahren:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} -6 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{6}Z_1 : \\ \frac{1}{2}Z_3 : \\ \frac{1}{2}Z_3 + \frac{1}{2}Z_4 : \\ Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - \frac{1}{2}Z_3 : \\ -\frac{1}{2}Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - \frac{2}{3}Z_2 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

woraus wir

$$\mathcal{L} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ablesen.

(b) Wir nutzen aus, dass A eine untere Blockdreiecksmatrix ist:

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda \mathrm{E}_4\right) = \det\left(\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \mathrm{E}_2\right) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \mathrm{E}_2\right)\\
&= (-2-\lambda)(4-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 4\right)\\
&= (\lambda+2)(\lambda-4)\left(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4\right)\\
&= (\lambda+2)(\lambda-4)\left(\lambda^2 - 4\lambda\right)\\
&= \lambda \cdot (\lambda+2)(\lambda-4)^2\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg 1:

Wir entwickeln $\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ nach der 2. Zeile und erhalten:

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\\
&= (-1)^{2+2}(4-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\\
&= (4-\lambda)\left((-2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - 4(-2-\lambda)\right)\\
&= (\lambda+2)(\lambda-4)\left(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4\right)\\
&= \lambda(\lambda+2)(\lambda-4)^2\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg 2:

Aus (a) wissen wir, dass $\lambda_1 = 4$ ein Eigenwert sein muss, ferner können wir den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ direkt ablesen, ein zugehöriger Eigenvektor wäre e_1. Da ferner die letzte Zeile ein Vielfaches der vorletzten ist, hat die Matrix nicht vollen (Zeilen-)Rang, insbesondere ist die Determinante – und damit ein Eigenwert – gleich 0. Also $\lambda_3 = 0$.

Wir berechnen λ_4 über die Spur, es gilt

$$\operatorname{Sp} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

und also

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= \operatorname{Sp} A - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ &= 6 - (-2) - 4 - 0 = 4\,.\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+2)(\lambda-4)^2$$

(c) Nein, A ist nicht invertierbar, da nach (b) $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist.

Alternativer Lösungsweg 1:

Wir nutzen die Blockdreiecksgestalt und berechnen:

$$\det\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -8 \cdot 0 = 0$$

Da die Determinante gleich 0 ist, ist A nicht invertierbar.

Alternativer Lösungsweg 2:

Da die vierte Zeile offenbar ein Vielfaches der dritten ist (Faktor -1), sind die Zeilen linear abhängig, die Matrix hat nicht vollen Rang und ist somit auch nicht invertierbar.

(d) Gemäß (a) und (b) gilt für die geometrische und die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 4$

$$e_4 = 2 \neq 1 = d_4\,.$$

Folglich ist A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Vektorfeld $v_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(xy^2)} y^3 + \alpha \\ \mathrm{e}^{(xy^2)} + 2xy^2\mathrm{e}^{(xy^2)} + 3\alpha \end{pmatrix}$ ein Potential besitzt.

(b) Bestimmen Sie ein Potential für das Vektorfeld v_1 .

(a) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, besitzt v_α genau dann ein Potential, wenn $\operatorname{rot} v_\alpha = 0$ ist. Wir haben

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} v_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{(xy^2)} + 2xy^2\mathrm{e}^{(xy^2)} + 3\alpha) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{(xy^2)} y^3 + \alpha) \\
&= \mathrm{e}^{(xy^2)} y^2 + 2y^2\mathrm{e}^{(xy^2)} + 2xy^4\mathrm{e}^{(xy^2)} - \left(\mathrm{e}^{(xy^2)} 2xy^4 + 3y^2\mathrm{e}^{(xy^2)}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daher besitzt v_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Potential.

(b) Für ein Potential Φ von v_1 muss gelten: $\nabla\Phi = v_1$. Damit gilt insbesondere

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \int \left(\mathrm{e}^{(xy^2)} y^3 + 1\right) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{(xy^2)} y + x + c(y).$$

Dieser Schritt ist auch im Fall $y = 0$ gültig, wie eine Probe zeigt.

Weiter soll gelten

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\Phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{(xy^2)} + 2xy^2\mathrm{e}^{(xy^2)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}c(y) \overset{!}{=} \mathrm{e}^{(xy^2)} + 2xy^2\mathrm{e}^{(xy^2)} + 3 \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}c(y) = 3 \\
\Leftrightarrow\quad &c(y) = 3y + d \quad \text{für ein } d \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Wir können $d = 0$ wählen.

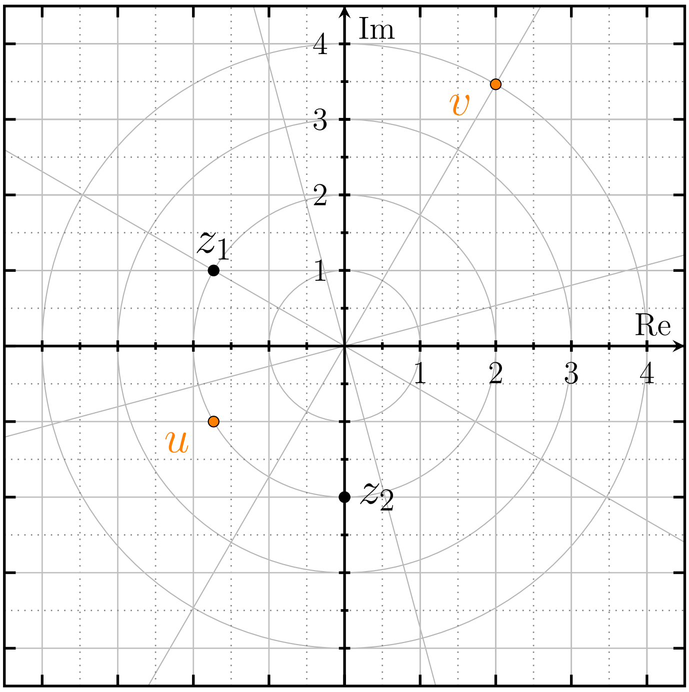
Für v_1 ist ein Potential Φ auf $\mathbb{R}^2$ damit gegeben durch

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{(xy^2)} y + x + 3y.$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

(a) In der Gaußschen Zahlenebene sind komplexe Zahlen z_1 und z_2 gegeben: siehe Skizze. Zeichnen Sie die Zahlen $u := z_1 + z_2$ und $v := z_1 \cdot z_2$ ebenfalls ein.



(b) Geben Sie die Lösungen w_1, w_2 der Gleichung

$$\mathrm{i}\, w^2 + (2+4\mathrm{i})w + 4 + 4\mathrm{i} = 0$$

in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$w_1 = \boxed{-2}$ $\qquad w_2 = \boxed{-2+2\mathrm{i}}$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Reihenwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{4n}\right)^n = \boxed{\mathrm{e}^{1/4}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{\sin(\pi x)} = \boxed{-\dfrac{3}{\pi}}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+7}{2x+\sin(2x)} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan\left(\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

(e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^k - 3^k}{4^k} = \boxed{-2}$

(f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \dfrac{3^k}{(k-2)!} = \boxed{9\mathrm{e}^{-3}}$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem. Der Punkt P habe im kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}\right)$ den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Standardkoordinatenvektor von P: $\quad {}_{\mathbb{E}}P = \boxed{\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie das Bild von $v \in \mathbb{R}^2$ unter der Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{pmatrix} v - \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an einer Ebene E, welche den Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den Punkt $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet.

(a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^3$ der Strecke von P nach $\varphi(P)$: $M = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$, der senkrecht zur Spiegelebene E steht: $v = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

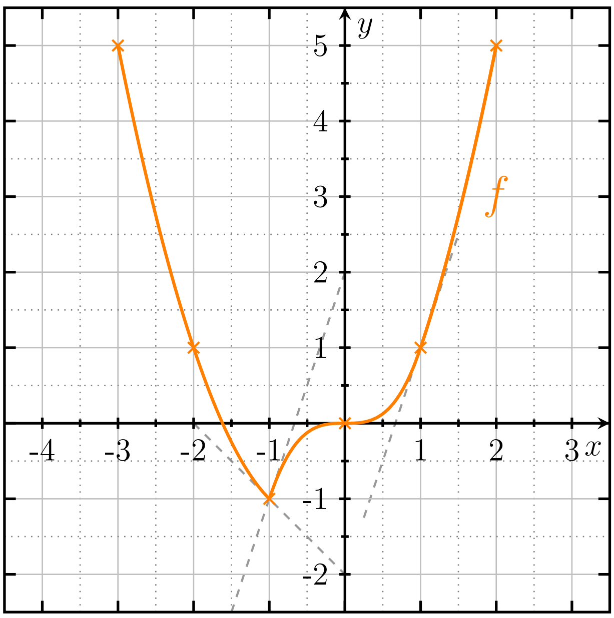
(c) Bestimmen Sie die Spiegelebene: $E = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 2 \right\}}$

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{falls } x \leqq -1 \\ x^3 & \text{falls } -1 < x < 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{falls } x \geqq 1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x \to -1-0} f'(x) = \boxed{-1}, \quad \lim_{x \to -1+0} f'(x) = \boxed{3}, \quad \lim_{x \to 1-0} f'(x) = \boxed{3}, \quad \lim_{x \to 1+0} f'(x) = \boxed{3}.$$

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 2$:



(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f nicht stetig differenzierbar? $x \in \left\{ \boxed{-1} \right\}$
